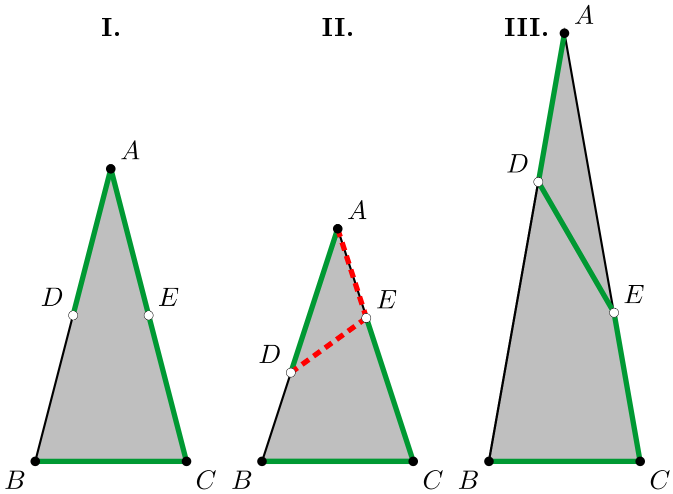
A 2012. évi októberi Kömal egy feladatáról

A Kömal határidők lejárta után a gimnáziumi osztályokkal szoktunk „Kömal show"-t, azaz példamegbeszélést tartani. Az októberi szám egyik példájával kapcsolatban talán érthetővé válik a showműsor kifejezés használata. A 10.c illetve a 11.c osztály óráin Ágoston Péter, Homonnay Bálint, Jávorszky Natasa, Kabos Eszter, Kalló Kristóf, Maga Balázs ismertették megoldásaikat. Pataki János tanár úr rávilágít a példa és a harmadfokú egyenlet egy általános megoldási módszerének kapcsolatára.

Kömal B. 4479. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB és AC szárain úgy helyezkednek el a D, illetve E pontok, hogy $AD = BC = EC$. Mekkora lehet az A csúcsnál lévő szög, ha az ADE háromszög is egyenlő szárú?

Megoldás Három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az ADE háromszögben melyik két oldal egyenlő.

I. eset: $AD = AE$, **II. eset**: $AE = ED$, **III. eset**: $AD = DE$.



Az I. esetben $\sin\frac{BAC\angle}{2} = \frac{1}{4}$, amiből $BAC\angle \approx 28,0724869359°$.

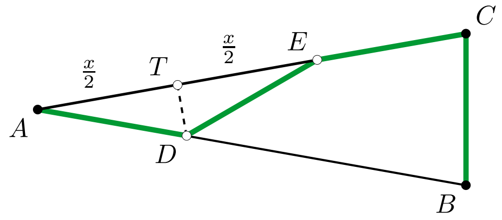
A II. esetben $BD = AE$, mert $AB = AE$, így a CED, CBD háromszögek egybevágóak, $CED\angle = CBE\angle$. Mivel $CED\angle$ az AED háromszög külső szöge, így $CED\angle = 2BAC\angle$, míg az ABC egyenlő szárú háromszögben $CBE\angle = CBA\angle = 90° - \frac{BAC\angle}{2}$. Mindezekből $2BAC\angle = 90° - \frac{BAC\angle}{2}$, azaz $BAC\angle = 36°$.

Mindkét esetben egyszerűen igazolható a leírt konfiguráció létezése.

A III. eset vizsgálatára több módszert is adunk.

I. módszer

Legyen $AD = DE = EC = CB = 1$ és keressük az AE szakasz x hosszát! Az ABC egyenlő szárú háromszögben a koszinusz tétel szerint



$$1^2 = 2(1+x)^2 - 2(1+x)^2 \cos\alpha, \tag{1}$$

ahol $\alpha = BAC\angle$. Ha a D-ből AC-re állított merőleges talppontja D', akkor az ADE egyenlő szárú háromszögben $AD' = D'E = \frac{x}{2}$, így az $AD'D$ derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{x}{2}$, amit (1)-be írva rendezés után x-re a

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \tag{2}$$

összefüggést nyerjük.

Ebből először megsejtjük az eredményt. Ha a (2) egyenletet beírjuk az interneten szabadon elérhető wolframalpha szuperszámológépbe, akkor megkapjuk a gyökök közelítő értékét. Úgy tűnik, hogy három valós gyök van, de csak egyikük pozitív: $x_3 \approx 1,87939$. A wolframalpha szerint ennek felének arcus cosinusa (bevitelként $\cos^{-1}$) éppen $20°$.

A wolframalpha az egyenlet megoldásakor a grafikont is kirajzolta, ami szintén nagy segítség. Vegyük észre, hogy az $f(x) = x^3 - 3x - 1$ függvény folytonos és $f(-2) = -3$, $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, tehát három valós gyöke van, egy-egy a $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$ intervallumokban. Megmutatjuk még, hogy $x_3 = 2\cos 20°$ valóban gyöke (2)-nek, tehát ez az egyetlen pozitív valós gyöke. Ismeretes, hogy $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ és $\cos 60° = \frac{1}{2}$, így $\frac{1}{2} = 4\frac{x_3^3}{2^3} - 3\frac{x_3}{2}$. Ebből átszorzás és rendezés után épp a (2) relációt kapjuk x helyett x_3-mal, tehát $x = 2\cos 20°$, azaz $BAC\angle = \alpha = 20°$ az egyetlen lehetséges megoldás. Ez meg is felel, de ezt majd egy másik megoldásnál mutatjuk meg.

II. módszer

Számítsuk ki az egységnyi hosszú AD, DE, EC szakaszok AT magasságra eső AT_D, T_DT_E, T_ET merőleges vetületeinek hosszát a $BAC\angle$ felének, a

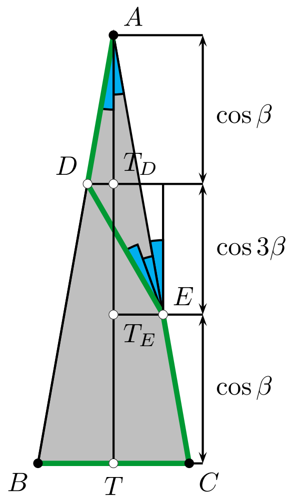
$$BAT\angle = \beta$$

szögnek a függvényében! Tekintsük az egymással egyenlő AD, DE, EC, CB szakaszokat egységnyinek!

Az AD, DE, EC szakaszok rendre β, 3β, β szöget zárnak be az AT magassággal, így a vetületek hossza rendre $\cos\beta$, $\cos 3\beta$ és $\cos\beta$. Másrészt az AT magasság hossza az ATC derékszögű háromszögben $\frac{TC}{\tan TAC\angle} = \frac{\cos\beta}{2\sin\beta}$, így

$$2\cos\beta + \cos 3\beta = \frac{\cos\beta}{2\sin\beta}, \tag{3}$$

azaz
$$2\sin\beta + \frac{\cos 3\beta}{\cos\beta}\sin\beta = \frac{1}{2}.$$



Mivel $\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$, így
$$-\sin\beta + 4\cos^2\beta\sin\beta = \frac{1}{2}.$$
Ebből a $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ helyettesítés után a bal oldalon a $\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha$ összefüggés válik alkalmazhatóvá, tehát
$$\sin 3\beta = \frac{1}{2}. \tag{4}$$
Ebből $\beta = 10° + k\cdot 120°$ vagy $\beta = 50° + l\cdot 120°$, ahol k, l egész számok. Mivel az ADE háromszögben $180° > DAE\angle + DEA\angle = 4\beta$, így $\beta = 10°$ az egyetlen reális érték.

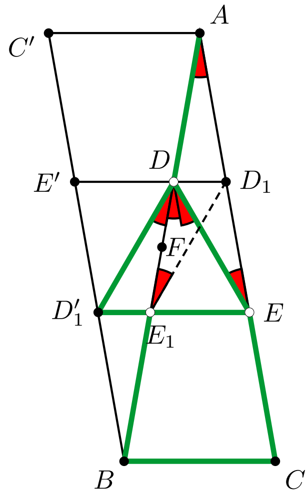
Az A csúcsú $2\beta = 20°$-os szög szárai közé berajzolható az egyenlő szakaszokból álló $ADEC$ töröttvonal és az (4) illetve az azzal ekvivalens (3) reláció biztosítja, hogy C távolsága a $DAC\angle$ szögfelezőjétől $\frac{1}{2}$ legyen, tehát C tükrözésével létrejöjjön az egységnyi alapú ABC egyenlő szárú háromszög is.

III. módszer

Használjuk az I-II. megoldások jelöléseit. Az ADE egyenlő szárú háromszögből $\cos 2\beta = \frac{x}{2}$, az ABC egyenlő szárú háromszögből pedig $\sin\beta = \frac{1}{2(1+x)}$ Az előbbi egyenletből x-et kifejezve és azt a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy
$$(1 + 2\cos 2\beta)\cos\beta = \frac{1}{2}.$$
A $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$, majd a $\sin 3\beta = 4\sin 3\beta - 3\sin\beta$ azonosság alkalmazásával a $\sin 3\beta = \frac{1}{2}$ összefüggéshez jutunk ahonnan a II. megoldás alapján gyorsan célt érünk.

IV. módszer

Rajzoljuk be a DD_1, EE_1 párhuzamosokat a D, E pontokon keresztül a BC alappal! A DD_1EE_1 szimmetrikus trapéz DE_1 szárának F felezőpontja egyben az AB szár felezőpontja is, hiszen $AD = EC$ és a tengelyes szimmetria miatt $EC = BE_1$.



Tükrözzük középpontosan az ábrát F-re! Így az $AC'BC$ paralelogrammához jutunk, benne a BC alappal párhuzamos és azzal egyenlő hosszú $E'D_1$, $D_1'E$ szakaszokkal. Mivel a DD_1' szakasz az E_1D_1 szakasz képe, ami a tengelyes szimmetria miatt ED-vel egyenlő, így a $DD_1'E$ háromszög minden oldala egyenlő, szabályos.

Ha $BAC\angle\alpha$, akkor az ADE egyenlő szárú háromszögben $DEA\angle = \alpha$. E háromszög D-nél fekvő külső szöge: $BDE\angle = 2\alpha$. Az ADE háromszög a tengelyes szimmetria miatt egybevágó az AD_1E_1 háromszöggel, amit a középpontos szimmetria a $BD_1'D$ háromszögbe visz, amelyben tehát $D_1'DB\angle = \alpha$. A $D_1'DE$ háomszög D csúcsánál tehát $3\alpha = 60°$, amiből $\alpha = 20°$.

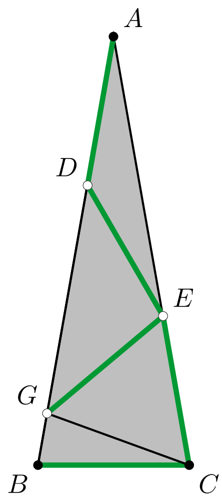
A DD_1E szabályos háromszögből kiindulva a fenti levezetés alapján könnyen igazolható a feladatban kívánt konfiguráció létezése. A szerkesztés azonban nem megy, a 60°-os szög harmadolása, a 20°-os szög Euklideszi szerkesztése nem lehetséges.

V. módszer

Folytassuk a „cikk-cakkot” a két szár között! Legyen az AB szár egyenesén az E-től ED távolságra levő másik pont G. A $BAC\angle = \alpha$ szöggel sorba kiszámolhatjuk a „nagy”, illetve a sok „kis” háromszög szögeit:

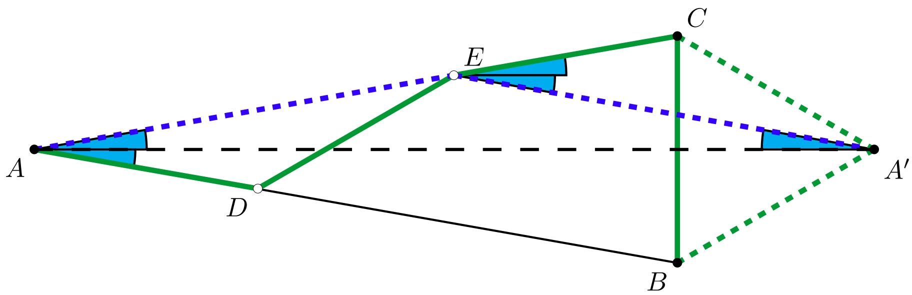
$$\begin{aligned} \alpha &= DAE\angle = AED\angle, & 2\alpha &= EDG\angle = DGE\angle, \\ 3\alpha &= GEC\angle, & 90° - \tfrac{3}{2}\alpha &= ECG\angle = EGC\angle, \\ 90° - \tfrac{1}{2}\alpha &= BGC\angle, & 90° - \tfrac{1}{2}\alpha &= ABC\angle, \end{aligned}$$

tehát a BGC háromszög is egyenlő szárú. Mivel a GCE háromszög minden oldala egyenlő, így szögei $60°$-osak, azaz $\alpha = 20°$.



VI. módszer

A $BAC\angle$ szögfelezőjén az A-n kívül van egy másik pont, amely E-től ugyanolyan messze van, mint A; legyen ez A'. Az $AA'E$ egyenlő szárú háromszögben $EAA'\angle = EA'A\angle = \beta$. E háromszög E-nél fekvő külső szöge: $CEA'\angle = 2\beta = EAD\angle$. A DAE, CEA' háromszögek egybevágóak, hiszen A-nál illetve E-nél fekvő belső szögeik egyenlők és az e melletti oldalaik páronként egyenlők: $AD = EC$, $AE = EA'$. Így a harmadik oldalak is egyenlők: $DE = CA'$, azaz az AA' tengelyre való tükrözési szimmetria miatt a $CA'B$ háromszög szabályos. Így $CA'A\angle = 3\beta = 30°$, tehát $CAB\angle = 20°$.

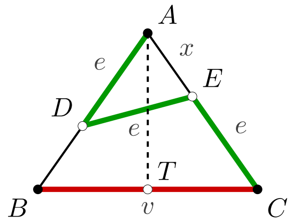


Tanári megjegyzés *Hraskó András*

A megbeszélés után megkérdeztem a diákokat, hogy hányan használtak szoftvert az eredmény meghatározásához, mielőtt pontosan tudták volna mennyi az. Nem mindenki, de a nebulók zöme gondolkodás közben igénybe vette a GeoGebra szoftvert vagy a http://www.wolframalpha.com/ „számológépet” is és utána állt neki a teljes bizonyításnak.

Tanári megjegyzés *Pataki János*

A fenti példa és a harmadfokú egyenlet között általános kapcsolat fedezhető fel. Az I. és a III. módszert vetjük majd össze általánosabb körülmények között: legyenek az AD, DE, EC „cikk-cakkok” továbbra is egyenlőek – hosszukat alább e jelöli –, de a BC alap v hossza ne legyen feltétlenül egyenlő a cikk-cakkokéval.



Az ADE egyenlő szárú háromszögben most is felírható a

$$\cos\alpha = \frac{x}{2e} \tag{5}$$

összefüggés, míg az ABC egyenlő szárú háromszögben a koszinusztétel:

$$v^2 = 2(e+x)^2 - 2(e+x)^2\cos\alpha. \tag{6}$$

A (5) összefüggést (6)-ba írva rendezés után kapjuk, hogy

$$x^3 - 3e^2x + e(v^2 - 2e^2) = 0. \tag{7}$$

Másrészt a $\beta = \frac{\alpha}{2}$ szögre az ATC háromszögben $\sin\beta = \frac{v}{2(x+e)}$, ahol (5) szerint $x = 2e\cos 2\beta$, tehát

$$\sin\beta(2\cos 2\beta + 1) = \frac{v}{2e}. \tag{8}$$

A bal oldalt a II., III. módszerekben használt azonosságok szerint átírhatjuk és a

$$\sin 3\beta = \frac{v}{2e} \tag{9}$$

összefüggéshez jutunk.

Így geometriai interpretációt illetve trigonometriai megoldóképletet találtunk az

$$x^3 - px + q = 0 \tag{10}$$

alakú harmadfokú egyenletekhez. Az $e = \sqrt{\frac{p}{3}}$, $v = \sqrt{\frac{q}{e} + 2e^2}$ helyettesítéssel (10) a (7) alakba írható át, tehát az ábrán látható $AE = x$ lesz az egyik megoldás. Másrészt $x = 2e\cos 2\beta$, ahol $\sin 3\beta = \frac{v}{2e}$.