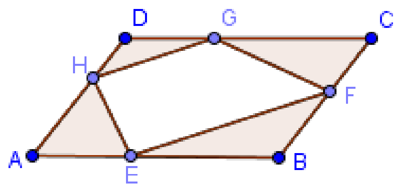
T. 284

Egy paralelogramma mindegyik oldalán adott egy pont. El szeretnénk dönteni, hogy a négy pont által meghatározott négyszög területe megegyezik-e a paralelogramma területének felével. Meg tudjuk-e mindig válaszolni a kérdést, ha csak egy körző áll a rendelkezésünkre?

Megoldás. Meghatározzuk annak egyenértékű feltételét, hogy a négy kijelölt pont feleakkora területű négyszöget alkosson, mint a paralelogramma. Az alábbi ábra szerinti betűzést használjuk:



Az EFGH négyszög területe csak akkor fele ABCD-nek, ha az AEH, BFE, CGF, DHG háromszögek területe is összesen fele ABCD területének, azaz

$$T_{AEH}+T_{BFE}+T_{CGF}+T_{DHG}=\frac{T_{ABCD}}{2}.$$

Mivel ABC, BCD, CDA, DAB háromszögek területe egyaránt fele ABCD területének, ezért az egyenlet leosztásával a következő alakhoz jutunk:

$$\frac{T_{AEH}}{T_{DAB}}+\frac{T_{BFE}}{T_{ABC}}+\frac{T_{CGF}}{T_{BCD}}+\frac{T_{DHG}}{T_{CDA}}=1.$$

Például az AEH és ABD háromszögek területaránya nem más, mint $\frac{AH}{AD}\cdot\frac{AE}{AB}$, hisz AEH háromszög AE-re merőleges magassága $\frac{AH}{AD}$-szer akkora, mint az ABD háromszög AB-re merőleges magassága, a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt. Hasonlóan eljárva a többi területarányra, majd ezt beírva egyenletünkbe:

$$\frac{AH}{AD}\cdot\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{BA}\cdot\frac{BF}{BC}+\frac{CF}{CB}\cdot\frac{CG}{CD}+\frac{DG}{DC}\cdot\frac{DH}{DA}=1.$$

Legyen most $e=\frac{AE}{AB}$, $f=\frac{BF}{BC}$, $g=\frac{CG}{CD}$, $h=\frac{DH}{DA}$. Ekkor az egyenlet a következő alakú lesz:

$$\begin{gathered}(1-h)e+(1-e)f+(1-f)g+(1-g)h=1,\\ e+f+g+h=1+he+ef+fg+gh,\\ (e+g)+(f+h)=1+e(h+f)+g(f+h),\\ (e+g-1)+(f+h)=(e+g)(f+h),\\ 0=(e+g-1)(f+h-1).\end{gathered}$$

Ez utóbbi egyenlet pontosan akkor állhat fenn, ha $e+g=1$ vagy $f+h=1$, azaz $AE+CG=AB$ vagy $BF+DH=BC$. Mivel átalakításaink visszafelé is elmondhatók, ezért ez lesz annak feltétele, hogy EFGH feleakkora területű legyen, mint ABCD.

Az, hogy ez fennáll-e, körzővel nyilván eldönthető, tehát a válasz: igen.