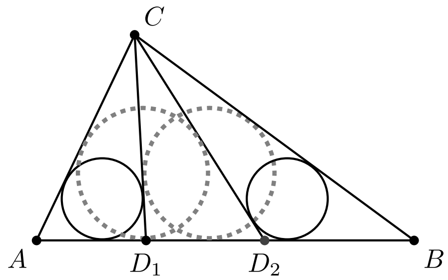
2013 év elején egy ideig Homonnay Bálint és Kabos Eszter hoztak nehéz vegyes feladatokat a 11.c-be és vezették le a példamegbeszéléseket. Az alábbi példát Homonnay Bálint egy korábbi OKTV döntő példasorából kölcsönözte. A feladat elemzése a tanórán és a tanári szemináriumon is gyümölcsözőnek bizonyult.

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszög AB oldalán felvett D_1, D_2 pontokra az ACD_1, BCD_2 háromszögekbe írt körök egyenlő sugarúak, akkor a BCD_1, ACD_2 háromszögek beírt körei is egyenlő sugarúak!



I. megoldás

Legyen D az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges pontja és tekintsük az o_a, u_a, o_b, u_b köröket, amelyek mindegyike érinti az AB oldalt és a CD egyenest és az első kettő még a CA egyenest is, az utoldó kettő pedig a CB egyenest is érinti az ábra szerint. Legyen ezen körök középpontja rendre O_A, U_A, O_B, U_B sugara r_A, ρ_A, r_B és ρ_B az AB oldallal való érintési pontja T_A, V_A, T_B, V_B.

Ha az ABC háromszög A-nál illetve B-nél fekvő belső szögének fele α illetve β, akkor $AU_AV_A\angle = \alpha$, $BU_BV_B\angle = \beta$. Az ACD háromszög beírt köre o_a az AD oldalhoz hozzáírt köre u_a, így $DT_A = AV_A$ és ehhez hasonlóan $DT_B = BV_B$.

Vegyük észre, hogy az U_AAV_A, O_ADT_A derékszögű háromszögekben $AV_A = \rho_A \cdot tg\alpha$ és $DT_A = \frac{r_A}{tg\delta_1}$, ahol $\delta_1 = O_ADA\angle$ és ehhez hasonlóan az U_BBV_B, O_BDT_B derékszögű háromszögekben $BV_B = \rho_B \cdot tg\beta$ és $DT_B = \frac{r_B}{tg\delta_2}$, ahol $\delta_2 = O_BDB\angle = 90° - \delta_1$. Mindezek alapján

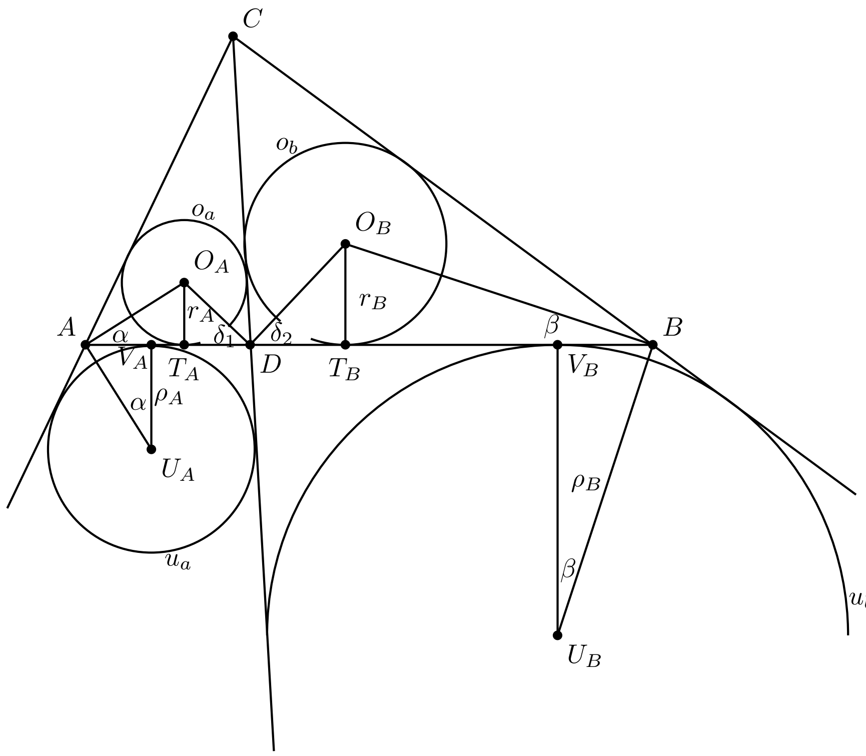
$$\rho_A\rho_B \cdot tg\alpha tg\beta = r_Ar_B. \tag{1}$$

Ha felveszünk az AB oldalon egy D' pontot is, akkor az ahhoz a fenti módon tartozó négy körre

$$\rho'_A\rho'_B \cdot tg\alpha tg\beta = r'_Ar'_B. \tag{2}$$

A feladat feltevése szerint $r_A = r'_B$. Az o_a, o'_b körök AB-vel párhuzamos, de AB-tól párhuzamos érintője a C pontból az AB egyenesbe nagyítható. Ennél a nagyításnál az o_a, o'_b körök képe szükségképpen az u_a és az u'_b kör lesz. ha tehát az előbbiek egyenlő sugarúak – $r_A = r'_B$ –, akkor az utóbbiak is: $\rho_A = \rho'_B$. Az (1), (2) egyenletek hányadosából ilyenkor

$$\frac{\rho_B}{r_B} = \frac{\rho'_A}{r'_A}. \tag{3}$$



A (3) összefüggés azt fejezi ki, hogy van egy olyan C centrumú nagyítás, amely az o'_a, o_b köröket rendre az u'_a, u_b körökbe viszi. Ennél a nagyításnál az o'_a, o_b körök közös AB érintője önmagával párhuzamos egyenesbe, egyúttal u'_a és u_b közös érintőjébe képződik. Ez azt jelenti, hogy u'_a és u_b sugara egyenlő, tehát o'_a és o_b is egyenlő sugarú. Ezt kellett igazolnunk.

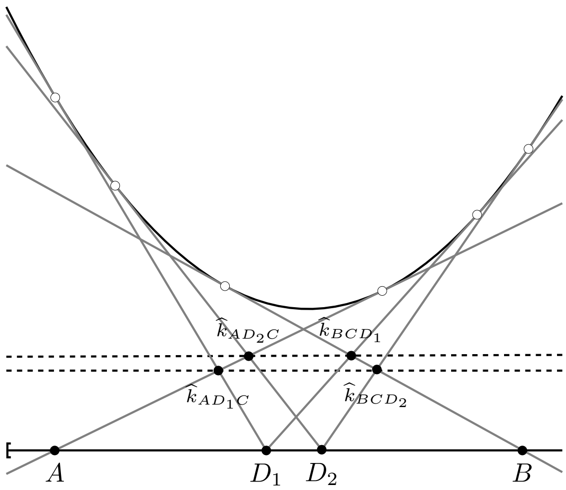
II. megoldás (*Lépjünk ki a térbe*)

Dolgozzunk irányított egyenesekkel és körökkel! Legyen a Σ sík ABC háromszöge pozitív körüljárású és tekintsük az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ irányított egyeneseket (nem vektorokat) valamint a $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{D_1C}$, $\overrightarrow{CD_2}$, $\overrightarrow{D_2C}$ irányított egyeneseket is. Képzeljük az ABC háromszög i beírt körét pozitívan irányítottnak csakúgy, mint az AD_1C, BCD_2, BCD_1, AD_2C háromszögek k_{AD_1C}, k_{BCD_2}, k_{BCD_1}, k_{AD_2C} beírt köreit. Az irányított köröknek megfeleltethetünk egy-egy térbeli pontot, amely a kör középpontjában az alapsíkra merőlegesen állított egyenesen az alapsíktól sugárnyi távolságra van olyan irányban, hogy onnan visszanézve az irányított kör pozitív irányítású. A k_{AD_1C}, k_{BCD_2}, k_{BCD_1}, k_{AD_2C} irányított körökhöz ilymódon rendelt pontokat rendre $\widehat{k}_{AD_1C}$, $\widehat{k}_{BCD_2}$, $\widehat{k}_{BCD_1}$, $\widehat{k}_{AD_2C}$ jelöli.

Egy adott irányított egyenest – az irányításoknak megfelelően – érintő irányított körökhöz rendelt pontok egy olyan síkban helyezkednek el, amely tartalmazza az adott egyenest és a Σ alapsíkkal $45°$-os szöget zár be. (Két ilyen sík van, az egyik az adott egyenes egyik irányításának, a másik a másik irányításának felel meg.) A feladatban szereplő körök mind érintik az $\overrightarrow{AB}$ irányított egyenest, a feladatot is az AB-t tartalmazó a Σ síkkal $45°$-os szöget bezáró megfelelő $\Pi_{\overrightarrow{AB}}$ síkban oldjuk meg.

A C ponton átmenő irányított egyenesekhez a fenti módon rendelt $\Sigma_{\overrightarrow{CA}}$, $\Sigma_{\overrightarrow{BC}}$, $\Sigma_{\overrightarrow{CD_1}}$, $\Sigma_{\overrightarrow{D_1C}}$, $\Sigma_{\overrightarrow{CD_2}}$, $\Sigma_{\overrightarrow{D_2C}}$ síkok mind érintenek egy olyan $45°$-os félnyílásszögű $\mathcal{C}$ egyenes körkúpot, amelynek csúcsa C és forgástengelye merőleges a Σ alapsíkra.

A $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$ alakzat egy parabola, míg a $\widehat{CA} = \Sigma_{\overrightarrow{CA}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$, $\widehat{BC} = \Sigma_{\overrightarrow{BC}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$, $\widehat{CD_1} = \Sigma_{\overrightarrow{CD_1}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$, $\widehat{D_1C} = \Sigma_{\overrightarrow{D_1C}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$, $\widehat{CD_2} = \Sigma_{\overrightarrow{CD_2}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$, $\widehat{D_2C} = \Sigma_{\overrightarrow{D_2C}} \cap \Pi_{\overrightarrow{AB}}$ egyenesek a $\mathcal{P}$ parabola érintői.



Azt a tényt, hogy a AD_1C, BCD_2, BCD_1, AD_2C háromszögek beírt köre k_{AD_1C}, k_{BCD_2}, k_{BCD_1}, k_{AD_2C} a $\Pi_{\overrightarrow{AB}}$ síkban az fejezi ki, hogy $\widehat{CA} \cap \widehat{D_1C} = \widehat{k}_{AD_1C}$, $\widehat{BC} \cap \widehat{CD_2} = \widehat{k}_{BCD_2}$, $\widehat{BC} \cap \widehat{CD_1} = \widehat{k}_{BCD_1}$, $\widehat{CA} \cap \widehat{D_2C} = \widehat{k}_{AD_2C}$.

Az a tény, hogy a k_{AD_1C}, k_{BCD_2} körök egyenlő sugarúak annak felel meg, hogy a $\widehat{k}_{AD_1C}\widehat{k}_{BCD_2}$ egyenes párhuzamos az AB egyenessel.

Alkalmazzuk Brianchon tételét a $\mathcal{P}$ parabolára és az

$$\widehat{CA}, \widehat{D_1C}, \widehat{CD_1}, \widehat{BC}, \widehat{CD_2}, \widehat{D_2C}$$

érintőkből ebben a sorrendben alkotott érintőhatszögre.

A tétel ebben az esetben azt mondja ki, hogy a

$$\widehat{k}_{AD_1C}\widehat{k}_{BCD_2}, \qquad D_1D_2 = AB, \qquad \widehat{k}_{BCD_1}\widehat{k}_{AD_2C}$$

egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Mivel esetünkben az első két egyenes párhuzamos, így a harmadik is párhuzamos velük, ami épp ezt fejezi ki, hogy a BCD_1, AD_2C háromszögekbe írt körök sugara egyenlő.

III. megoldás (*Érintőnégyszögek*)

Emlékeztetünk egy lemmára, amelyről egy korábbi szemináriumon Fazakas Tünde beszélt.

I. Lemma Legyenek az O_1 pontban metsző a_1, c_1 és az O_2-ben találkozó a_2, c_2 egyenesek metszéspontjai

$$A = a_1 \cap a_2, \quad B = a_1 \cap c_2, \quad C = c_1 \cap c_2, \quad D = c_1 \cap a_2.$$

Tegyük még fel, hogy B az AO_1 szakasz, D pedig az AO_2 szakasz belső pontja és C a BO_2, DO_1 szakaszok belső pontja. Az $ABCD$ négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha B és D ugyanarra az O_1, O_2 fókuszokkal rendelkező ellipszisre illeszkednek.

Az I. Lemma egyszerű következménye az alábbi összefüggés.

II. Lemma Ha az a_1, c_1, f_1 egyenesek közös metszéspontja O_1, míg az a_2, c_2, f_2 egyeneseké O_2 és az

$$a_1, \quad f_1, \quad f_2, \quad c_2$$

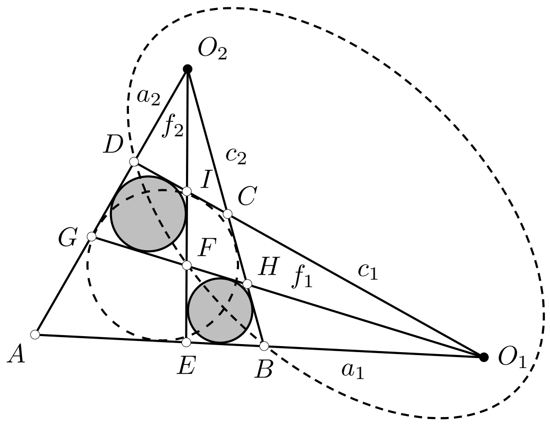
egyenesek határolta négyszögbe írható kör valamint az

$$c_1, \quad f_1, \quad f_2, \quad a_2$$

egyenesek határolta négyszögbe is írható kör, akkor az

$$a_1, \quad c_1, \quad a_2, \quad c_2$$

egyenesek alkotta négyszögbe is írható kör.



Röviden: ha egy négyszöget a szemköztes oldalegyeneseinek metszéspontján átmenő egy-egy egyenessel négy részre osztunk és a két átellenesbe írható kör, akkor az eredeti négyszögbe is írható kör.

Részletesen lásd Kubatov Antal „Azok a csodálatos érintőnégyszögek” című írásában a 10., 12. feladatokat.

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/erinto/erintof.html

A feladatunkban kitűzött állítás helyett a következő tételt igazoljuk:

Tétel

Ha a D_1, D_2 pontok az ABC háromszög AB oldalának belső pontjai, akkor a CAD_1, BCD_2 háromszögek beírt köreinek külső hasonlósági pontja megegyezik a CAD_2, BCD_1 háromszögek beírt köreinek külső hasonlósági pontjával.

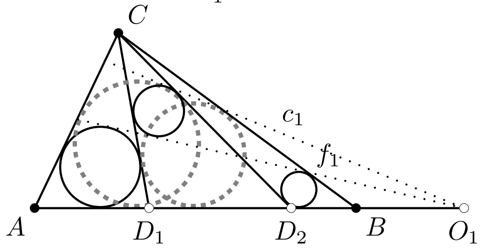
Bizonyítás (*Kvant*)

Jelölje a CAD_1, BCD_2 háromszögek beírt köreinek külső hasonlósági pontját O_1. Ebből a pontból a két körhöz húzott egyik közös érintő az $a_1 = AB$ egyenes;

húzzuk be a másikat is, legyen ez f_1. Rajzoljuk meg az f_1, CD_1, CD_2 egyenesek határolta háromszög beírt körét is és húzzuk meg annak az O_1-ből induló másik – f_1-től különböző – c_1 érintőjét.

Alkalmazzuk a 2. Lemmát az egymást O_1-ben metsző $AB = a_1$, f_1, c_1 egyenesekre valamint a C-ben találkozó CD_1, CD_2, CB egyenesekre!

Kapjuk, hogy az a_1, c_1, CB, CD_1 egyenesek határolta négyszögbe írható kör, azaz BCD_1 beírt körét érinti c_1.

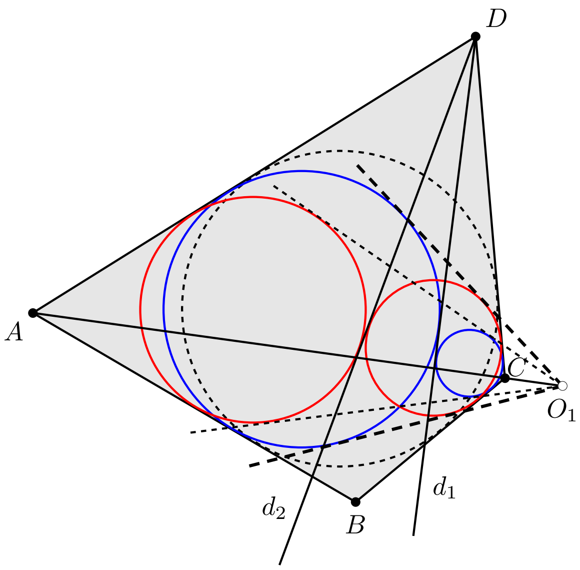


Alkalmazzuk most a 2. Lemmát ugyanezekre az O_1-ben metsző egyenesekre valamint a C-ben találkozó CD_1, CD_2, CA egyenesekre! Kapjuk, hogy az a_1, c_1, CA, CD_2 egyenesek határolta négyszögbe írható kör, azaz ACD_2 beírt körét is érinti c_1.

Az $a_1 = AB$ és a c_1 egyenesek tehát az ACD_2, BCD_1 háromszögek beírt köreinek közös külső érintői, azaz $a_1 \cap c_1 = O_1$ valóban e két kör hasonlósági pontja. A Tétel igazolást nyert.

Gondolkodnivaló (*Kvant*)

A háromszögből négyszöget csinálunk! Az alábbi ábrán az $ABCD$ érintőnégyszög látható, amelyet két-két részre vágtunk a D csúcson átmenő d_1, d_2 egyenesekkel.



Bizonyítsuk be, hogy az AB, AD, d_1 egyenesek által határolt háromszög beírt körének és a d_2, CB, CD egyenesek határolta háromszög beírt körének külső hasonlósági pontja egybeesik az AB, AD, d_2 egyenesek alkotta háromszög és az AB, AD, d_1 egyenesek határolta háromszögek beírt köreinek külső hasonlósági pontjával, és ez a pont illeszkedik az AC átló egyenesére!