Laczkó László

Mértani helyek keresése egy pont mozgása során

Az oktatási anyag létrehozását a KOMA támogatta

A geometria tanítása során a nehezebben emészthető feladatok közé tartozik a ponthalmazok keresése. Nehézséget okoz, hogy valójában két feladatot kell megoldani. Az első lépésben megkeressük, hogy milyen tulajdonságú pontok tartoznak a halmazhoz és utána vizsgálni kell, hogy a fellelt halmaz minden pontja hozzátartozik e a válaszhoz. Először talán Thales tételénél találkozik minden diák azzal, hogy a fellelt körvonalnak minden pontja nem tartozik hozzá a keresett halmazhoz. A feladatok során bizonyos geometriai tulajdonságok, pl .egy ponttól vagy egy egyenestől azonos távolságra levés egy körvonalat, illetve egy egyenest adhatnak de a feladatban szereplő megkötések ezen pontok mindegyikét vagy megengedik, vagy nem. Ezért fontos a megfordítás vizsgálata is. A tanult tételek változatos gyakorlására alkalmasak ezek a feladatok. A geometriában fontos szerepe van az ábráknak, ilyen feladatoknál ezek elkészítése nehéz, hiszen kezdetben nem tudjuk még a választ nyújtó halmazt. Jelen feladatokban, olyan problémákat vizsgálunk melyek során egy pont mozgása során másik pontok pályáját keressük. Itt fontos szerepet kaphat a számítógép. A mozgó pont pályáját még el tudjuk képzelni, le tudjuk rajzolni, de a keresett pontét már nem látjuk, azt pedig, hogy egyszerre mozogjanak végképp nehéz elképzelni. A számítógéppel készített animáció teszi fel a koronát a műre, hiszen roppant látványos. A feladatokhoz látókör ismerete és a háromszög nevezetes pontjaihoz csatolódó ismeretek szükségesek. Ezen anyagrészek megtanítása után úgy csináljuk az összefoglalást, hogy közben új dolgokat fedezünk fel, így nem unalmas a tanuló számára.

1. Az *ABC* háromszög *C* csúcsa körbe fut a háromszög köré írt körén. Mi a háromszög beírt köre középpontjának mértani helye?

Megoldás: Két ábrát kell készíteni. Első esetben célszerű egy hegyesszögű *ABC* háromszöget nézni és lerajzolni a háromszög köré írt körét.
Az *A*, *B*, *C* csúcsoknál levő szögek legyenek rendre α, β, γ. A beírt kör közepe *O*.
$AOB\angle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}$, ha *C* ezen az *AB* íven mozog. Így az *O* pont rajta kell, hogy legyen az *AB* szakasz $AOB\angle$-ű látókörívén. Ezek után el kell készíteni azt az ábrát, amikor a *C* pont a másik *AB* ívén van a körnek. Nagyon jó gyakorló feladat, hogy a tanulók önállóan adják meg a másik látókörív darabot. Ekkor $ACB\angle = 180° - \gamma$, $AOB\angle = 180° - \frac{\gamma}{2}$.

Azt elfogadják a tanulók, hogy az A és a B pont nem tartozik a mértani helyhez. (Ekkor az ABC háromszög két csúcsa egybeesne, és ezt nem tekintjük háromszögnek.) Nehezebb annak a vizsgálata, hogy a körívek többi pontja viszont igen. Ha már mutattunk példát arra, hogy maradnak ki - úgymond nem triviális - pontok, mint az előbb A és B, akkor ezt a vizsgálódást nem tartják feleslegesnek. Tapasztalatom szerint ez a „megfordítás" nehezen megy a tanulóknak. Itt arra van szükség, hogy az íven tetszőlegesen felvett O' ponthoz megtaláljuk a nagy körön azt a C' pontot, mely ABC' háromszögnek O' a beírt körének a középpontja. Itt az AB egyenest célszerű tükrözni az AO' és a BO' egyenesekre, és a tükörképek C' metszéspontjánál lévő szögére γ jön ki, (itt tulajdonképpen az A és B-nél levő szögeket ismerjük, és a háromszög szögösszegét ismerve adjuk meg a C'-nél lévő szöget), és ebből következtetünk arra, hogy a C' a háromszög köré írt körön van.
A másik ábrán, ahol ugyan ezt a tükrözést célszerű a tanulóknak önállóan elvégezni, értelemszerűen 180-γ jön ki.

2. Mi a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontjának a mértani helye, ha C körbefut az ABC háromszög köré írt körén? (A pont rögzített)

Megoldás: O' most a hozzáírt kör középpontját jelöli. Ha C a γ szögű íven mozog, akkor BO'A szög $\frac{\gamma}{2}$, ez pedig az előbbi feladatban talált 180 - $\frac{\gamma}{2}$ szögű körív folytatása. Ennek az az íve jó, mely az A ponttól addig a pontig tart, ahol az A-ban AB-re emelt merőleges metszi ezt a kört. Ha a C a 180- γ szögű íven mozog, akkor O' a 90 + $\frac{\gamma}{2}$ szögű előbb talált kör azon ívén mozog, melyet az A pont és az előbbi merőleges és a kör metszéspontja határol. Itt is célszerű, hogy ezt a második részt a tanulók maguk végezzék el az előbbi gondolat mintájára. Ez azért fontos, mert egy másik ábrán kell meglátnia azokat a dolgokat, amiket a feladat első részében észrevettünk. A körívek határolópontjai megint nem tartoznak a mértani helyhez. A körívek belső pontjai közül egyet kiválasztva O'-nek, az előbbi tükrözéses megoldással megtalálhatjuk azt az ABC' háromszöget, melynek O' lesz a hozzá írható kör közepe.

3. Mi az AC oldalhoz hozzáírt kör középpontjának a mértani helye, ha a C csúcs körbefut az ABC háromszög köré írható körön? (B pont rögzített)

Megoldás: Kezdjék el a feladatot a tanulók önállóan, hiszen az előző feladatokban már rutint szereztek, milyen módon kell okoskodni. Ez nem olyan egyszerű feladat, mert megint más és más szögfelezők metszéspontját kell nézni, és más szögértékekkel kell számolni. Az AOC szög meghatározásának ábrája mindenképp kerüljön fel a táblára, és utána próbáljuk megtalálni ezen látókörív darabok (hiszen itt is két AB íven mozog a C pont) hogyan kapcsolódnak az előbbi feladatokban megkapott körökhöz! A körívek belső pontjai itt is hozzátartoznak a megoldáshoz, ez az előbbiekhez hasonlóan igazolható.

4. Mi az AB oldalhoz hozzáírt kör középpontjának a mértani helye, ha C körbefut az ABC háromszög köré írt körén?

Megoldás: Az előbb talált körök hiányzó ívei adják a megoldást. Az ábra kicsit más, de a gondolatmenet ugyanaz, mint az előző feladatokban. Ezt a feladatot azért érdemes nézni, mert az itt kapott mértani helyek ugyan azokon a körvonalakon vannak, amely körök eddig is szerepeltek. Pontosan a kimaradt körívek adják a megoldást.

5. Mi a háromszög magasságpontjának mértani helye, ha az ABC háromszög C csúcsa körbefut az ABC háromszög köré írható körén?

Ennek a feladatnak többféle megoldását érdemes vizsgálni. Célszerű előtte tárgyalni azt a problémát, hogy ha a háromszög magasságpontját tükrözzük a háromszög oldalegyenesére, akkor a tükörkép a háromszög köré írható körön van. Szintén érdemes a következő tételt megismertetni a tanulókkal: A háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege a köré írt kör közepéből a háromszög magasságpontjába mutat. Ha ezt a tételt időben később tanítjuk, akkor a mértani hely feladatot érdemes újra feladni, és a két megoldást összevetni. Ennek a feladatnak a megoldása során végre találunk a kapott köríven olyan belső pontot, amelyik nem tartozik hozzá a megoldáshoz, ezzel tudjuk igazolni, hogy nem lehet felületesen vizsgálni a megfordítást. Érdekes az is, hogy ellentétben az előző feladatokkal, az A és B pont hozzátartozik a megoldáshoz. Ezt könnyebben fel tudjuk fedeztetni a tanulókkal, és ezután jöhet annak a keresése, hogy ha a C pont A-val vagy B-vel esik egybe és elfajuló a háromszög, ez melyik pontokat dobja ki a mértani helyből.

I. megoldás:

Az A és B csúcsokból kiinduló magasságok talppontjai a C és M (magasságpont) pontokkal együtt húrnégyszöget adnak, mert a magasságok talppontjainál derékszögek vannak. Ezért az

M pontnál 180-γ szög van. Az AMB szög ennek a szögnek csúcsszöge, ezért szintén 180-γ. Ebből viszont az következik, hogy amíg a C a γ szögű íven mozog, az M pont az AB szakasz 180-γ szögű látókörívén mozog. Ha a C a kör másik ívén mozog, akkor a magasságpont az AB szakasz γ szögű látókörén mozog, mely az előbbi körívet egészíti ki körré. A megfordításhoz bocsássunk BM és AM-re merőlegest A –ból és B-ből ezek metszéspontjáról lehet megmutatni, hogy az ABC háromszög körül írt körén vannak. Ha AB nem átmérő, akkor A és B hozzátartozik a mértani helyhez. Az A-ból és B-ből AB-re emelt merőlegesek és a látókör metszéspontjai viszont nem, ha AB átmérő, akkor az A és B pontok nem tartoznak a mértani helyhez.

II. megoldás:
Vektorok segítségével fogunk okoskodni.
A köré írt kör közepéből az A és B csúcsokba mutató vektorok C pont mozgása során nem változnak. Ezek összege egy K pontba mutat a köré írt kör középpontjából. C pont mozgása során az OC vektort minden helyzetében kezdőpontjával a K pontba kell tolni. Innen egyszerű a feladat, hiszen egy pontból adott hosszúságú vektort minden irányban felmérve a végpontok egy kört adnak, mely A-n és B-n is átmegy. Ez azért igaz, mert mozgása során OC vektor OA vektornak is és OB vektornak is lesz mínusz egyszerese. Hozzátartozik még a feladathoz, hogy megmutassuk, hogy ez a kör az előbbi megoldásban talált körrel azonos.

III. megoldás:
Közismert, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalra vett tükörképe a háromszög köré írt körön van. Ezt figyelembe véve C pont mozgása során a magasságpont a kör AB egyenesre vett tükörképén mozog.
Itt is vizsgáltassuk természetesen a megfordítást is, és ellenőrizzük, hogy ugyan azt a kört kaptuk válaszul, mint az előbb.

6. Mi az ABC háromszög súlypontjának mértani helye, ha C körbefut az ABC háromszög köré írt körön?

Ezt a feladatot már a hasonlóság tárgyalása után tudjuk feladni. Jó alkalom az előbbi feladatok újbóli előszedésére.

Megoldás: Ha az AB oldal felezőpontjából C csúcsot harmadára kicsinyítjük, akkor a háromszög súlypontjába jutunk, ezért a súlypont mértani helye a köré írt kör felezőpontjára vonatkoztatott egyharmados kicsinyített képe. Az A és a B pontok kicsinyített képe nem tartozik hozzá a mértani helyhez.

Ha ezeket a feladatokat megoldottuk és számítógépes animációs program segítségével a képernyőn mozgásban megjelenítjük, a látvány feledteti a megoldások nehézségeit. Sokan valójában ekkor szembesülnek látványosan azzal, amit idáig bebizonyítottak. Itt nagyon fontosnak tartom a számítógép szerepét, mert vizuálisan megjelenít nehéz geometriai problémákat.

7. Mi az ABC háromszög köré írt köre középpontjának mértani helye, ha C körbefut a háromszög köré írható körén?

Megoldás: A köré írt kör közepe nyilván nem változik a mozgás során, tehát egy pont a mértani hely.
A feladat arra is jó, hogy vizsgáljuk az osztály éberségét!

A csatolt ábrákon az elkészített animációból láthatunk ábrákat. Hasonló további kérdéseket fel lehet tenni. Pl. szerepel az ábrákon a háromszög Feuerbach körének középpontjának pályája is.