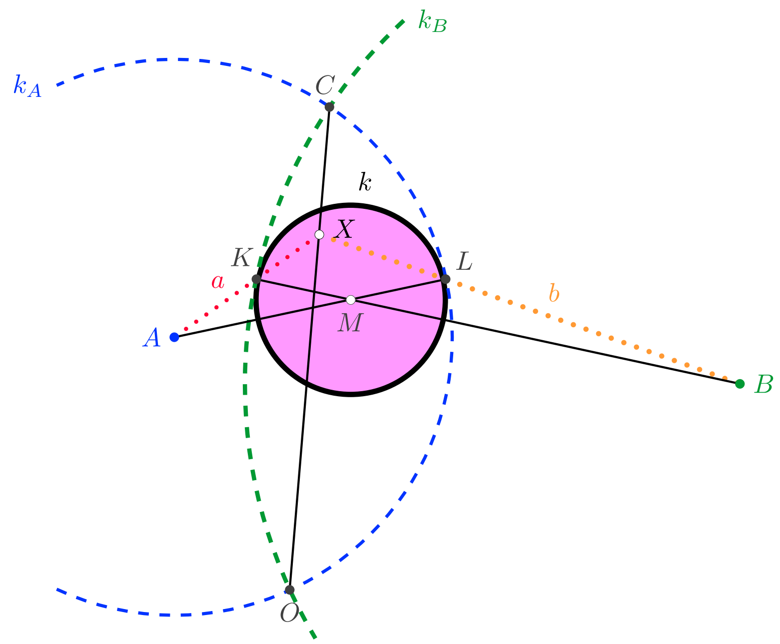
A 2012. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 5. feladata

A matematikai diákolimpia 5. feladata – különösen a magyar csapat számára – nehéznek bizonyult. Alább két megoldást ismertetünk, egyet inverzióval és egyet a pont körre vonatkozó hatványának fogalmával. Az utóbbi az olimpia szervezőinek egyik közreadott megoldása is.

Feladat: *Legyen az ABC háromszögben $BCA\angle = 90^o$, és legyen D a C-ből induló magasság talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.*

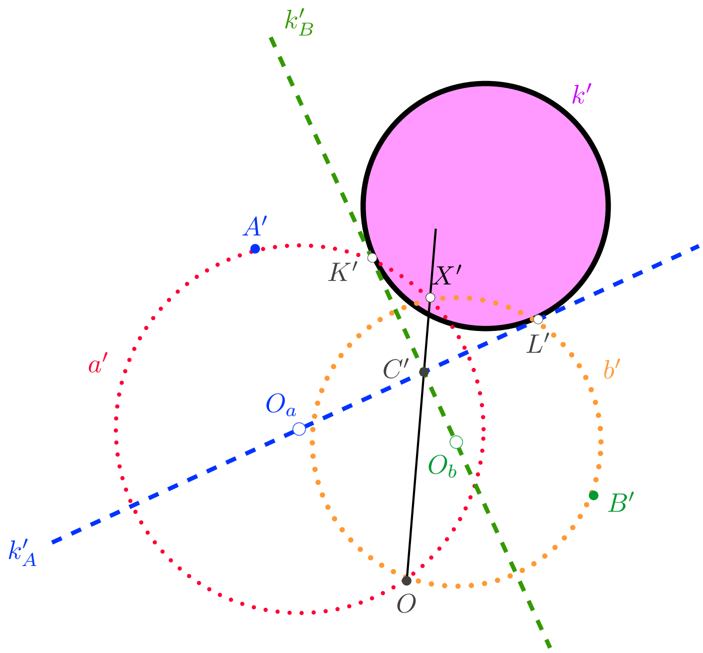
I. Megoldás Legyen az A középpontú AC sugarú és B középpontú BC sugarú körök másik metszéspontja O pont.

Első észrevételünk, hogy az A, M, L illetve a B, M, K pontok egy-egy egyenesre esnek. Amennyiben a feladat állítása igaz, úgy az M középpontú MK sugarú kör belülről érinti a k_A, k_B köröket. Az állítást tehát átfogalmazhatjuk úgy, hogy tetszőleges olyan körre, amely belülről érinti a k_A, k_B köröket és érintési pontja k_A-val K pont, k_B-vel L pont, teljesül, hogy a BK és AL egyenesek X metszéspontja a két kör közös CO húrjára esik.



Alkalmazzunk O középpontú körre vonatkozó inverziót! Az OC egyenes átmegy az inverzió centrumán, tehát a C pont képe az OC félegyenesre eső C' pont. Mivel a k_A és k_B körök átmennek az inverzió centrumán és egymást merőlegesen metszik, ezért képük két egymásra merőleges egyenes, amelyek metszéspontja a közös C pont C' képe. Az M középpontú MK sugarú k kör nem megy át az inverzió centrumán, ezért képe k' kör, amely érinti a k_A és k_B körök képeit. Ez tehát egy olyan kör lesz, amely K' és L' pontokban érinti a k'_A és k'_B egymásra merőleges egyeneseket. Azon fog múlni a bizonyítás, hogy a $C'L'$, $C'K'$ szakaszok a k' kör érintői, tehát egymással egyenlő hosszúságúak. Alább ezt a közös hosszt u jelöli.

Az AK és BL egyenesek nem mennek át az inverzió O középpontján, így képük egy-egy O-n átmenő kör lesz. Az AK a' képe átmegy az A', K', O pontokon, a BL egyenes b' képe pedig az L', B', O pontokon.



Azt kell igazolni, hogy X' rajta van a $C'O$ egyenesen.

Ehhez felhasználjuk a következő ismert feladat eredményét. Legyenek P és Q a sík rögzített pontjai. Azon R pontok mértani helye a síkon, amelyekre $PR^2 - QR^2$ egy előre adott állandó, PQ-ra merőleges egyenes.

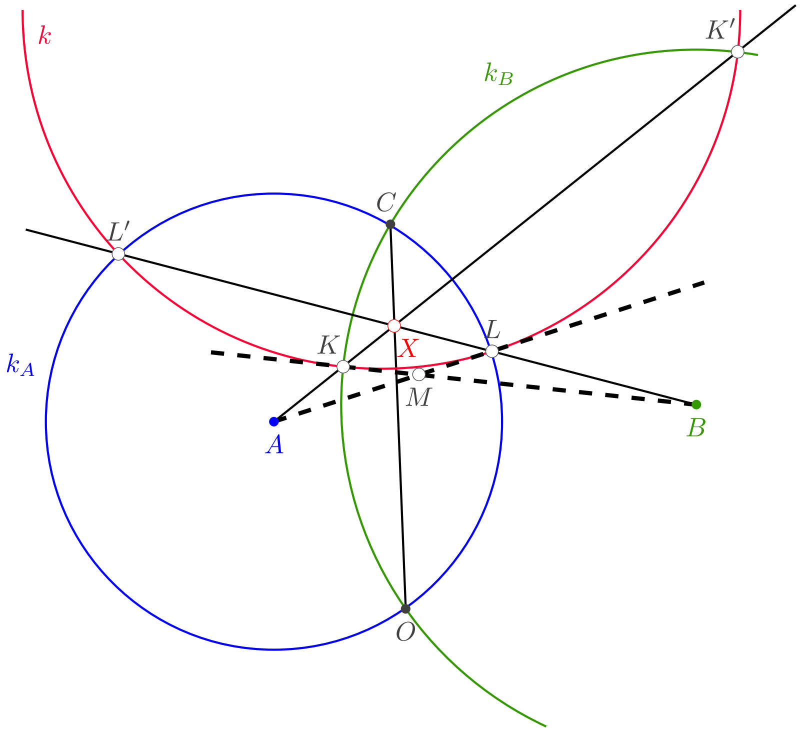
Ennek megfelelően legyen most a feladatunkban $P = O_a$ az a' kör, $Q = O_b$ pedig a b' kör középpontja. Az $A'O$ szakasz felezőpontja rajta van k'_A egyenesen, mert éppen az O pont A-ra vonatkozó tükörképének inverz képe. Így a körök merőlegessége miatt O_a a k'_A egyenesre, míg O_b a k'_B egyenesre illeszkedik.

A körök metszéspontjai O és X', tehát $O_aX'^2 - O_bX'^2 = O_aO^2 - O_bO^2$. Most O helyett válaszhatjuk a körök egy-egy különböző pontját.

$$O_aO^2 - O_bO^2 = O_aL'^2 - O_bK'^2 = O_aC'^2 + u^2 - (O_bC'^2 + u^2) = O_aC'^2 - O_bC'^2.$$

Tehát X', C', O egyenesen vannak, ennek megfelelően C, O, X is egy egyenesen vannak. Az állítást igazoltuk.

II. Megoldás Legyen ábránk betűzése az első megoldás szerinti. AZ AX félegyenes a k_B kört másodszor a K' pontban, BX félegyenes a k_A kört másodszor az L' pontban metszi.



A KK' és CO húrok metszéspontja a k_B körben az X pont. Ezért az X pontra vonatkozó hatvány ebben a körben

$$KX \cdot XK' = CX \cdot XO.$$

Másrészt a k_A körben LL' és CO húrok metszéspontja szintén X pont. Az X-re vonatkozó hatvány ebben a körben

$$LX \cdot XL' = CX \cdot XO.$$

Látjuk, hogy

$$KX \cdot XK' = LX \cdot XL',$$

tehát a K, L, L', K' pontok egy körön, a k körön helyezkednek el. Az A pont k körre és k_B körre vonatkozó hatványa megegyezik, továbbá a k_A és k_B körök merőlegessége miatt AC érinti a k_B kört. Ezek alapján

$$AK \cdot AK' = AC^2 = AL^2,$$

tehát AL érinti a k kört. Hasonlóan igazolható, hogy BK érinti a k kört. A két érintő metszéspontjából, M-ből a k körhöz húzott két érintőszakasz MK és ML egyenlők.