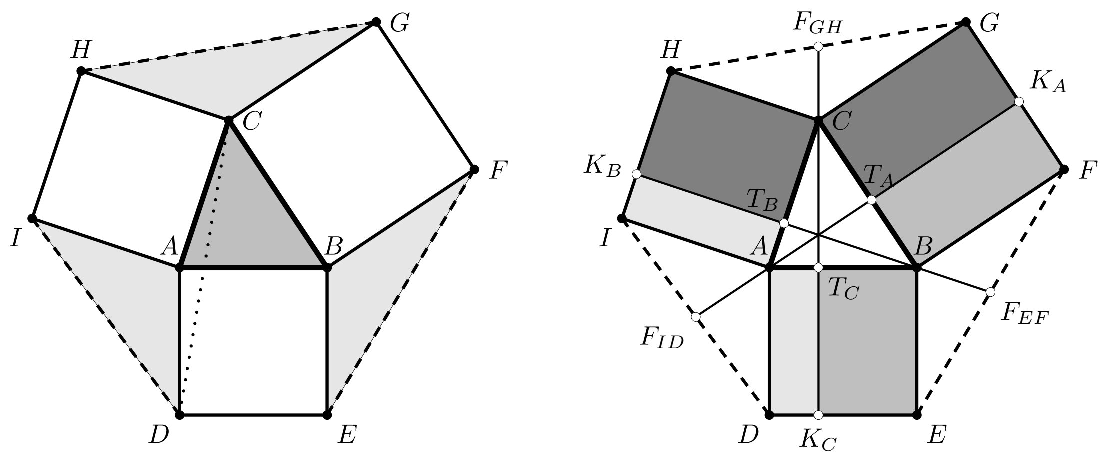
3. foglalkozás: *Egy ábra az „Elemek”-ből*

Az első két foglalkozáson egy-egy feladat sok megoldását láthattuk. Most egyetlen ábrával kapcsolatban teszünk fel sok kérdést. Az anyagot az egyetemi tanárképzéshez készült feladatgyűjteményből vettük, melynek egyik szerzője Hraskó András. Lásd: `http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt`

Feladat Az ABC háromszög oldalaira kifelé rajzoltuk a $BADE$, $CBFG$, $ACHI$ négyzeteket (lásd a 1. ábrát).

a) Fejezzük ki az ABC háromszög t területével az EFB, GHC, IDA háromszögek területeit!

b) Oldjuk meg a $CD = XY$ „egyenletet”, tehát a 1. ábrán már adott pontok közül keressünk kettőt, melyek távolsága megegyezik a D, C pontok közti távolsággal!



1. ábra.

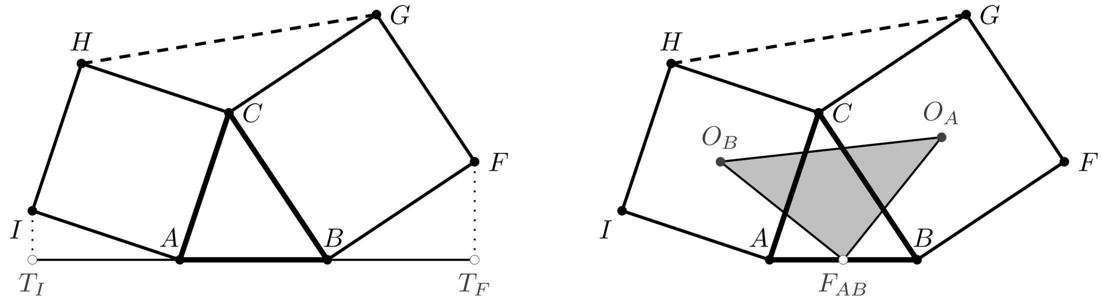
Megrajzoljuk az ABC háromszög magasságvonalainak egyeneseit. Ezek a háromszög oldalegyeneseit a T_C, T_A, T_B pontokban, a négyzetek DE, FG, HI oldalegyeneseit a K_C, K_A, K_B pontokban, az EF, GH, ID egyeneseket az F_{EF}, F_{GH}, F_{ID} pontokban metszik (lásd a 1. ábra jobb oldalát).

c) Mutassuk meg, hogy F_{EF}, F_{GH} és F_{ID} rendre az EF, GH, ID szakaszok felezőpontjai.

d) A magasságvonalak a négyzeteket két-két téglalapra osztják. Mutassuk meg, hogy az eredeti háromszög valamely csúcsában találkozó két téglalap területe egyenlő:

$$t_{AT_BK_BI} = t_{ADK_CT_C}, \qquad t_{BT_CK_CE} = t_{BFK_AT_A}, \qquad t_{CT_AK_AG} = t_{CHK_BT_B}.$$

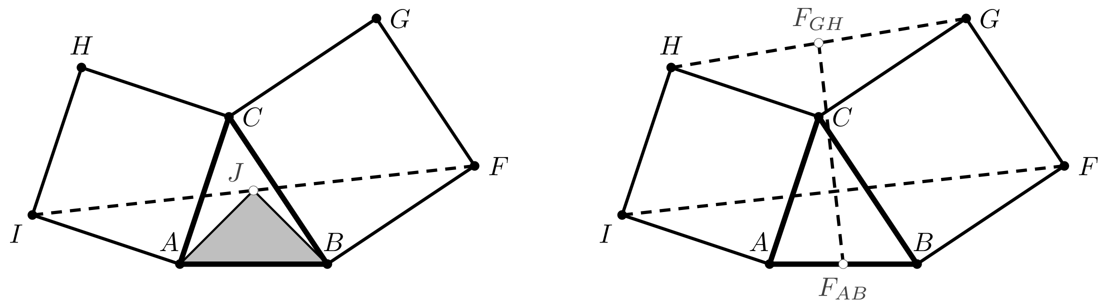
e) Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az A és a B pont valamint az F pont és az I pont merőleges vetülete az AB egyenesen (lásd a 2. ábrát)!



2. ábra.

f) Mutassuk meg, hogy az $ACHI$, $CBFG$ négyzetek O_B, O_A középpontjai az AB szakasz F_{AB} felezőpontjával egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak!

g) Mutassuk meg, hogy az A, B pontok az IF szakasz J felezőpontjával egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak (lásd a 3. ábrát)!



3. ábra.

h) Mutassuk meg, hogy az IF szakasz merőleges az $F_{AB}F_{GH}$ szakaszra és kétszer olyan hosszú!

Ellenőrző kérdések:

i) Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az $EF = u$, $GH = v$, $ID = w$ szakaszok hossza!

j) Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott három pont, az oldalakra kifelé rajzolt négyzetek középpontjai.

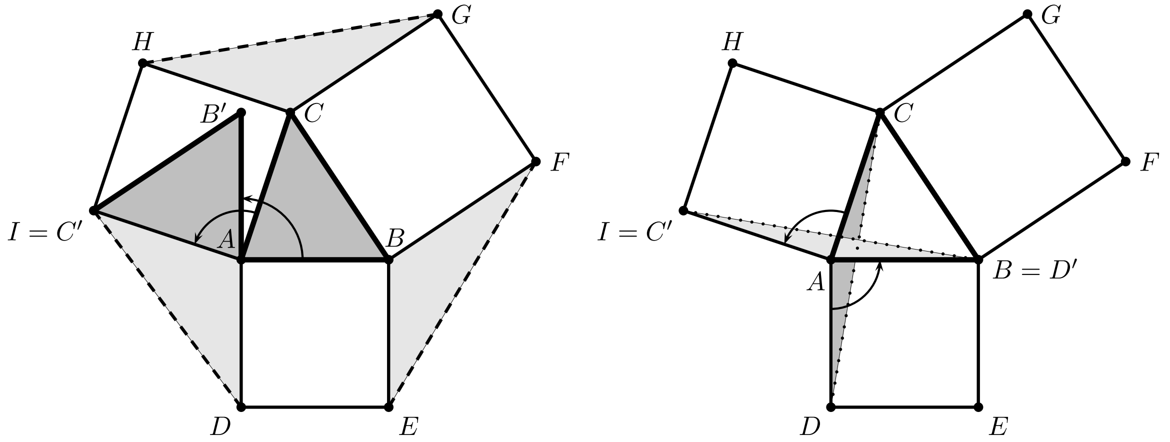
Ajánló

Feladatunk alapábrája Euklidesz „Elemek” című könyvének I. 47. Tételéhez kapcsolódik, lásd `http://mek.oszk.hu/00800/00857/html/ikonyv.htm#I_47`.

Megoldások

a) Forgassuk el az ABC háromszöget A körül $90°$-kal (a 4. ábrán balra)! Ekkor C képe $C' = I$. A B pont B' képére $DAB'\angle = 180°$, hiszen $DAB\angle = 90°$. Így A a DB' szakasz felezőpontja, tehát IA a $DB'I$ háromszög súlyvonala, azaz a DAI, $AB'I$ háromszögek területe egyenlő. Ez mutatja, hogy mindegyik kérdezett háromszög területe egyenlő az ABC háromszög területével.

b) Az A körüli $90°$-os forgatásnál még D képe $D' = B$, így a DC szakasz elforgatottja a BI szakasz (lásd a 4. ábra jobb oldalát). Tehát $DC = BI$.



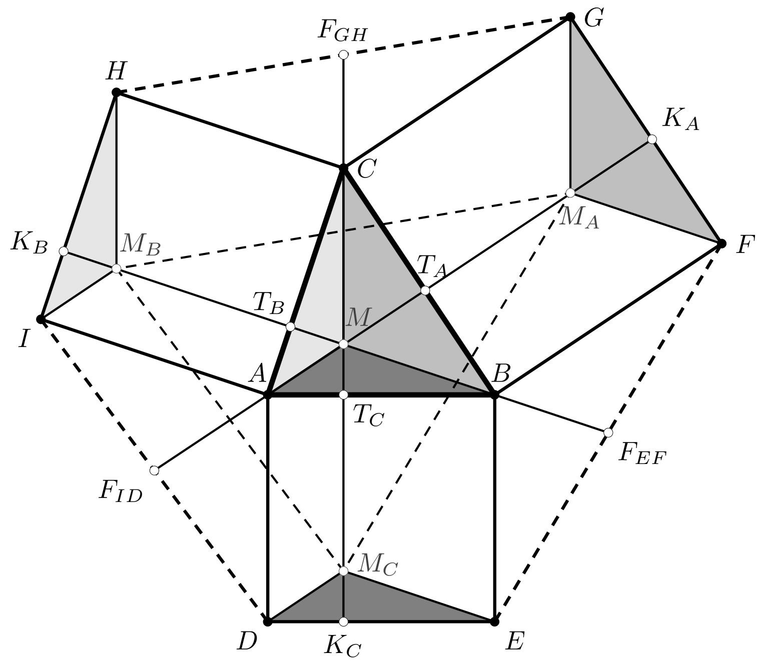
4. ábra.

c) I. megoldása *Háromszög létrehozása eltolással*

Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M és toljuk el az AMB háromszöget a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ vektorral a DM_CE háromszögbe, a BMC háromszöget a $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DG}$ vektorral az FM_AG háromszögbe, végül a CMA háromszöget a $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AI}$ vektorral a HM_BI háromszögbe (lásd a 5. ábrát)!

Az így kapott ábrán M_AM_B a GH szakasz eltoltja a $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GM_B} = \overrightarrow{HM_A}$ vektorral, míg M_BM_C az ID szakasz eltoltja a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IM_B} = \overrightarrow{DM_C}$ vektorral, végül M_CM_A az EF szakasz eltoltja a $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{EM_C} = \overrightarrow{FM_A}$ vektorral.

Az a) feladatrész állítása szerint az IDA, EFB, GHC háromszögek területe egyenlő, így az $M_AM_BM_C$ háromszöget egyenlő részekre osztják az M_CM, M_AM, M_BM szakaszok. A háromszögben egy és csakis egy olyan pont van, melyet a csúcsokkal összekötve három egyenlő területű háromszög jön létre: a súlypont. Tehát M az $M_AM_BM_C$ háromszög súlypontja. Az M_CM egyenes tehát felezi az M_AM_B szakaszt, így annak M_CM-mel párhuzamos eltoltját, a GH szakaszt is felezi. Ugyanígy M_BM felezi EF-et és M_AM az ID-t.



5. ábra.

c) II. megoldása *Vektorok*
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, tehát

$$\overrightarrow{BA}^{-90^\circ} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ} - \overrightarrow{CB}^{-90^\circ} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ} + \overrightarrow{CB}^{90^\circ}, \tag{1}$$

míg $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB}^{90^\circ}$, $\overrightarrow{CF_{GH}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CG}\right)$, azaz

$$\overrightarrow{CF_{GH}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}^{-90^\circ} + \overrightarrow{CB}^{90^\circ}\right). \tag{2}$$

A (1), (2) egyenletek összevetése mutatja, hogy a CGH háromszög CF_{GH} súlyvonala valóban merőleges az ABC háromszög AB oldalegyenesére, sőt az is kiderült, hogy CF_{GH} fele olyan hosszú, mint az AB oldal. Hasonlóan igazolható az összefüggés a többi oldalpárra.

c) III. megoldása *Komplex számok*

Az előző megoldás komplex számokkal is elmondható. Ha C a komplex számsíkunk origója és A-nak az a, B-nek a b komplex szám felel meg, akkor a

$$H, \qquad G, \qquad F_{GH}$$

számoknak megfelelő komplex szám rendre

$$-ia, \qquad ib, \qquad \frac{-i}{2}a + \frac{i}{2}b,$$

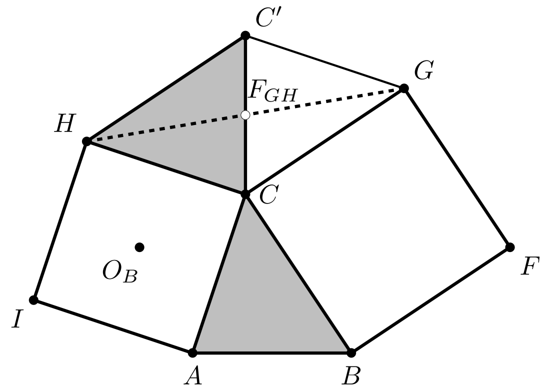
így a

$$\frac{-i}{2}a + \frac{i}{2}b = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (b - a)$$

algebrai azonosság mutatja, hogy a CF_{GH} szakasz fele olyan hosszú, mint az AB szakasz és merőleges rá.

c) fel. IV. megoldása *Középpontos tükrözés, forgatás*

Ha középpontosan tükrözzük a CHG háromszöget a HG oldal felezőpontjára, akkor a $CGC'H$ paralelogrammához jutunk. Ha a CHC' háromszöget elforgatjuk $-90°$-kal az $ACHI$ négyzet O_B középpontja körül, akkor az ACB háromszöget kapjuk (lásd a 6. ábrát). Valóban, H a C csúcsba, C a B pontba képződik és a $\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{CG}$ vektor $-90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{CB}$, így a HC' oldal képe a CB oldal. A CGH háromszög CC' súlyvonalegyenese merőleges az AB egyenesre, hiszen az előbbi $-90°$-os elforgatottja az utóbbi. Épp ezt akartuk igazolni.



6. ábra.

d) I. megoldása

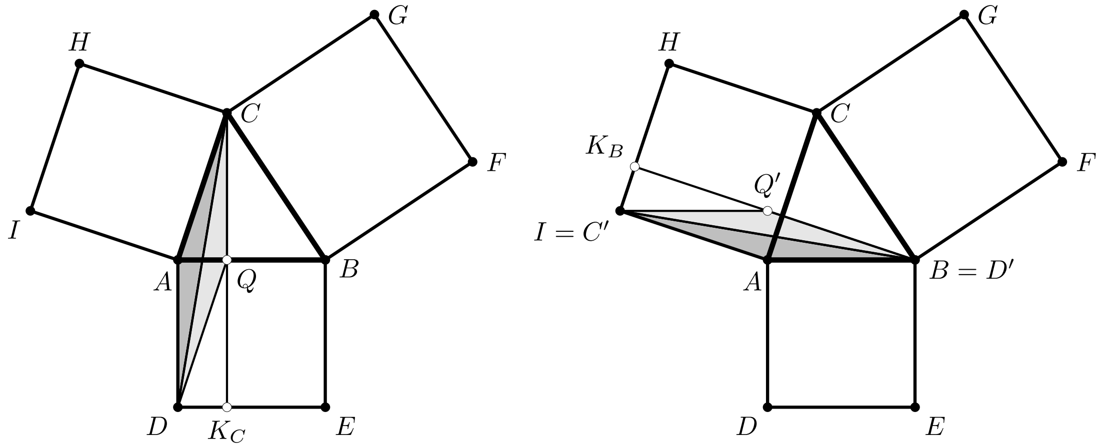
A CAT_C, BAT_B háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik egyenlők. Így $\frac{AT_C}{AC} = \frac{BT_B}{BA}$, azaz $AT_C \cdot BA = BT_B \cdot AC$, tehát a $t_{ADK_CT_C} = t_{AT_BK_BI}$. Ehhez hasonlóan igazolható a többi egyenlőség.

d) II. megoldása (*Euklidesz útján*)

A CAD háromszöget egészítsük ki a $CADQ$ paralelogrammává. Mivel AD párhuzamos az ABC háromszög C-ből induló magasságával, így Q a CK_C magasságvonalra esik. (Az 7. ábrán Q épp az AB oldalra esik, de ez csak az adott ábra specialitása.)

Ennek a paralelogrammának a területe egyenlő az ADK_CT_C téglalap területével.

Alkalmazzuk az a)-b) feladatokban látott transzformációt, az A körüli $90°$-os forgatást! Ez az ADC háromszöget az ABI háromszögbe viszi, az $ADQC$ paralelogrammát pedig egy olyan $ABQ'I$ paralelogrammába, amelynek Q' csúcsa



7. ábra.

az AI-vel párhuzamos BK_B egyenesre, az ABC háromszög egyik magasságvonalára esik.

Az $ABQ'I$ paralelogramma területe egyenlő az AT_BK_BI téglalap területével, azaz $t_{AT_BK_BI} = t_{ADK_CT_C}$. Hasonlóan igazolható a többi összefüggés.

I. megjegyzés a d) fel. II. megoldásához

A d) feladat állítása a koszinusz-tétel egy szimmetrikus megfogalmazása. így is fogalmazható: az AB oldalra írt négyzet területe a T_AK_AGC, T_BCHK_B téglalapok területének összegével kevesebb, mint a BC, CA oldalakra írt négyzetek területének összege. De

$$CT_A = CA \cdot \cos ACB\angle, \qquad CT_B = CB \cdot \cos ACB\angle,$$

így

$$t_{T_AK_AGC} = CB \cdot CA \cdot \cos ACB\angle, \qquad t_{T_BCHK_B} = CA \cdot CB \cdot \cos ACB\angle,$$

így valóban az ismert $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ képlethez jutunk.

II. megjegyzés a d) fel. II. megoldásához

A fenti ábrákon hegyesszögű háromszöget látunk. Kissé más az ábra, ha az ABC háromszög egyik szöge, pl γ, tompaszög. Olyankor az AT_AK_AI téglalap tartalmazza a T_ACHK_A téglalapot, területük különbségeként kapjuk az AC oldalra írt négyzet területét.

e) Az I pont az AB egyenesre T_I-ben állított i merőlegesen, az F pont az AB-re T_F ben állított f merőleges egyenesen kell legyen. Mivel az I pont A körüli $-90°$-os elforgatottja C, és szintén C-t kapjuk, ha F-et $90°$-kal forgatjuk B körül, így C az i egyenes A körüli $-90°$-os i^- elforgatottjának és az f egyenes B körüli $90°$-os f^+ elforgatottjának közös pontja. Az i, f egyenesek párhuzamosak, így i^- és f^+ egyállású, azaz párhuzamosak vagy egybeesnek. Távolságuk a velük párhuzamos AB egyenestől AT_I illetve BT_F. Ha ennek a két szakasznak a hossza nem egyenlő egymással, akkor nincs megoldás, ha egyenlő, akkor pedig végtelen sok van: C-t az $i^- = f^+$ egyenes bármelyik pontjának választhatjuk.

Megjegyzés az e) fel. megoldásához

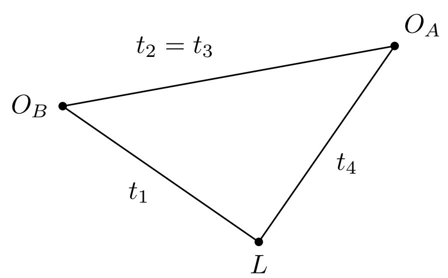
$T_IIA\angle = BAC\angle$ és $T_FFB\angle = ABC\angle$, hiszen mindkét esetben merőleges szárú szögekről van szó. Így az e) feladatban igazolt $AT_I = BT_F$ feltétel a T_IIA, T_FFB derékszögű háromszögek alapján a szokásos jelölésekkel: $b \sin\alpha = a \sin\beta$. Ez a szinusz-tétel egy formája.

f) I. megoldása

Tekintsük az O_B pont körüli 90°-os és az O_A pont körüli 90°-os forgatásokat és ezek

$$O_A^{90^\circ} \circ O_B^{90^\circ} \tag{3}$$

kompozícióját. A (3) jelölést jobbról kell olvasni: először az O_B körüli forgatást végezzük el. Az O_B pont körüli 90°-os elforgatás két olyan tengelyes tükrözéssel helyettesíthető, amely tengelyek egymást O_B-ben 45°-ban metszik. Pontosítás: az első tengelytől (t_1) a második tengelyig (t_2) mért irányított szög 45°-os. Vegyük fel ezt a két tengelyt úgy, hogy a második épp O_A-n menjen át. Az O_A körüli 90°-os elforgatást helyettesítő tengelyeket pedig úgy vegyük fel, hogy az első (t_3) menjen át O_B-n (lásd az 8. ábrát).



8. ábra.

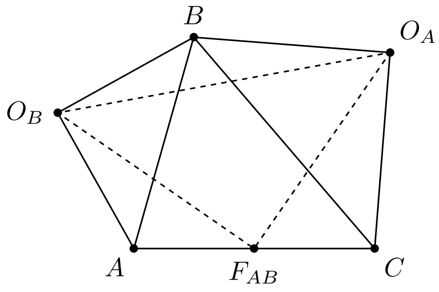
Az így kapott t_1, t_2, t_3, t_4 tengelyekkel

$$O_B^{90^\circ} \circ O_A^{90^\circ} = (t_4 \circ t_3) \circ (t_2 \circ t_1) = t_4 \circ (t_3 \circ t_2) \circ t_1 = t_4 \circ t_1, \tag{4}$$

tehát az eredő transzformáció a t_1, t_4 tengelyek L metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözés, hiszen e két tengely szöge 90°.

Az $O_A^{90^\circ} \circ O_B^{90^\circ}$ transzformációnál az AB csúcs képe B, hiszen $O_B^{90}(A) = C$, $O_A^{90}(C) = B$. A középpontos tükrözés középpontja tehát az AB szakasz F_{AB} felezőpontja (lásd az 9. ábrát).

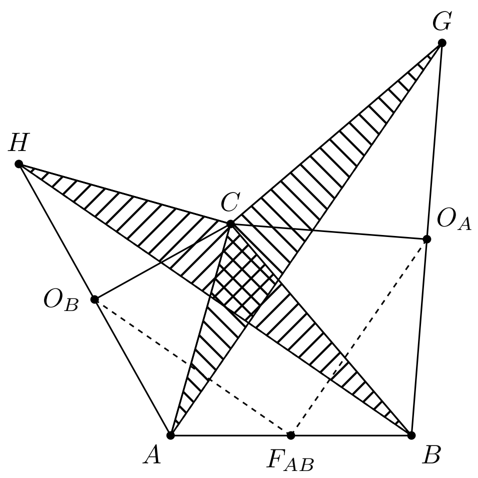
Gondolatmenetünk szerint az O_BF_{AB}, O_AF_{AB} egyenesek megegyeznek a korábbi t_1, t_4 tengelyekkel, melyek egymással bezárt szöge 90°, míg mindketten 45°-ban hajlanak az O_AO_B egyeneshez.



9. ábra.

f) II. megoldása

Nagyítsuk az O_BF_{AB} szakaszt az A csúcsból, az O_AF_{AB} szakaszt pedig a B csúcsból a kétszeresére. Az O_BF_{AB}, O_AF_{AB} szakaszok helyett képeik, a velük párhuzamos és kétszer akkora HB, GA szakaszokat vizsgáljuk (lásd a 10. ábrát).



10. ábra.

Az a), b) feladatokban látható módon az AG szakasz a BH szakasz C körüli $90°$-os elforgatottja, tehát egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra.

f) III. megoldása(*Vektorok*)

Használjuk az I. megoldás ábráját, de jelöljük be az AC, BC oldalak F_{AC}, F_{BC} felezőpontjait is! Azt fogjuk megmutatni, hogy az $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor derékszögű elforgatottja a $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor.

Vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{F_{AB}O_B} = \overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} + \overrightarrow{F_{AC}O_B},$$

ahol

$$\overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} = \overrightarrow{BF_{BC}} = \overrightarrow{F_{BC}O_A}^{90^\circ}$$

és

$$\overrightarrow{F_{AC}O_B} = \overrightarrow{AF_{AC}}^{90^\circ} = \overrightarrow{F_{AB}F_{BC}}^{90^\circ},$$

tehát

$$\overrightarrow{F_{AB}O_A}^{90^\circ} = \overrightarrow{F_{AB}F_{BC}}^{90^\circ} + \overrightarrow{F_{BC}O_A}^{90^\circ} = \overrightarrow{F_{AC}O_B} + \overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} = \overrightarrow{F_{AB}O_B}.$$

f) IV. megoldása (*Komplex számok*)

Legyen ABC pozitív körüljárású és helyezzünk egy komplex számsíkot az ábrára úgy, hogy C legyen az origója. Ha az A, B pontoknak az a, b komplex számok felelnek meg, akkor a H, I, O_B pontoknak rendre a

$$-ia, \qquad a + (-i)a, \qquad \frac{1-i}{2}a$$

komplex számok felelnek meg, ahol $i^2 = -1$, míg a G, F, O_A pontoknak rendre az

$$ib, \qquad b + ib, \qquad \frac{1+i}{2}b$$

számok felelnek meg. Az AB szakasz felezőpontjának megfelelő szám az $\frac{a+b}{2}$. Azt kell megmutatnunk, hogy az $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor 90°-os elforgatottja az $\overrightarrow{F_{AB}O_A}$ vektor, azaz hogy

$$i \cdot \left(\frac{1+i}{2}b - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{1-i}{2}a - \frac{a+b}{2}\right).$$

Így egyszerű számítással igazolható a geometriai összefüggés.

g) I. megoldása

Tekintsük az I körüli 45°-os és $\sqrt{2}$-szeres $I_{\sqrt{2}}^{45^\circ}$ forgatva nyújtást és az F körüli 45°-os és $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szeres $F_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{45^\circ}$ forgatva nyújtást. A két transzformáció τ eredőjéről három dolgot állapítunk meg:

- τ egy 90°-os forgatás;
- $\tau(J) = J$;
- $\tau(A) = B$.

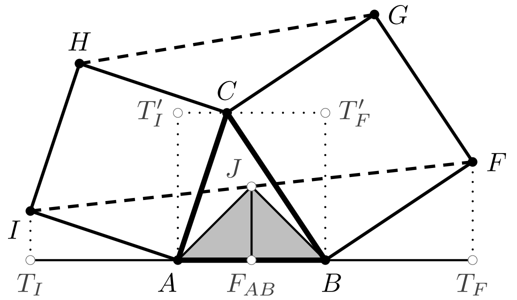
Az eredő transzformáció tehát egy J körüli 90°-os forgatás, amely A-t B-be viszi, így az AJB háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

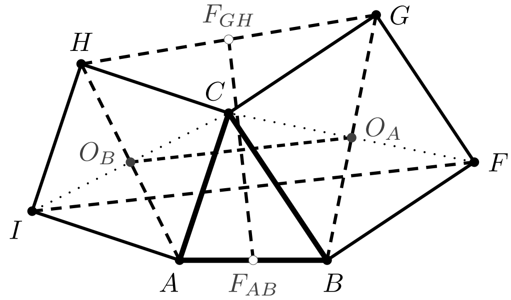
g) II. megoldása Az e) feladatot illetve annak megoldását hívjuk segítségül. A T_IT_FFI négyszög egy derékszögű trapéz. Ebben – épp az e)-ben láttuk – a T_IT_F szár felezőpontja az AB szakasz F_{AB} felezőpontja. Ezért a trapéz $F_{AB}J$ középvonala merőleges a T_IT_F szárra (lásd a 11. ábrát).

Még azt kell igazolnunk, hogy az $F_{AB}J$ középvonal hossza az AB oldal hosszának fele, tehát, hogy a T_II, T_FF alapok hosszának összege AB-val egyenlő. Alkalmazzuk az e) megoldásában használt forgatásokat. Az A körüli $-90°$-os forgatásnál az AT_II háromszög képe az $AT_I'C$ háromszög, míg a B körüli $90°$-os forgatásnál BT_FF képe $BT_F'C$, ahol az $ABT_F'T_I'$ négyszög téglalap, így

$$T_II + T_FF = T_I'C + T_F'C = AB.$$

Megjegyezzük, hogy előfordulhat, hogy a T_IT_FFI négyszög egy hurkolt trapéz és egyúttal C nem a $T_I'T_F'$ szakaszra, hanem annak meghosszabbítására esik. Előjeles szakaszokkal, az AB egyenestől való távolságot is előjelesen értelmezve ekkor is hasonlóan igazolható az állítás.





11. ábra.

g) III. megoldása(*Komplex számok*)

Az f) feladat komplex számos megoldását folytatva most az IF szakasz J felezőpontjának megfelelő komplex szám:

$$j = \frac{(1-i)a + (1+i)b}{2} = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b.$$

Itt azt kell igazolni, hogy a $\overrightarrow{JA}$ vektor $90°$-os elforgatottja a $\overrightarrow{JB}$ vektor, azaz, hogy

$$i \cdot \left(a - \frac{1-i}{2}a - \frac{1+i}{2}b\right) = \left(b - \frac{1-i}{2}a - \frac{1+i}{2}b\right),$$

ami beszorzással könnyen ellenőrizhető.

h) Az $ABGH$ négyszög középvonalai paralelogrammát határoznak meg. Esetünkben ez a paralelogramma négyzet, hiszen az O_AF_{AB}, O_BF_{AB} középvonalak egyenlőek és merőlegesek egymásra. A négyzet $F_{AB}F_{GH}$, O_AO_B átlói egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek. Az IJ szakasz párhuzamos és kétszer akkora, mint az O_AO_B szakasz (középvonal a CIF háromszögben), így az állítás igazolást nyert.