

T. 280

Az "Id Software" cég szörnyeket tenyészt. Ezek a szörnyek naponta mutálódnak. Ha a szörnynek ma m keze és n lába van, akkor holnap $2m-n$ keze és $2n-m$ lába lesz. A szörny elpusztul, ha negatív számú keze vagy lába keletkezik. Bizonyítsd be, hogy akkor és csakis akkor élhet örökké egy szörny, ha ugyanannyi keze van, mint lába.

Megoldás. Ha $m=n$, akkor a szörny kezeinek és lábainak száma a mutálódás során nem változik, így valóban örökké élhet.

Ha $m \neq n$, akkor a szörny meghal, azt indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan szörny, amelyre $m \neq n$, ám mégis örökké él. Egy mutálódás során kezeinek és lábainak számának összege változatlanul $S=m+n$, ezért a két szám örökké 0 és S között marad, eltérésük legfeljebb S . Ellenben egy mutálódással a két szám eltérése $|m-n|$ -ről $|(2m-n)-(2n-m)|=3|m-n|$ -re nő. Az eltérés ezért az idő telésével akármilyen nagy lehet, akár S -nél is nagyobb, ami ellentmondást jelent. Tehát ha $m \neq n$, akkor a szörnyek tényleg meghalnak.