T. 270

Mutasd meg, hogy ha az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ *egyenlet megoldható* x, y, z *egész számokkal, akkor az* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2n$ *egyenletnek is van egész megoldása az* x, y, z *változókban.*

Megoldás. Belátjuk, hogy az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ egyenletnek pontosan azokra az *n*-ekre van megoldása, melyek oszthatók kilenccel, vagy melyek nem oszthatók 3-mal.

Kiszorzással könnyen ellenőrizhető a következő (ismert) azonosság:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot \left((x + y + z)^2 - 3 \cdot (xy + yz + zx)\right)$$

Ha a kapott szorzat második tényezője 3-mal osztható, akkor $(x+y+z)^2$ is, így a számelmélet alaptételéből adódóan osztja az első tényezőt is. Nyilván ha az első tényező 3-mal osztható, akkor a második is. Ebből adódik, hogy ha egy 3-mal osztható *n*-re van megoldás, akkor az csak úgy lehet, hogy *n* 9-cel is osztható.

Minden nem kizárt *n*-re adni fogunk egy alkalmas megoldáshármast:

Ha $x = k - 1,\ y = k,\ z = k + 1$, akkor

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (k - 1)^3 + k^3 + (k + 1)^3 - 3(k - 1)k(k + 1) = 3k^3 + 6k - 3(k^3 - k) = 9k.$$

Ha $x = k,\ y = k,\ z = k + 1$, akkor

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = k^3 + k^3 + (k + 1)^3 - 3k^2(k + 1) = 3k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 3(k^3 - k^2) = 3k + 1.$$

Végül az $x = k,\ y = k,\ z = k - 1$ választással

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = k^3 + k^3 + (k - 1)^3 - 3k^2(k - 1) = 3k^3 - 3k^2 + 3k - 1 - 3(k^3 - k^2) = 3k - 1.$$

Ezzel beláttuk, hogy minden 3-mal nem osztható (3k+1 vagy 3k-1 alakú) *n*-hez található megoldás, illetve a 9-cel osztható *n*-ekhez is.

Ha egy *n*-re van megoldása a feladatban szereplő első egyenletnek, akkor az igazoltak szerint *n* nem osztható 3-mal, vagy 9-cel osztható, és mivel ugyanez *2n*-re is fennáll, ezért a második egyenletnek is lesz megoldása.