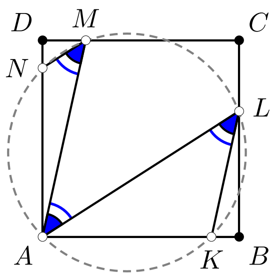
4. foglalkozás

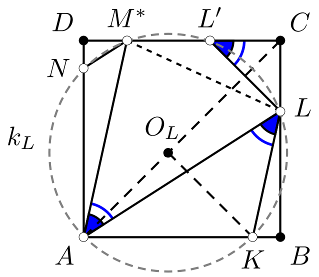
A KöMaL B. 4474. feladatra[1] sok szép megoldást hoztak Gyenes Zoltán diákjai, a 9.c osztály tanulói. A példához nagyon hasonló kérdéssel a 2011/12 tanévi 4. szemináriumon foglalkoztunk[2] Ezért a Kömal példát is afelé visszük, alább a következőképpen módosítjuk:

Feladat Az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és DA oldalain vegyük fel rendre a K, L, M és N pontokat úgy, hogy $KLA\angle = LAM\angle = AMN\angle = 45°$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a K, L, M, N és A pontok egy körön vannak.

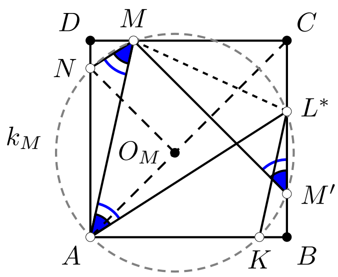


I. megoldás

Tekintsük az $AKL\triangle$ háromszög k_L körülírt körét, a kör középpontját jelölje O_L. A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AO_LK\angle = 2 \cdot ALK\angle = 90°$, és mivel az $AO_LK\triangle$ háromszög egyenlő szárú, így $KAO_L\angle = 45°$, tehát az O_L pont rajta van az AC átlón, így a kör szimmetrikus az AC. átlóra. Messe a kör tehát a négyzet CD oldalát az L pont AC átlóra való tükörképében, az L' pontban, továbbá az M^* pontban.



Az AK szakasz 45°-os látóköre k_L



Az AN szakasz 45°-os látóköre k_M

A tükrözés miatt $LL'C\angle = 45°$, így az $AKL\triangle$ háromszög körülírt körében az M^*L húrhoz tartozó kerületi szög nagysága L'-nél 135°, azaz $LAM^*\angle = 45°$. Azonban a feladat feltétele alapján $LAM\angle = 45°$, vagyis az M és az M^* pont egybeesik, azaz az A, K, L és M pontok egy körön vannak.

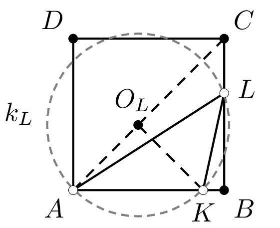
[1] lásd http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4474&l=hu

[2] lásd http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2011/2011pub04.pdf

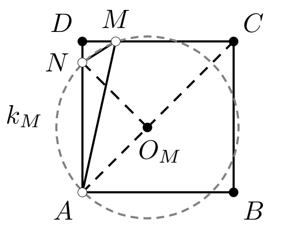
Hasonlóan igazolható (lásd a bal oldali ábrát), hogy az A, N, M és L pontok is egy körön vannak. Ezzel a bizonyítandót beláttuk, mivel a két pontnégyesnek három közös eleme (A, L és M) van.

II. megoldás *Szabó Barnabás*

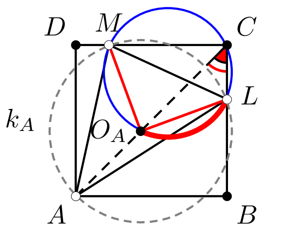
Az AKL, AMN, AML háromszögek k_L, k_M, k_A körülírt köreit vizsgáljuk. Az I. megoldásban láttuk, hogy az AKL háromszög körülírt körének O_L középpontja a négyzet AC átlóján van. Hasonlóan igazolható, hog az AMN háromszög körülírt körének O_M középpontja is illeszkedik AC-re. Végül megmutatjuk, hogy az ALM háromszög körülírt körének O_A középpontja is rajta van az AC átlón. Ismét a kerületi és középponti szögek tétele alapján $MO_AL\angle = 90°$, így az O_A és a C pont is rajta van az ML szakasz Thálesz-körén. Mivel $O_AM = O_AL$, így a Thalesz körön az O_A pont az (egyik) ML félkörív felezőpontja, így a kerületi szögek tétele alapján $MCO_A\angle = 45°$. Ez azt jelenti, hogy az O_A pont is rajta van a négyzet AC átlóján.



Az $AKL\triangle$ körülírt köre k_L



Az $AMN\triangle$ körülírt köre k_M

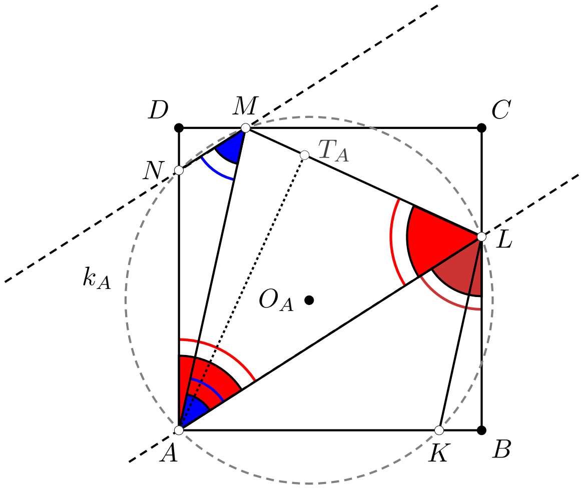


Az $AML\triangle$ körülírt köre k_A

Innen már könnyű megmutatni, hogy az O_L, O_M, O_A pontok egybeesnek. Mivel az O_M és az O_A pont is rajta van az AM szakasz felezőmerőlegesén, illetve a négyzet AC átlóján, ezért megegyeznek. Hasonlóan, az O_L és az O_A pont is rajta van az AL szakasz felezőmerőlegesén és a négyzet AC átlóján, így ezek is egybeesnek. Tehát O_L, O_M és O_A ugyanaz a pont, így az öt vizsgált pont egy körön van.

III. megoldás *Sal Kristóf*

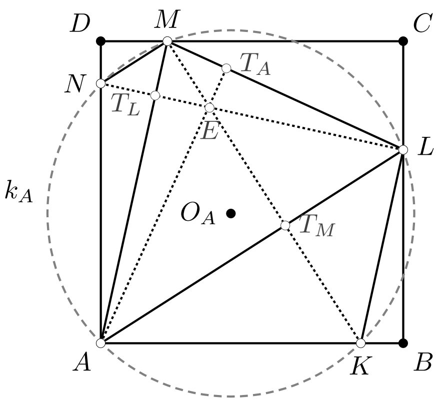
Tükrözzük az $AMD\triangle$ háromszöget az AM szakasz egyenesére, az $ALB\triangle$ háromszöget pedig az AL szakasz egyenesére. A két tükrözésnél az AD és az AB szakasz képe meg fog egyezni, tehát tükörképük egy közös AT_A szakasz. Valóban, $MAL\angle = 45°$ és ezért $DAM\angle + LAB\angle = 45°$, így a $DAM\angle$, $LAB\angle$ szögek tükörképei épp kitöltik az $MAL\angle$ szöget. Ráadásul $AD = AB$ tehát C és B ténleg egy közös T_A pontba kerül. Mivel $MDA\angle = ABL\angle = 90°$, így e szögek képei: $MT_AA\angle + AT_AL\angle = 90° + 90° = 180°$, azaz T_A az ML szakaszra esik.



Mivel $AMN\angle = LAM\angle (= 45°)$, így az MN és az LA szakasz párhuzamos. Vegyük még észre, hogy $NAL\angle = ALM\angle$, mert AD és BC is párhuzamos, így $NAL\angle = ALB'\angle$ és az AL-re való tükrözés miatt $ALB'\angle = ALM\angle$. Ez a két tény azt jelenti, hogy az $ALMN$ négyszög szimmetrikus trapéz, azaz ez a négy pont egy körön van. Hasonló elmondható az $AMLK$ négyszögről is. Mivel a két négyszögnek három közös csúcsa van, így a körülírt köreiknek meg kell egyezniük, és ez volt a bizonyítandó.

IV. megoldás

A III. megoldás elején megmutattuk, hogy az AD szakasz AM egyenesre vonatkozó tükörképe megegyezik az AB szakasz AL egyenesére vonatkozó tükörképével és ez az ALM háromszög AT_A magasságvonala.



Tükrözzük az AM tengelyre az MN egyenest is! Mivel $AMN\angle = MAL\angle = 45°$, így $MN \parallel AL$ és $MN' \perp AL$. Az N pont az AD, MN egyenesek metszéspontja, így tükörképe – N' – e két egyenes tükörképének metszéspontja, azaz a MAL háromszög E magasságpontja. Hasonlóan igazolható, hogy a K pont AL tengelyre vonatkozó tükörképe is az E magasságpont.

Ismeretes, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak, azaz esetünkben N és K illeszkedik a MAL háromszög körülírt körére.

Megjegyzés

A Kömal feladatban azt kellett igazolni, hogy $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$. Ez a fenti gondolatmenetek bármelyikéből rövid úton adódik.A IV. megoldásban $MN = ME$ és $LK = LE$ így az állítás kapcsolatos azzal az önmagában is érdekes ténnyel, hogy bármely háromszögben az oldal négyzetének és a szemközötes csúcs magasságponttól való távolsága négyzetének összege mindegyik oldal választásánál ugyanazt az értéket adja.

V. megoldás

A BKL, DMA háromszögek oldalai párhuzamosak egymással, így ez a két háromszög hasonló. Ha $AB = AD = 1$, $DM = \xi$ és $BL = \eta$, akkor az $\frac{DM}{DA} = \frac{BK}{BL}$ aránypárból $BK = \xi\eta$. Ezzel analóg módon, a BLA, DMN háromszögek is hasonlóak és az $\frac{BL}{BA} = \frac{DN}{DM}$ aránypárból $DN = \xi\eta$ következik.

Azt kaptuk, hogy $DN = BK$ és persze ilyenkor $AK = AN$. Tekintsük az AKN háromszög k_A körülírt körét és az $ABCD$ háromszög k körülírt körét. Ezek érintik egymást A-ban, hiszen mindkettő középpontja az $BAD\angle$ szögfelezőjén van. Az AB húrhoz k-ban $45°$-os kerületi szög tartozik. Ez a kerületi szög megegyezik az AB egyenes és a k kör A-beli érintőjének szögével, azaz az AB húr érintő szárú kerületi szögével. Ez az érintő szárú kerületi szög megegyezik az AK szakasz és a k_A kör A-beli érintőjének szögével, tehát a k_A körben az AK húr kerületi szöge is $45°$. Az AK húrtól az L pont ugyanolyan irányban van, mint az AB húrtól C, így ha $KLA\angle = 45\circ$, akkor L illeszkedik k_A-ra. Hasonlóan igazolható, hogy M is illeszkedik k_A-ra.

További vizsgálatok

1. feladat Általánosítsuk a feladatot! Fontos, hogy négyzetből induljunk ki? Lehet lazítani, azon, hogy a $KLA\angle$, $LAM\angle$, $AMN\angle$ szögek mind egyenlők legyenek egymással.

2. feladat Az ábrákon úgy tűnik, hogy a B, D, $LA \cap MK$, $MA \cap LN$ pontok egy egyenesen vannak. Döntsük el, hogy igaz-e ez az észrevétel!

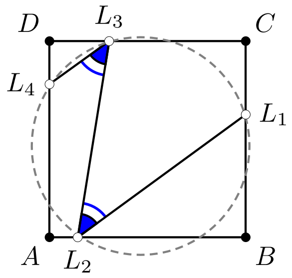
3. feladat Mozgassuk az L pontot a BC egyenesen és szerkesszük meg hozzá a $K \in AB$, $M \in CD$, $N \in DA$ pontokat a $KLA\angle = LAM\angle = AMN\angle = 45°$ feltételnek megfelelően. Elemezzük az ábrát!

Eljátszhatunk az ábrával a Pataki János tanár úr által készített geogebra fájl segítségével:

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2012/b4474_lattice.ggb

Egy konkrét kérdés a példa kedvéért: tekintsük azt a paralelogramma-rácsot, amelynek origója az A pont, bázisvektorai az $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$ vektorok! Hol mozognak a rácspontok? Tekintsük pld azt az P pontot, amelyre $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM}$. Mi a P pont mértani helye, ha L befutja a BC egyenest?

4. feladat Elvéthetjük az A csúcsot, úgy tűnik, hogy a korábbi öt helyett négy pont – a párhuzamos oldalpár közti L_2, L_3 pontpár és egy-egy szomszédjuk – még mindig egy körre kerül (lásd az alábbi ábrát). Igaz-e ez az észrevétel?



Megoldások, ötletek

1. feladat A IV. megoldás alapján elég azt elérni, hogy

(i) ha AL-re tükrözzük az AB egyenest és AM-re AD-t, akkor ugyanahhoz az egyeneshez jussunk;

(ii) az előbbi tükrözéseknél B illetve D képe egybeessen;

(iii) ez a kép az ML egyenesre kerüljön;

(iv) az AL-re illetve AM-re vonatkozó tükrözésnél BC illetve CD képe merőleges legyen AM-re illetve AL-re.

Valóban, ha mindezek teljesülnek, akkor az AB, AD szakaszok AL-re illetve AM-re tükrözött képe az ALM háromszög AT_A magasságvonala lesz és K illetve N ugyanezeknél a tükrözéseknél az ALM háromszög magasságpontjába képződik. Így A, K, L, M, N egy körön lesznek, hiszen a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög körülírt körén vannak. A $KL^2+AM^2 = LA^2+MN^2$ összefüggés fenti a fenti „Megjegyzés”-ből következik.

Az (i) feltétel azzal ekvivalens, hogy $LAM\angle = \frac{1}{2}BAD\angle$. Ezek után (ii) az $AB = AD$ feltételt jelenti. A (iii) összefüggés az $ABL\angle + MDA\angle = 180°$ feltételt követeli meg, tehát azt, hogy $ABCD$ húrnégyszög legyen. A (iv) feltétel az $LAM\angle + ALK\angle = LAM\angle + AMN\angle = 90°$ relációval ekvivalens. Mindezek alapján kimondhatjuk:

Állítás Ha $ABCD$ olyan deltoid, amelyben $AB = AD$ és $ABC\angle = CDA\angle = 90°$ és a deltoid AB, BC, CD, DA oldalain rendre úgy helyezkednek el a K, L, M, N pontok, hogy $KLA\angle = AMN\angle = \frac{1}{2}BAD\angle$ és $LAM\angle = \frac{1}{2}DAB\angle$, akkor a K, L, M, N, A pontok egy körön vannak és $KL^2 + AM^2 = LA^2 + MN^2$.

Nem állítjuk, hogy a feladatnak nincs további általánosítása.

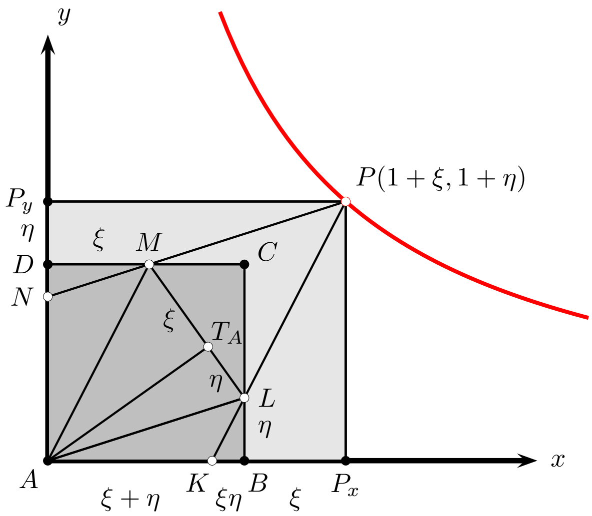
2. feladat A IV. megoldás ábrájából leolvasható, hogy ez a feladat a következőképpen is fogalmazható: *bármely háromszögben bármely magasságvonal talppontjának az őt nem tartalmazó oldalegyenesekre való tükörképei egy* *egyenesen vannak a másik két magasságvonal talppontjával.* Vagy másképp: *a háromszög talpponti háromszögében az eredeti háromszög oldalai külső vagy belső szögfelezők.* Ezeket az összefüggéseket itt nem igazoljuk. A tanítás során akkor szoktak előkerülni ezek az összefüggések, amikor igazoljuk, hogy a (hegyesszögű) háromszögbe írt legkisebb kerületű háromszög a talpponti háromszög.

3. feladat Tekintsük az A pontot koordinátarendszerünk origójának, melyben az AB egyenes az x-, az AD egyenes az y-tengely és $B(1,0)$, $D(0,1)$, $C(1,1)$. Legyen P vetülete a tengelyeken P_x illetve P_y. Mivel $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{LP}$, így ezen vektorok x-tengelyre eső merőleges vetülete is egyenlő: $BP_x = DM = \xi$. Ehhez hasonlóan $CP_y = BL = \eta$, tehát $P(1+\xi, 1+\eta)$.

A III. (Sal Kristóf-féle) megoldás szerint $DM = MT_A$ és $BL = LT_A$, tehát $LM = \xi + \eta$. A II. (Szabó Barnabás-féle) megoldás szerint $LM = AK$, azaz $AK = \xi + \eta$. Az V. megoldás szerint $BK = \xi\eta$. Mindezekből

$$1 = AB = AK + KB = \xi + \eta + \xi\eta = (1+\xi)(1+\eta) - 1,$$

azaz P koordinátáinak szorzata 2, P egy hiperbolán mozog.



Itt nem foglalkozunk azzal, hogy P bejárja-e a teljes (fél)hiperbolát illetve, ha L-et csak a BC szakaszon futtatjuk, akkor hol lehet a hiperbolán P.

4. feladat Tekintsük az $L_1L_2L_3$ háromszög l körülírt körét. Ebben az L_1L_3 húr kerületi szöge $L_1L_2L_3\angle = 45°$, így középponti szöge: $L_1O_lL_2\angle = 90°$. Forgassuk el O_l körül $90°$-kal az L_2L_3 szakaszt, hogy az L_3 pont L_1-be kerüljön. Ilyenkor az L_2 pont képe az AD egyenes egy L_2' pontjába kerül, hiszen a négyzet AB és CD párhuzamos oldalpárja közti szakasz forgattunk el $90°$-kal és az CD-beli végpont BC-re került. Másrészt az elforgatásnál az l kör önmagába képződik, tehát L_2' az l körön van.

Az elforgatás miatt $L_2'O_lL_2\angle = 90°$, ez az L_2L_2' húr középponti szöge l-ben, így kerületi szöge $L_2'L_3L_2 = 45°$, azaz $L_2' = L_4$. Ezzel beláttuk, hogy az L_1, L_2, L_3, L_4 pontok egy körön vannak.