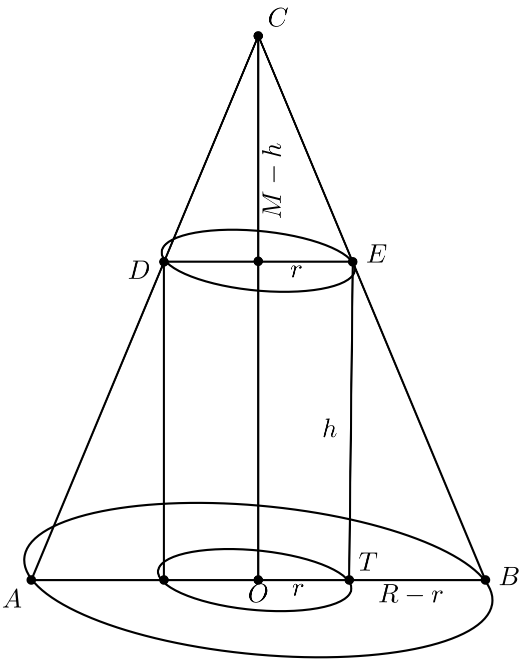
Feladat: *Adott egyenes körkúpba írjunk maximális felszínű hengert.*

Megoldás: A szélsőérték kiszámítása elemi úton történik, de az eredmény jellege függ a kúp alakjától. A feladat szövegezése, megoldási módja az emelt szintű érettségin megszokott, azonban igencsak próbára teszi a figyelmet, a végeredmény pedig tanulságos.

Legyen a kúp magassága M, alapkörének sugara R. A beírt henger magassága h, alap- és fedőkörének sugara r. A szélsőérték-feladatoknál szokásos módon az elfajuló eseteket is megengedjük. A henger adataira így

$$0 \leq h \leq M \text{ és } 0 \leq r \leq R.$$

Tekintsük először a kúp és a henger közös tengelyén átmenő ABC síkmetszetet a mellékelt ábra szerint.



A henger felszíne

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

A felszínben szereplő elsőfokú változót, a henger h magasságát kifejezhetjük az r sugár és a kúp adatai segítségével. A síkmetszet jelöléseivel COB és ETB derékszögű háromszögek hasonlók, a befogók aránya

$$\frac{h}{R-r} = \frac{M}{R}.$$

Ezt a kúp alakjára jellemző arányt λ-val jelölve

$$h = \lambda(R - r).$$

Helyettesítsük ezt a h-ra kapott kifejezést a felszín képletébe és a továbbiakban az egyszerűség kedvéért keressük az $f(r) = \frac{A}{2\pi}$ függvény szélsőértékét.

$$f(r) = \frac{A}{2\pi} = r^2 + r\lambda(R - r) = (1 - \lambda)r^2 + \lambda Rr$$

az r-nek legfeljebb másodfokú függvénye. A függvény értelmezési tartománya a $[0; R]$ intervallum, az elfajuló esetekben pedig $f(0) = 0$ és $f(R) = R^2$. A megoldás több esetre bomlik a főegyüttható, $(1 - \lambda)$ előjele szerint.

Ha $\lambda = 1$, azaz a kúp nyílásszöge derékszög, akkor az $f(r)$ függvény lineáris és növekedő; maximumát az értelmezési tartomány legnagyobb elemére veszi fel: $r = R$, $h = 0$. Ekkor a henger elfajuló, $A_{max} = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének kétszeres területe.

A továbbiakban a $\lambda \neq 1$ feltevés mellett másodfokú, a szokásos módon a valós számok halmazára kiterjesztett $f(r)$ függvényt vizsgáljuk. A függvénynek két zérushelye van, $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{\lambda R}{\lambda - 1}$.

Legyen először $0 < \lambda < 1$. Ekkor $f(r)$ főegyütthatója pozitív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek minimuma van. A fügvény 0-tól különböző zérushelye negatív, így f pozitív r-ekre szigorúan monoton nő. A maximumot tehát most is az értelmezési tartomány jobb oldali végpontjában kapjuk, a henger felszíne ilyenkor is az elfajuló esetben maximális.

Legyen most $\lambda > 1$. Ekkor főegyüttható negatív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek maximuma van. Az egyik zérushelye $r = 0$, a másik most pozitív. A válasz most már azon múlik, hogy a kiterjesztett függvény maximumahelye hol van az értelmezési tartományhoz képest. Ez az érték a két zérushely számtani közepe:

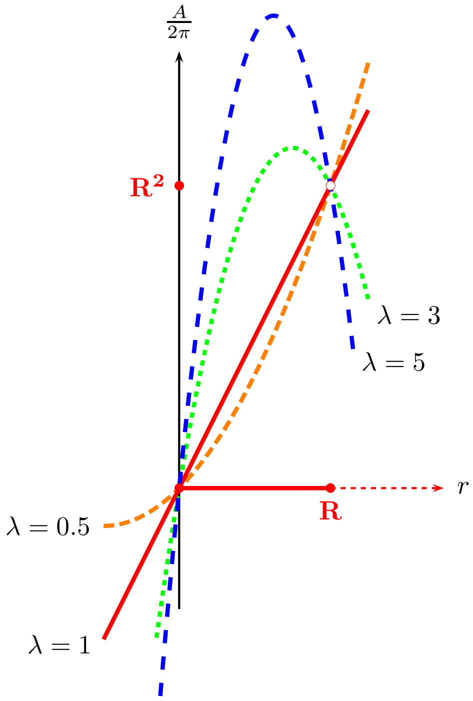
$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)}.$$

Amennyiben $R \leq r_{max}$, akkor f továbbra is szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon, tehát még ilyenkor is az elfajuló esetben kapjuk a legnagyobb felszínt. Nyomban adódik, hogy az $1 < \lambda$ feltevés mellett ez pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \leq 2$.

Végül a $2 < \lambda$ esetben a maximumhely tényleg az értelmezési tartomány belső pontja:

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} < R.$$

$$f(r) = (1-\lambda)r^2 + \lambda R r$$



Összefoglalás (Lásd a fenti ábrát és a

matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2012/hengeranim.ggb

interaktív Geogebra grafikont)

Amennyiben a kúp magasságának és sugarának hányadosa $\lambda \leq 2$, akkor a maximális felszínű beírt henger elfajuló és felszíne $A = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének a kétszeres területe. Ha $\lambda > 2$, akkor a maximális felszínű henger sugara

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} = \frac{\frac{M}{R}R}{2(\frac{M}{R} - 1)} = \frac{MR}{2(M-R)}.$$

Végül írjuk fel a maximális felszínű beírt henger felszínét a $2 < \lambda$ esetben.

$$f(r_{max}) = (1-\lambda)\frac{\lambda^2 R^2}{4(\lambda-1)^2} + \frac{\lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 R^2}{\lambda - 1}.$$

Így, felhasználva, hogy $M = \lambda R$, a maximális hengerfelszín:

$$A_{max} = 2\pi f(r_{max}) = \frac{\pi \lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{4(\lambda - 1)} \cdot 2\pi RM = \mu \cdot 2\pi RM.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor $0.25 < \mu < 0.5$, a második tényező, $2\pi RM$ pedig a kúp köré írt henger palástjának a felszíne.

Megjegyzés Láttuk, hogy ha $\lambda \leq 2$, akkor az elfajuló esetben kapjuk a maximumot, amelynek értéke az alaplap kétszeres területe, $2T = 2\pi R^2$. Ha a $2 < \lambda$ esetben is R segítségével fejezzük ki a maximális felszínt, akkor

$$A_{max} = \frac{\lambda^2}{4(\lambda - 1)} 2\pi R^2 = \lambda\mu 2T.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy $1 < \lambda\mu$, a maximális hengerfelszín tehát ilyenkor nagyobb mint a kúp alaplapjának kétszeres területe.