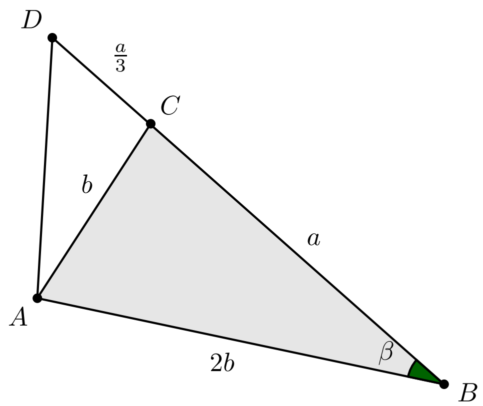
2. foglalkozás
Az előző szemináriumon

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/Laczko_Laszlo/szeminarium/2013/2013pub01.pdf

Laczkó László tanár úr gyűjtését láthattuk – egyetlen feladatra adott 7 megoldást. Alább egy másik feladat 9 megoldását olvashatjuk Laczkó tanár úr elmesélésében. Az elektronikus változat Kiss Géza tanár úr munkája.

2. feladat: *Az ABC háromszögben $AB = 2 \cdot AC$. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt a C-n túl a BC oldal harmadával, így kapjuk a D pontot. Igazoljuk, hogy $AD = 2 \cdot CD$.*

1. megoldás: „*Használjuk a cosinus-tételt!*"
Az ABC és ABD háromszögekben a B csúcsnál elhelyezkedő β szög közös. Írjuk fel a cosinus-tételt az ABC háromszögben az AC oldalra, az ABD háromszögben az AD oldalra!



$$AD^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 + 4b^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}a \cdot 2bcos\beta,$$
$$b^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab \cdot cos\beta.$$

Most az első egyenletet $\frac{3}{4}$-del szorozva, majd a két egyenlet megfelelő oldalait kivonva a szögfüggvényt tartalmazó tagot eliminálhatjuk.

$$\frac{3}{4}AD^2 = \frac{4}{3}a^2 + 3b^2 - 4ab \cdot cos\beta,$$

$$b^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab \cdot cos\beta.$$

$$\frac{3}{4}AD^2 - b^2 = \frac{1}{3}a^2 - b^2,$$

Innen már látjuk, hogy

$$AD^2 = \frac{4}{9}a^2,$$
$$AD = \frac{2}{3}a.$$

2. megoldás: „*Használjuk más formában a cosinus-tételt!*"

Az előző ábra jelöléseivel $BCA\angle$ és $ACD\angle$ mellékszögek. Az ABC háromszög AB oldalára és az ACD háromszög AD oldalára felírva a cosinus-tételt:

$$4b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma,$$
$$AD^2 = \frac{1}{9}a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab \cdot cos(180° - \gamma) = \frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab \cdot cos\gamma).$$

Most $\frac{1}{3}$-dal szorozzuk az első egyenletet

$$\frac{4}{3}b^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}ab \cdot cos\gamma.$$

Ezután a két egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk.

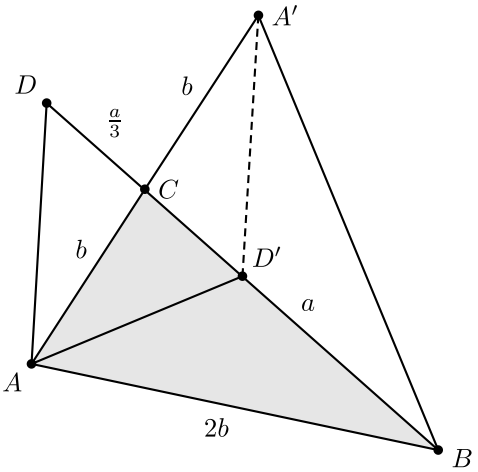
$$AD^2 + \frac{4}{3}b^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3}b^2,$$

ahonnan már látjuk, hogy

$$AD = \frac{2}{3}a.$$

3. megoldás: „*Egyenlő szárú háromszög súlypontja*"

Tükrözzük az AD szakaszt a C pontra, kapjuk az ábra szerinti A' és D' pontokat.



A középpontos tükrözés távolságtartó, tehát $AD = A'D'$, továbbá $AC = b$ miatt, $AA' = 2b$, azaz a BAA' háromszög egyenlő szárú. Ennek a háromszögnek az AA' oldalhoz tartozó súlyvonala éppen BC, amelyen a megjelölt D' pont a felezőponthoz közelebbi harmadolópont, így a BAA' háromszög súlypontja. A BAA' háromszög egyenlő szárú, ezért az AB és AA' oldalakhoz tartozó súlyvonalak, s ennek megfelelően azok kétharamada is egyenlő hosszúságú:

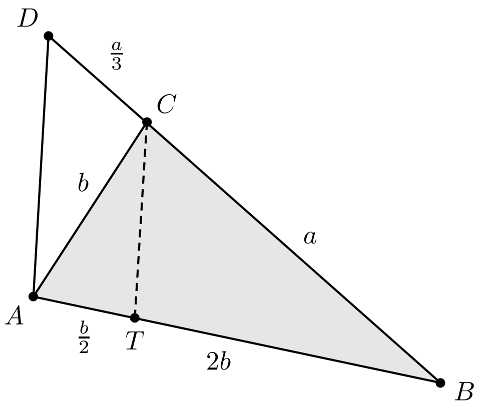
$$AD = A'D' = D'B = \frac{2}{3}a.$$

4. megoldás: „*A szögfelező tulajdonsága*"

Az előző megoldás ábrája szerint legyen D' pont a D pont C-re vonatkozó tükörképe, mely egyben a CB szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja is. Az ABC háromszög AC oldala éppen feleakkora, mint az AB oldal. A szögfelező-tétel alapján tudjuk, hogy a belső szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja ketté; az A-hoz tartozó szögfelező tehát harmadolja a szemközti CB oldalt. Ezzel beláttuk, hogy az AD' szakasz az ABC háromszög A-hoz tartozó szögfelezője. Jelöljük F-fel az $AB = 2b$ oldal felezőpontját. A CAF háromszög egyenlő száúr, amelynek az AD' így nemcsak szögfelezője, hanem felezőmerőleges is. A C és F pontok egyenlő távolságra vannak D'-től, $CD' = D'F = \frac{1}{3}a$. Másrészt FD' az ABD háromszög középvonala is, hisezn F felezőpont, a harmadolás és a tükrözés miatt pedig $BD' = D'D = \frac{2}{3}a$. A középvonal hossza fele a párhuzamos háromszög oldalnak, tehát $AD = \frac{2}{3}a$.

5. megoldás: „*Használjuk ki háromszögek hasonlóságát!*"

Ez a megoldás talán a legötletesebb az összes közül. Egy megfelelő pont ügyes berajzolásával azonnal két hasonló háromzöget látunk, majd vagy hasonlóság, vagy párhuzamos szelők tételének alkalmazásával be is fejezhető a bizonyítás. Az eredeti háromszögben vegyük az AB szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontját és jelöljük T-vel.



Az ACT háromszögben $CAT\angle = CAB\angle = \alpha$ és $\frac{CA}{AT} = \frac{AB}{CA} = 2$. Az CAT és BAC háromszögekben két-két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik, a két háromszög hasonló. Azt is kaptuk, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, így $CT = \frac{a}{2}$.

Végül az ABD háromszögben T az AB oldal, C pedig a DB oldal negyedelőpontja. Tekinthetjük úgy, hogy az ADB háromszöget a B pontból középpontosan a $\frac{3}{4}$-ére kicsinyítettük,

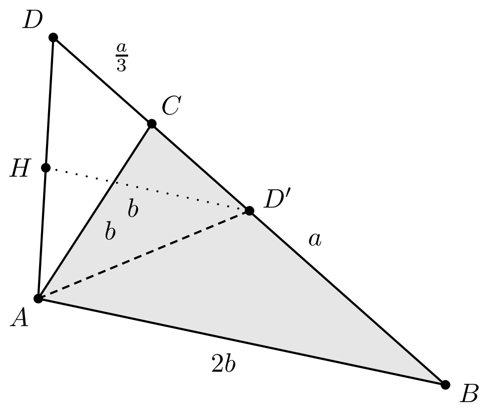
$$CT = \frac{3}{4}AD,$$

illetve

$$AD = \frac{4}{3}CT = \frac{4}{3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{2}{3}a.$$

6. megoldás: „*Egyenlő hosszúságú súlyvonalak*"

A jelölések továbbra is legyenek az eddigieknek megfelelők és jelöljük az AD szakasz felezőpontját H-val. Ábránkon csak a jelenlegi megoldáshoz szükséges adatok vannak feltüntetve.



Az ABD háromszögben HD' középvonal, mégpedig az AB oldallal párhuzamos középvonal, tehát hossza éppen b. Az ADD' háromszögben látjuk, hogy az AD és DD' oldalakhoz tartozó súlyvonalak egyenlő hosszúak (mindkettő b), tehát ez a háromszög egyenlő szárú.

$$AD = DD' = \frac{2}{3}a.$$

7. megoldás: „*Két háromszögre írjuk fel a súlyvonalra vonatkozó összefüggést!*"

Ismert, és az órai munkában is rendszeresen használjuk, hogy a háromszög súlyvonalának hosszát kifejezhetjük a háromszög oldalainak hosszával a paralelogramma-tétel segítségével. Pl.:

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Ennek felhasználásával, eddigi jelöléseinket megtartva, tudjuk, hogy az ABD háromszög BD oldalhoz tartozó súlyvonala AD', míg ADD' háromszög DD'-höz tartozó súlyvonala AC. Ezek alapján

$$AD'^2 = \frac{8b^2 + 2 \cdot AD^2 - \frac{16}{9}a^2}{4},$$

$$AC^2 = b^2 = \frac{2 \cdot AD'^2 + 2 \cdot AD^2 - \frac{4}{9}a^2}{4}.$$

Küszöböljük ki az AD'^2-et. Az első egyenletből

$$2 \cdot AD'^2 = 4b^2 + AD^2 - \frac{8}{9}a^2.$$

Ezt most beírhatjuk a második egyenletbe.

$$4 \cdot b^2 = 4b^2 + AD^2 - \frac{8}{9}a^2 + 2 \cdot AD^2 - \frac{4}{9}a^2,$$

$$3 \cdot AD^2 = \frac{12}{9}a^2,$$

$$AD = \frac{2}{3}a.$$

8. megoldás: „*Alkalmazzuk a Stewart-tételt.*"

A Stewart-tétel az általános ABC háromszög BC oldalán felvett tetszőleges A' ponttal kapcsolatban ad összefüggést, kifejezi az $AA' = d$ szakasz hosszát az $AB = c$, $AC = b$, $BA' = p$, $A'C = q$ (tehát $p + q = BC = a$) mennyiségek ismeretében. A korábbi 2. megoldás is ennek a tételnek egy speciális esetét jelenti.

Írjuk fel az $AA'B$, $AA'C$ háromszögekre a cosinus-tételt az $AA'B = \varphi$, $CA'A = 180° - \varphi$ szögekkel! Ha felhasználjuk a

$$-\cos\varphi = \cos(180° - \varphi)$$

összefüggést is, akkor a

$$\begin{aligned} c^2 &= p^2 + d^2 - 2pd\cos\varphi, \\ b^2 &= q^2 + d^2 + 2qd\cos\varphi, \end{aligned}$$

összefüggésekhez jutunk. Az első egyenlet q-szeresének és a második p-szeresének összegéből kiesik $\cos\varphi$ és kifejezhetővé válik az oldalakkal d^2:

$$d^2 = \frac{c^2q + pb^2 - p^2q - pq^2}{p+q} = \frac{q}{a}c^2 + \frac{p}{a}b^2 - pq.$$

Ez a Stewart-tétel.

Használjuk most ezt az általános tételt az ABD háromszögben az AC transzverzális hosszának kiszámítására.

$$b^2 = \frac{3}{4} \cdot AD^2 + \frac{1}{4} \cdot 4b^2 - \frac{a^2}{3},$$

$$\frac{a^2}{3} = \frac{3}{4} AD^2,$$

$$AD^2 = \frac{4}{9} a^2,$$

$$AD = \frac{2}{3} a.$$

9. megoldás: „*Alkalmazzunk komplex számokat!*"

Tekintsük síkunkat komplex számsíknak, melynek origója az A pontban van, a C pont a z komplex számnak felel meg, míg a $CAB\sphericalangle$ irányított szög az ϵ egységnyi komplex szám argumentumával egyezik meg.

Ekkor a B pont a $2\epsilon z$ komplex számnak felel meg és

$$C - B = z - 2\epsilon z = (1 - 2\epsilon) z,$$

amiből

$$D - C = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \epsilon \right) z,$$

továbbá

$$D = C + (D - C) = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \epsilon \right) z.$$

Az AD, DC szakaszok hosszát szeretnénk összehasonlítani. Komplex szám abszolút értékének négyzete a szám és konjugáltjának szorzata. Ha figyelembe vesszük még azt is, hogy egységnyi komplex szám konjugáltja, a saját reciproka, tehát $\epsilon \cdot \overline{\epsilon} = 1$, akkor az

$$|AD|^2 = D \cdot \overline{D} = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} \left(\epsilon + \overline{\epsilon} \right),$$

$$|CD|^2 = (D - C) \cdot \overline{D - C} = \frac{5}{9} - \frac{2}{9} \left(\epsilon + \overline{\epsilon} \right).$$

Ebből

$$\frac{|AD|^2}{|CD|^2} = 4, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{AD}{CD} = 2.$$

Máshogy is eljuthatunk ehhez az eredményhez. Szorozzuk a $D - C$ számot a két egység hosszúságú $-2\overline{\epsilon}$ számmal!

$$-2\overline{\epsilon}(D - C) = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \overline{\epsilon} \right) z = \overline{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \epsilon \right)} z.$$

A kapott komplex szám abszolút értéke megegyezik D abszolút értékével, tehát $2|CD| = |AD|$.