

T. 248

*Adott 25 pozitív egész, melyek egyike sem nagyobb 1000-nél. Tudjuk, hogy közülük bármelyik kettő szorzata négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy mind a 25 szám négyzetszám!*

**Megoldás.** Legyen  $p$  tetszőleges prímszám. Ekkor mind a 25 szám prímfelbontásában  $p$  kitevője azonos paritású, hisz egyébként volna két szám, amelyben  $p$  kitevője ellentétes paritású volna, így a két szám szorzatában  $p$  páratlan kitevőn szerepelne, ami ellentmond a négyzetszámságának.

Tekintsük az összes olyan prímet, amely mindegyik számban páratlan kitevővel szerepelne, és szorzatuk legyen  $P$  (ha nincs ilyen prím, akkor  $P=1$ ). Ekkor mind a 25 számot  $P$ -vel elosztva 25 darab különböző négyzetszámot kapunk. Ha  $P > 1$  volna, akkor ezek a négyzetszámok mind 1 és 500 között vannak. Azonban 1-től 500-ig csak 22 négyzetszám van, így csakis  $P=1$  lehet. Tehát mind a 25 szám négyzetszám.