A szakkörön a Kódok feladatgyűjtemény **1.1**, **5.1**, **5.5**, **5.8**, **1.2**, **4.1**, **5.2**, **5.3** példái kerültek elő.

1.1 Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az első szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, ... a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az előre adott értékkel.

a) Egy kijelzős mérleg egyszeri használatával kell megtalálnunk, hogy mennyivel nehezebbek vagy könnyebbek a hibás súlyok az előírtnál.

b) Ezután határozzuk meg, hogy melyik súly szériája lett hibás!
Most is csak a kijelzős mérleget használhatjuk, és azt is csak még egyszer.

c) Próbáljuk meg általánosítani előző eredményeinket. Fontos volt-e, hogy épp 10 széria volt?
Lényeges-e, hogy rendre épp 1, 2, 3, ... 10 kg-osak a súlyok az egyes szériákban? Fogalmazzuk meg általánosan a feladatot, és adjunk választ az a), b) kérdésekre az általános esetben is!

d) Módosítunk az eredeti feladaton. Tegyük fel, hogy mindegyik súly megfelelő tömegű (az egyes szériákban rendre 1, 2, ... 10 kg), de előfordulhat, hogy amikor a ládákat a bennük lévő súlyok növekvő sorrendjében betolták a raktárba egymás mellé, akkor két szomszédos ládát felcseréltek. Ezután rakták rájuk sorban a szériaszámokat, amelyek így most növekvő sorrendben vannak, de lehet, hogy az egyik szomszédos párnál nem a ládában levő súlyok tömegét jelzik.
Hány méréssel lehet megállapítani, hogy történt-e ilyen tévesztés?

Megoldás:
a) Rakjunk föl a mérlegre mindegyik súlyból egyet-egyet, és nézzük meg mennyivel tér el a tömeg 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 kg-tól.

b) Rakjunk a mérlegre az első szériából 1, a másodikból 2, ..., a tizedikből 10 súlyt és nézzük meg mennyivel tér el a tömeg $1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot4 + 5\cdot5 + 6\cdot6 + 7\cdot7 + 8\cdot8 + 9\cdot9 + 10\cdot10$ kg-tól. Az eltérés és az előző mérésben kapott hiba hányadosa épp a hibás súlyok szériaszáma.
Nem ez az egyetlen jó megoldás. Az a lényeg, hogy mindegyik szériából különböző számú súlyt tegyünk föl a mérlegre.

c) Ha $\boldsymbol{n}$ széria van, és az egyes szériákban a súlyok tervezett tömege rendre $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, .., \boldsymbol{x}_n$, de az egyik széria hibás, akkor $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{x}_n$, illetve $\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}_n$ lekérdezése megoldja a két feladatot.

d) I. mego. A b)-ben adott mérés most is jó lesz. Ha pld a 4. és 5. szériát felcseréljük, akkor a várt és a tényleges tömeg különbsége:

$$4\cdot4 + 5\cdot5$$
$$4\cdot5 + 5\cdot4$$
$$4\cdot(-1)+5\cdot1 = 1.$$

d) II. mego. Tegyünk fel az elsőtől kezdve minden második szériából egyet-egyet a mérlegre!
Az 1+3+5+7+9 összeget várjuk eredménynek. Ha volt csere, akkor nem ennyit kapunk.

d) Tanári kérdés: a fenti két megoldás között van-e olyan, amely akkor is jó, ha nem szomszédos ládákat cseréltek föl? És olyan, ami akkor is kimutatja a tévedést, ha nem volt csere, de az egyik széria hibás? (Az I. megoldás mindkettőre jó.)

5.1 (***Dobos Sándor példája***)
Számrontó Rezsőnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy számjegyet tetszőlegesen megváltoztat (pld. 5437→5487), vagy két számjegyet kicserél (pld. 5437→3457). Egyszer véletlenül az asztalon hagytam egy cetlit a másológép négyjegyű belépési számával. Rezső ezt meglátta és rögtön átjavította 1323-ra. Szerencsére észrevettem, és visszajavítottam az eredeti számra. De, amikor legközelebb lehetősége adódott Rezső megint elrontotta a cetlin lévő számot, így most 1213 van ráírva. Mi lehet a másológép belépési száma?

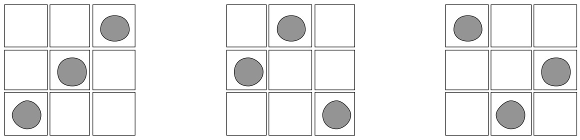
Megoldás:
Négy megoldás is van: 1223, 1313, 1233, 1123.

5.5 A térbeli sakktáblán a bástya a tábla oldaléleivel párhuzamosan tud lépni. Legfeljebb hány bástya helyezhető el a táblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást, ha a tábla

a) 3×3-as?

b) 8×8-as?

Megoldás:
a) 9-nél több bástya nem helyezhető el, mert a 9 oszlop mindegyikében legfeljebb egy lehet. 9 elhelyezhető, az alábbi ábrán a kocka 3 rétege külön-külön látható, a korongok a bástyákat jelzik. Egy táblán belül semelyik két bástya sincs ugyanabban a sorban vagy oszlopban, a különböző táblákon lévő bástyák soha sincsenek a tábla ugyanazon mezőjén.



b) 64 a megoldás. A konstrukció az előzőhöz hasonló, a főátló nyolc bástyáját ciklikusan fölfelé toljuk.

5.8 a) Az 1, 2, 3, ... 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Legalább hány kérdésre van szükség?
b) És ha a kérdéseket előre le kell írni, azaz a következő kérdés nem függhet az előzőre kapott választól?

Megoldás:
a) Egy-egy kérdés a szóbajövő számok halmazát két részhalmazra bontja: azokra, amelyekre igen a válasz (ha az a szám a gondolt szám) és azokra, amelyekre nem a válasz. "Rossz esetben" olyan választ kapunk, amely azt mutatja, hogy a nagyobb, pontosabban a nem kisebb részhalmazban van a gondolt szám. Ezért, ha biztosra megyünk nem tehetünk jobbat, minthogy kérdéseinkkel megfelezzük a lehetőségeket. 4 kérdés kell a kitaláláshoz, és ennyi elég is.

b) Házi feladat

1.2 Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömegű, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol levő cégvezető meg szeretné tudni, hogy milyen tömegű súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési űrlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött űrlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezető az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a "Mért tömeg" rovatba?

Az űrlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	(kg)
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

I. megoldás (***Mindent háromszor***)

15 mérés elég. Sorra vesszük a szériákat, mindig csak egy súlyt veszünk ki belőlük és azt a súlyt háromszor is megmérjük. Így a jó eredményt mindegyik szériánál legalább kétszer is megkapja a cégvezető, így tudni fogja a helyes eredményeket.

Megjegyzés: ez a módszer jó, de nem optimális.

II. megoldás (Az I. megoldás javítása)
Az előző módszert alkalmazom, de csak kétszer mérek meg minden súlyt, majd kizárólag azt teszem fel harmadszorra is, amelynél két különböző eredményt kaptam. Így 11 méréssel oldom meg a feladatot.

Megjegyzés: ez a módszer nem szabályos, mert nincs lehetőség a cégvezetőnek menet közben beleszólni, hogy melyiket mérje meg még egyszer az alkalmazott.

III. megoldás: (Újabb javítás)
Én is csak kétszer mérek meg minden súlyt, végül pedig mindegyik szériából egyet-egyet tetetek fel a mérlegre, így 11 méréssel oldom meg a feladatot. Ha az egyesével mért súlyok egyikénél a két mérés nem ugyanazt az eredményt adta, akkor tudhatjuk, hogy az utolsó mérés jó, így annak eredményéből, és a másik négy súly tömegéből meghatározható a bizonytalan eredmény is.

IV. megoldás: 7 méréssel oldom meg a feladatot. Az első öt mérésben csak egy-egy súlyt teszünk a mérlegre, az elsőben az első, a másodikban a második, ... az ötödikben az ötödik szériából. A hatodik mérésben öt súlyt, mindegyik szériából egyet-egyet teszünk a mérlegre. A hetedik mérésben 15 súlyt, az első szériából egyet, a másodikból kettőt, ... az ötödikből ötöt teszünk a mérlegre. Ha a hatodik vagy a hetedik mérés eredménye összhangban van az első öt mérés eredményével, akkor az első öt mérés mindegyikének jó az eredménye, tudjuk a tömegeket. Ha a hatodik és a hetedik mérés eredménye sincs összhangban az első öt mérés eredményével, akkor az első öt között van a hiba. Most az 1.1 feladat a) és b) része megoldásának alapján készen vagyunk.

Hat mérés nem elég. Ennek igazolására később térünk vissza.

Házi feladat: egy mérési tervhez meg kell adni az előírt mérések számát - a továbbiakban ezt n jelöli - továbbá nemnegatív egész számokkal kell kitölteni az űrlap 1., 2., 3., 4., 5. oszlopait. Jelölje az így kapott számtáblázat i-edik sorának ($i = 1, 2, ..., n$) j-edik oszlopába ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) írt számot a_{ij} (a_{ij} természetes szám). Tehát a_{ij} -vel jelölöm az i-edik mérésnél a j-edik szériából vett súlyok számát. Határozzunk meg az a_{ij} számokkal kapcsolatos olyan algebrai feltételt, amely azzal ekvivalens, hogy a mérésekből meghatározhatók a súlyok (feltéve, hogy legfeljebb egy hibás az eredmények közül).

További házi feladatok:

4.1 (***Pálvölgyi Dömötör példája, Bergengóc példatár 2. 237. fel.***)
A budapesti telefonszámok hétjegyűek. Sokszor előfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerűbb eljárást arra, hogy a hétjegyű számok végére még egy ellenőrző számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

5.2 Egy hajó és utasai, összesen 100 fő, Ungabunga szigetén az emberevők fogságába esett. Tudják, hogy másnap reggel a kannibálok leültetik őket egymás mögé, és mindegyikük fejére egy-egy piros vagy kék sapkát húznak. Mindenki csak az összes előtte ülő ember fején lévő sapkát fogja látni, a sajátját és a mögötte ülőkét nem. A leghátsó embertől kezdve sorban mindenki hangosan mondhat majd egy színt: pirosat vagy kéket. A végén azt engedik szabadon, aki saját sapkája színét mondta, aki nem találta el, azt bizony megeszik. A kannibálok szigorúak, ha bárki mást tesz, minthogy a lehető legegyszerűbben kimondja a "piros" vagy a "kék" szót, akkor senkinek sem kegyelmeznek.
A foglyoknak még egy esélye van. Most este még összebeszélhetnek. Szeretnék, hogy minél többen megszabaduljanak. Hány fogoly tud biztosan megmenekülni?

Könnyítés: oldjuk meg előbb a feladatot abban az esetben, ha tudjuk, hogy összesen pontosan

a2) két;

a10) tíz;

piros sapka van a 100 között!

5.3 Gondoljuk végig az 5.2 feladatot kettő helyett három színnel! Minden rab fején háromféle sapka lehet, és mindenki háromféle színt is mondhat.