1. foglalkozás

Ezen a tanári szemináriumon és a következőn Laczkó László tanár úr egy-egy geometria feladat lehetséges megoldási módozatait ismertette, ahhoz hasonlóan, ahogy remek „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül” oktatási anyagában

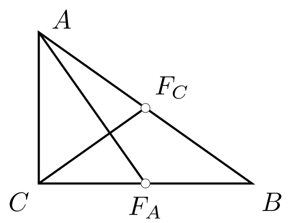
`http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Laczko_Laszlo/geoism/geoism.html`

tizenkilenc megközelítést mutatott egyetlen problémára. A két feladatra adott tanulói megoldások száma tanítása során folyamatosan növekedett. A megoldások változatossága érzékletesen mutatja a gyerekek egyedi gondolkodásmódját. Általában is igaz, hogy az egy feladatra adott több megoldás a feladat lényegét változatosan, lehető legtöbb oldalról világítja meg. Órai megbeszélésük az egyes geometriai tételek kapcsolatát, a feltételek lehetséges kihasználási változatait és még további módszertani előnyöket is hordozhat. A megoldásokat Hraskó tanár úr továbbiakkal egészítette ki és az elektronikus változatot is ? hozta létre.

1. feladat *Oldalai szerint milyen az a derékszögű háromszög, amelyben az átfogóhoz tartozó súlyvonal merőleges a háromszög egy másik súlyvonalára?*

Jelölés

Az alábbi megoldásokban a háromszög csúcsait A, B, C jelöli, $ACB\angle = 90°$, az AB átfogó illetve a BC befogó felezőpontja F_C illetve F_A és $AF_A \perp CF_C$, a CB, CA oldalak hossza rendre a és b.



1. megoldás: *„Vektorok skaláris szorzata"*

Az $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$ jelölésekkel $\underline{a} \perp \underline{b}$, tehát $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$. Mivel $\overrightarrow{CF_C} = \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$ és $\overrightarrow{AF_A} = \frac{1}{2}\underline{a} - \underline{b}$, így az $CF_C \perp AF_A$ feltétel algebrai alakja:

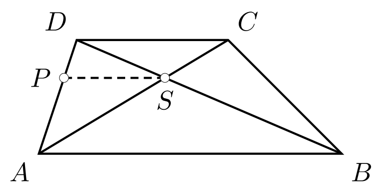
$$0 = \left(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\underline{a} - \underline{b}\right) = \frac{1}{4}\underline{a}^2 - \frac{1}{2}\underline{b}^2.$$

Ebből $a = \sqrt{2}b$, azaz a háromszög oldalainak aránya:

$$AC : BC : AB = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

2. megoldás: *„Trapéz speciális szakasza”*

Tekintsük egy tetszőleges $ABCD$ trapézt ($AB \parallel CD$) és abban az AC, BD átlók S metszéspontján át az alapokkal párhuzamos egyenest. Messe az az AD szárt P pontban. Szeretnénk meghatározni a PS szakasz hosszát az $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ oldalak ismeretében.



Az SAB, SCD háromszögek egymáshoz hasonlóak, így

$$\frac{AS}{SC} = \frac{BS}{SD} = \frac{a}{c}.$$

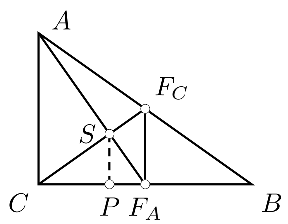
Másrészt az APS, ADC háromszögek is hasonlóak egymáshoz, így

$$\frac{PS}{CD} = \frac{AS}{AC}.$$

Mivel $AC = AS + SC$ és $\frac{AS}{SC} = \frac{a}{c}$, így fent $\frac{AS}{AC} = \frac{a}{a+c}$, amiből

$$PS = \frac{ac}{a+c}.$$

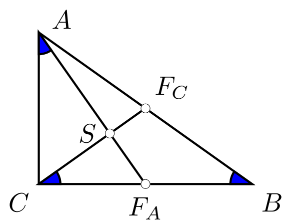
Alkalmazzuk ezt az eredményt feladatunkban az CAF_CF_A trapézra!



Mivel $AC = b$ és $F_CF_A = \frac{1}{2}b$, így $PS = \frac{1}{3}b$. Másrészt $CF_A = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a$ és $\frac{CP}{PF_A} = \frac{AS}{SF_A} = \frac{CA}{F_CF_A} = \frac{2}{1}$, így $CP = \frac{1}{3}a$, $PF_A = \frac{1}{6}a$. Az AF_A, CF_C súlyvonalak pontosan akkor merőlegesek egymásra, tehát a CSF_A háromszög pontosan akkor derékszögű, ha benne az SP magasságvonalra teljesül a magasságtétel, azaz $SP^2 = CP \cdot PF_A$. Ebbe behelyettesítve korábbi eredményeinket: $\frac{1}{9}b^2 = \frac{1}{18}a^2$, azaz $\sqrt{2}b = a$.

3. megoldás: „*Thalesz-tétel és hasonlóság*"

A Thalesz-tétel szerint $CF_C = F_CA$, így $F_CCB\angle = F_CBC\angle$. Mivel $CB \perp CA$ és $CF_C \perp AF_A$, így $F_CCB\angle = F_AAC\angle$, hiszen merőleges szárúak.

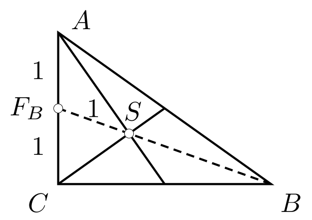


Ebből következik, hogy $F_AAC\angle = F_CBC\angle$, tehát az F_ACA, ACB derékszögű háromszögek hasonlóak:

$$\frac{CF_A}{CA} = \frac{AC}{CB}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{a/2}{b} = \frac{b}{a},$$

tehát $a = \sqrt{2}b$.

4. megoldás: „*Thalesz-tétel ASC-re*”
A feltételek hasonlóság erejéig invariánsak, feltehetjük tehát, hogy $AC = 2$. Thalesz tétele és annak megfordítása szerint az ASC háromszög pontosan akkor derékszögű, ha az AC szakasz F_B felezőpontjára $SF_B = 1$.

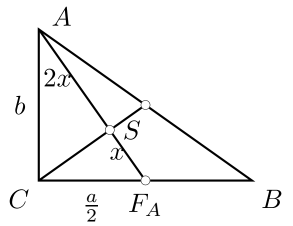


Mivel S a háromszög súlypontja, ami harmadolja a súlyvonalakat, így $BF_B = 3$, tehát a BCF_B derékszögű háromszögben

$$b^2 = AC^2 = F_BB^2 - F_BC^2 = 3^2 - 1^2 = 8.$$

Innen azonnal kapjuk, hogy az általános esetben $\frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$.

5. megoldás: „*Befogó tétel kétszer*”
Legyen $F_AS = x$. Az S súlypont harmadolja a súlyvonalakat, tehát $SA = 2x$ és $AF_A = 3x$.
Az ACF_A derékszög? háromszögben CS magasságvonal. Alkalmazzuk a befogótételt mind a két lehetséges módon erre a háromszögre!

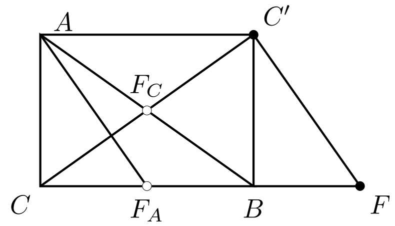


$$\frac{1}{2}a = \sqrt{x \cdot 3x},$$
$$b = \sqrt{2x \cdot 3x}.$$

E két egyenlet hányadosából $a = \sqrt{2}b$.

6. megoldás „*Középpontos tükrözés az oldalfelezőpontra, majd magasságtétel*"

Ha az ABC háromszöget középpontosan tükrözzük az F_C pontra. akkor az $ACBC'$ téglalaphoz jutunk. Húzzuk meg C'-ből az AF_A-val párhuzamos és egyenlő $C'F$ szakaszt, ahol F a CB egyenes megfelelő pontja.



A $CC'F$ háromszög C'-nél derékszögű, hiszen CC' és $C'F$ egyállásúak a CF_C, AF_A súlyvonalakkal. A CF átfogóhoz tartozó magasságvonal a CB-vel párhuzamos BC' szakasz. A magasságtétel szerint

$$b^2 = C'C^2 = CB \cdot BF = CB \cdot CF_A = a \cdot \frac{1}{2}a,$$

amiből $a = \sqrt{2}b$.S

7. megoldás „*Komplex számok*"

Legyen komplex számsíkunk origója C, feleljen meg az A, B csúcsoknak az a, $b = -\lambda i a$ komplex szám, ahol λ valós mennyiség.

Ekkor

$$F_C = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(1 - \lambda i)a,$$

és

$$A - F_A = a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(2 + \lambda i)a,$$

tehát

$$\frac{A - F_A}{F_C} = \frac{2 + \lambda i}{1 - \lambda i} = \frac{(2 + \lambda i)(1 + \lambda i)}{(1 - \lambda i)(1 + \lambda i)} = \frac{(2 - \lambda^2) + i(3\lambda)}{2}.$$

Az AF_A, CF_C egyenesek pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az előbb kapott mennyiség tisztán képzetes, azaz $(2 - \lambda^2) = 0$. Azt kaptuk, hogy $\lambda = \sqrt{2}$, azaz $|BC| = \sqrt{2}|AC|$.