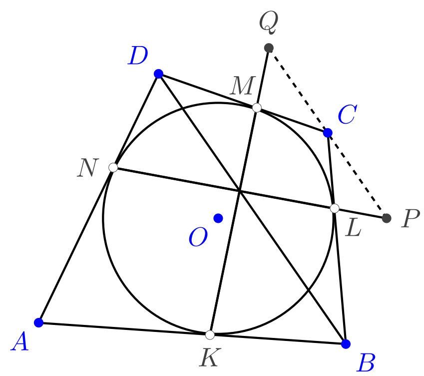
5. foglalkozás

Az érintőnégyszög egy érdekes tulajdonságáról

Schultz János 2011-ben kiadott feladatgyűjteményében szerepel a következő feladat:

Feladat: *Az $ABCD$ érintőnégyszög a beírt kört az AB, BC, CD, és DA oldalaival a K, L, M és N pontokban érinti. Tekintsük a C-n átmenő, BD átlóval párhuzamos egyenest. Az egyenest az NL és KM egyenesek a P és Q pontokban metszik. Igazoljuk, hogy $CP = CQ$.*

(Elemi matematikai versenyfeladatok, V. fejezet 39. feladat)



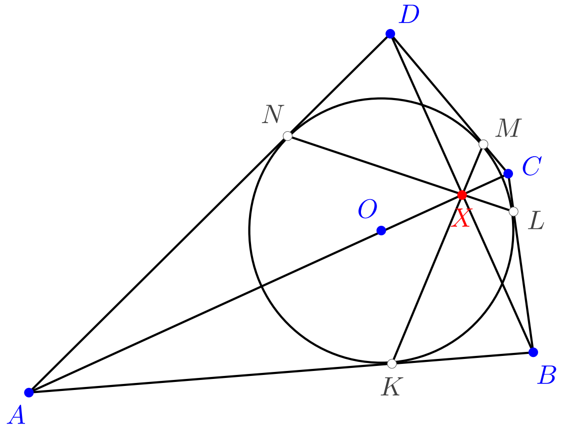
A feladat megoldásához a szerző először bebizonyítja, hogy KM és LN egyenesek a BD átlón metszik egymást.

A háttérben a következő – önmagában is érdekes – tétel áll:

Tétel: *Tekintsünk egy húrnégyszöget és a köré írt körét. A csúcsokban húzzuk meg a kör érintőit, ezek egy érintőnégyszöget alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög átlói és az érintőnégyszög átlói egy pontban metszik egymást.*

Erre a tételre a szemináriumon több megoldást is adtunk és ezt követően Hraskó András egy tényként felhasznált vetítési tulajdonság eredetét, precíz bizonyítását is megmutatta.

I. bizonyítás: Jelöljük X-szel a BD és LN metszéspontját, Y-nal a BD és KM metszéspontját. Megmutatjuk, hogy X és Y egybeesnek.



A $BLN\angle = ANL\angle$, mert az LN húr végpontjaiban az érintők a húrral egyenlő szögetzárnak be. Emiatt az is igaz, hogy $sinBLN\angle = sinLND\angle$. A sinus-tétel alapján látjuk, hogy

$$\frac{BX}{BL} = \frac{sinBLN\angle}{sinBXL\angle} = \frac{sinLND\angle}{sinDXL\angle} = \frac{XD}{ND}.$$

Ebből átrendezéssel – és figyelembe véve, hogy $DN = DM$ – kapjuk, hogy

$$\frac{BX}{XD} = \frac{BL}{DN}. \tag{1}$$

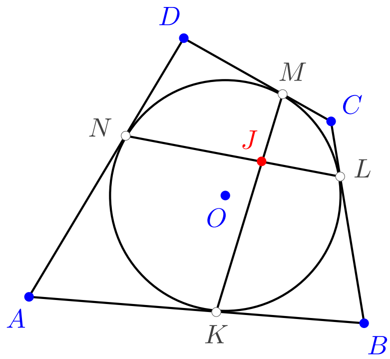
Hasonlóan látható az is, hogy

$$\frac{BY}{YD} = \frac{BK}{DM} \tag{2}$$

Mivel $\frac{BK}{DM} = \frac{BL}{DN}$, így (1) és (2) összevetéséből adódik, hogy LN és KM ugyanott metszik a BD átlót. Az AC átló és a LN, KM metszéspontjairól ehhez hasonlóan láthatjuk be, hogy egybeesnek, tehát az AC, BD, LN, KM vonalak mind egy ponton mennek át.

A feladat következő két megoldását Dobos Sándor ismertette a szemináriumon. Először a Brianchon-tétel közvetlen alkalmazását mutatta be.

II. bizonyítás: Brianchon tétele szerint egy érintőhatszög átellenes csúcspontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át. Ez a pont a hatszög Brianchon-pontja. A tétel olyan speciális esetekben is használható, amikor az érintőhatszög oldalegyenesei egybeesnek. Ebben az esetben a két egybeeső oldalegyenes metszéspontja az érintési pont. Éppen ezzel a speciális kiosztással lehet kényelmesen felhasználni most is ezt a tételt. Elegendő belátnunk, hogy $(BD \bigcap AC) \in MK$



Legyen a hat oldalegyenes kiosztása a következő:

$$AB : 1, 2; \qquad BC : 3; \qquad CD : 4, 5; \qquad DA : 6.$$

Ekkor az 1 és 2 egyenesek metszéspontja a K pont, a 4 és 5 egyenesek metszéspontja pedig az M pont. A KM egyenes az 12 és 45 metszéspontokon átmenő egyenes. A 23 és 56 metszéspontjait összekötő egyenes a BD átló egyenese, míg a 34 és 61 egyeneseket összekötő harmadik egyenes az AC átló egyenese. Brianchon tétele alapján ez a három egyenes egy pontban metszi egymást. Új számozással ugyanígy látható be, hogy az NL egyenes is átmegy az AC és BD átlók metszéspontján.

III. bizonyítás: Alkalmazzunk centrális vetítést úgy, hogy kör körbe kerüljön, továbbá az $AB \bigcap CD$ és $AD \bigcap BC$ pontok egyenesének képe legyen az ideális egyenes. Ekkor a konvex négyszögből négyzet lesz, ahol az állítás már triviális. A bizonyításban felhasználjuk egyrészt azt, hogy a centrális vetítés illeszkedéstartó, másrészt azt, hogy megadható olyan centrális vetítés, amelyben kör körbe kerül és egy előre megadott egyenes képe lesz az ideális egyenes.

Ez utóbbi erős, és sokszor nagyon jól felhasználható állítás és bizonyítása megtalálható tagozatos feladatgyűjtemény-rendszerünk, a „Matkönyv"

Geometria 11-12 kötete,

http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/volume.php?mode=sne—j-&volume=g_iii
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf

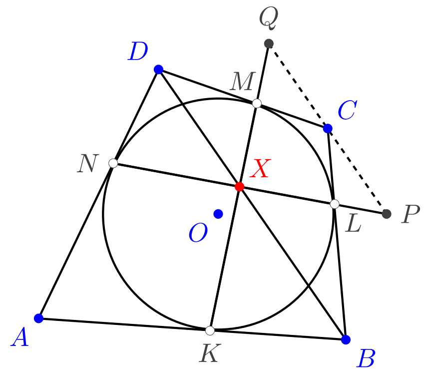
(html ill. pdf) Projektív geometria fejezetének „Kúpszeletek, kör vetítése" alfejezetében a „Különböző körmetszetek" és a „Kör vetítése körbe I., egyenes a végtelenbe" feladatoknál.

Végezetül adjuk meg annak a feladatnak is a megoldását, amely a fenti szép tétel apropóját adta.

Az eredeti feladat megoldása:

BD és PQ párhuzamossága miatt $LCP\triangle \sim LBX\triangle$ és $MCQ\triangle \sim MDX\triangle$. A C pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, $MC = LC$, így, ha λ és μ a két hasonlósági arány, akkor

$$1 = \frac{LC}{MC} = \frac{\lambda \cdot BL}{\mu \cdot MD} = \frac{\lambda \cdot BX}{\mu \cdot XD} = \frac{PC}{CQ}.$$



Kiss Géza, Kisbárkány