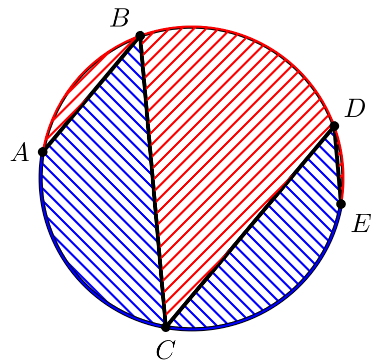
4. foglalkozás

Fazakas Tünde talált egy szép feladatot a Kvantban, ezt tálalja Gyenes Zoltán különböző megközelítésekben.

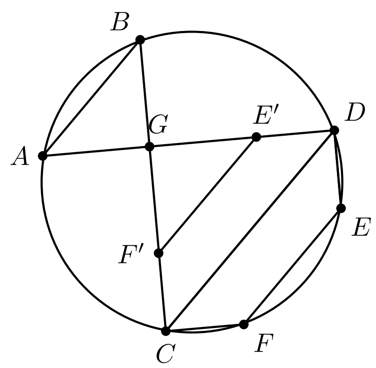
Alapfeladat

Adott egy kör, és a körön öt pont ebben a sorrendben: A, B, D, E és C. Az $ABCDE$ töröttvonal minden szöge 45°-os. A töröttvonal a körlapot öt részre osztja, melyeket felváltva pirosra és kékre színezünk. Mutassuk meg, hogy a piros és a kék részek összterülete megegyezik.



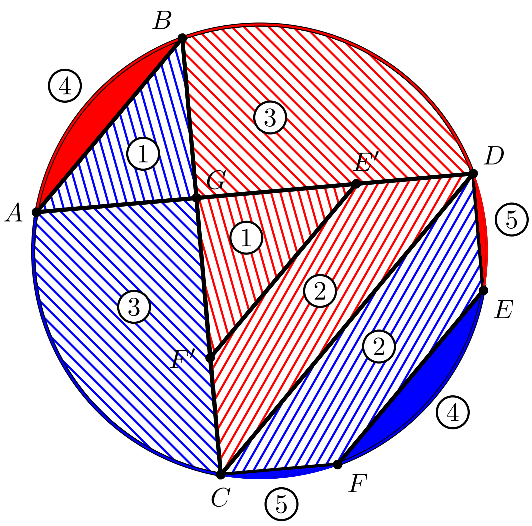
Első megoldás (KVANT)

Ez a megoldás egészen elemi eszközöket használ. A kulcsötlet: párhuzamost húzunk az E ponton keresztül a CD szakasszal, így kapjuk az F pontot a kör kerületén. Ezután tükrözzük a $CDEF$ trapézt a CD alapra. Mivel a tekintett trapéz húrtrapéz, így egyben szimmetrikus trapéz is, azaz a trapéz C csúcsánál is 45°-os a szög. Az $\angle ADC$ szög is 45°, mert az $ABDC$ négyszög is húrtrapéz (AB és CD párhuzamosak, hiszen az $\angle ABC$ és a $\angle BCD$ szög megegyezik), azaz ismét egy szimmetrikus trapézzal van dolgunk. Ez azt jelenti, hogy a tükrözés után az E' és F' pontok ráesnek az DA, illetve a CB félegyenesre.



Most azt kell még észrevenni, hogy az AB és az EF szakaszok hossza egyforma. Ez egyszerű, ha tudjuk a kerületi és középponti szögek tételét: az AC és a

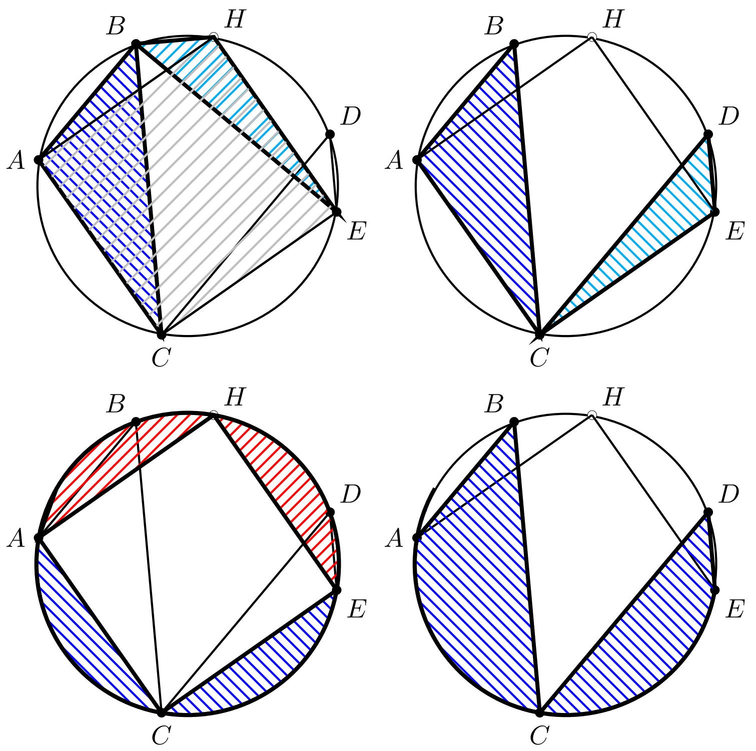
CE körívekhez 90°-os középponti szög tartozik, így ezek negyedkörívek, vagyis ketten együtt egy félkörívet alkotnak, azaz A és E egy átmérő két végpontja. Ebből világos, hogy az $ABEF$ húrtrapéz egy téglalap (hiszen egyik átlója a kör átmérője). Ennél egy kicsit kevesebb is elég: a Thálesz tétel megfordításából is tudjuk, hogy az AE szakasz átmérő: az $\angle ADE$ szög 90°, mert két 45°-os szögből tevődik össze.



Ezek alapján világos, hogy a két terület egyforma, hiszen az újonnan berajzolt vonalak olyan módon darabolják fel az eredeti részeket, hogy minden új piros résznek megfelel egy vele egybevágó kék rész. Az ábrán ezekből három pár látható, ezek mellett még két-két körcikk felel meg egymásnak. Ezzel az állítást beláttuk, és ehhez mindössze a Thálesz tétel megfordítására és a húrtrapéz szimmetriatulajdonságára volt szükség.

Második megoldás

Ez a megoldás a forgatást hívja segítségül, és jobban kihasználja a kerületi és középponti szögek tételét. Forgassuk el a kör középpontja körül 90°-kal a C, a D és az E pontokat! A kerületi és középponti szögek tétele alapján világos, hogy a C pont képe E, a D pont képe B, az E pont képe pedig egy új pont, H, ami a C pont tükörképe a kör középpontjára. Az is világos, hogy az $ACEH$ négyszög egy négyzet, hiszen minden oldalához 90°-os középponti szög tartozik.

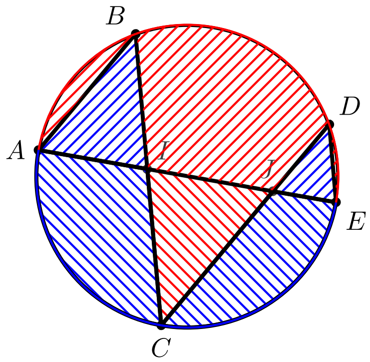


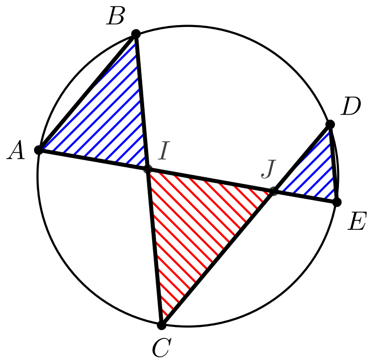
Megmutatjuk, hogy az $\triangle ABC$ és a $\triangle BEH$ háromszögek területének összege fele az $ACEH$ négyzet területének. Ez egyszerű, hiszen a két háromszög AC, illetve EH oldala megegyezik a négyzet oldalával, és az ezekhez tartozó magasságok összege is a négyzet oldala (mivel a közös B csúcs a négyzet AC és EH párhuzamos oldalainak egyenese közé esik). Ha a körből elhagyjuk a négyzetet, akkor négy egyforma körcikk marad, és ebből kettő az el nem forgatott, illetve az elforgatott kék tartományba esik, amiből világos, hogy a kék tartományok összterülete fele a kör területének.

Ebben a megoldásban szükség volt a kerületi és középponti szögek tételére.

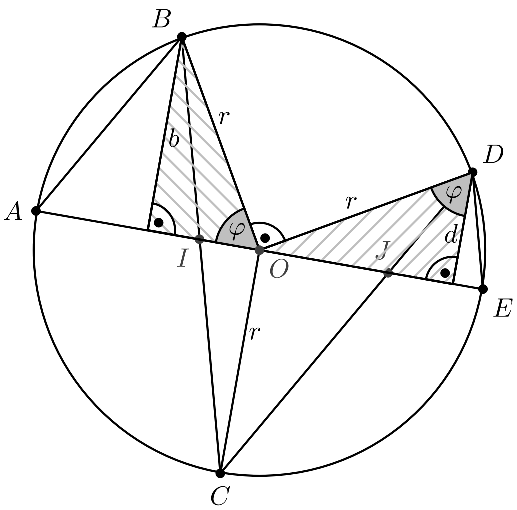
Harmadik megoldás

Ez a megoldás használja a legtöbbet. A megoldás azzal kezdődik, hogy behúzzuk az AE szakaszt. Mindkét korábbi megoldásból kiderült, hogy az AE szakasz átmérő a körben, így megfelezi a kör területét. A BC szakasz messe az AE átmérőt az I pontban, CD szakasz pedig a J pontban.

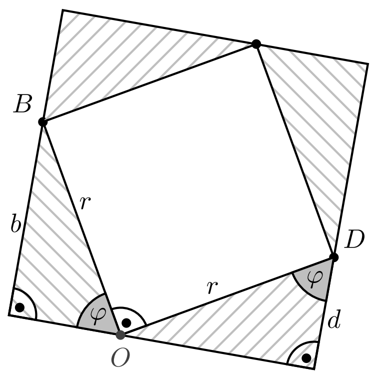




Most észrevehetjük, hogy a feladat állítása ekivalens azzal, hogy az $\triangle ABI$ és az $\triangle JDE$ háromszögek területének összege megegyezik az $\triangle IJC$ háromszög területével. Ez azért van így, mert ha igaz a feladat állítása, akkor a piros részből elhagyva az $\triangle IJC$ háromszöget, a megmaradó részt az $\triangle IJC$ háromszög, illetve az $\triangle ABI$ és az $\triangle JDE$ háromszögek is kör területének felére egészítik ki.



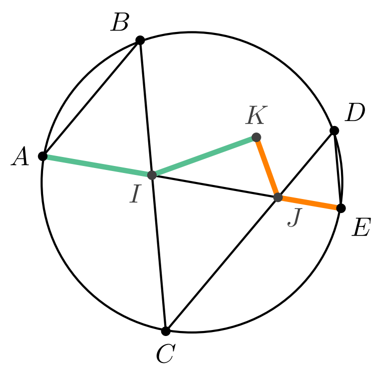
Mivel a három vizsgát háromszög hasonló (oldalaik párhuzamosak), és hasonló háromszögek területe arányos a megfelelő oldalaik négyzetével, így a területekre vonatkozó állítás ekvivalens azzal, hogy $AI^2 + JE^2 = IJ^2$. Az oldalak helyett akár a hozzájuk tartozó magasságokat is vehetjük. A B pont távolságát az AE átmérőtől jelölje b, a D pont távolságát az AE átmérőtől pedig jelölje d! A C pont távolsága az AE egyenestől éppen a kör r sugara, hiszen a C pont a megfelelő AE ív felezőpontja. Ezek az előbb felírt oldalaknak megfelelő magasságok a háromszögekben, így a bizonyítandó: $b^2 + d^2 = r^2$. Ha az $\angle AOB$ középponti szög nagyságát ϕ jelöli, akkor a $\angle DOE$ szög nagysága $90^\circ - \phi$, mert a $\angle BOD$ szög 90°-os (a $\angle BCD$ szög duplája). Ebből $b = r \cdot \sin\phi$ és $d = r \cdot \sin(90^\circ - \phi)$ világos a szögfüggvények definíciója alapján, és mivel $\sin(90^\circ - \phi) = \cos\phi$, így a szögfüggvények alaptulajdonságai alapján készen vagyunk.



Ezen a ponton a szögfüggvények csak egyszerűsítettek az életünkön, valójában nincs szükség rájuk. Ha ránézünk a $\triangle BOD$ háromszögre, észrevehetjük, hogy az egy négyzetnek a fele. Így már könnyű észrevenni, hogy az AE átmérő, a b és a d szakaszok, illetve a $\triangle BOD$ háromszög a Pithagorasz-tételt bizonyító ábra részlete. Ha a b szakasz másik végpontja T_B, a d szakaszé pedig T_D, akkor az $\triangle OBT_B$ és az $\triangle ODT_D$ háromszögek egybevágók, hiszen az összes szögük és az átmérőjük (a kör sugara) megegyezik. Így ebben a háromszögben a befogók összege (b és d) az átfogó r.

Megjegyzés

A magasságokra való áttérés nélkül is belátható az $AI^2 + JE^2 = IJ^2$ összefüggés. Ki is lehetne számolni őket (mondjuk a ϕ szög függvényében), de egy érdekes közvetlen megfontolás is alkalmazható.



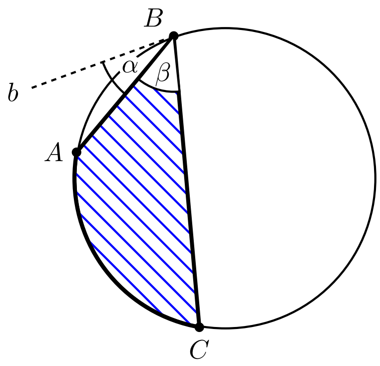
Először vegyük észre, hogy ha tükrözzük az A pontot a BC egyenesre, az E pontot pedig a CD egyenesre, ugyanahhoz a ponthoz jutunk. Ez azért van, mert A és E egyforma távol van a C ponttól, továbbá az $\angle ACB$ és $\angle DCE$ szögek összege megegyezik a BCD szöggel (hiszen ez utóbbi 45°, az $\angle ACD$ pedig derékszög).

Jelölje ezt a pontot K. Egyszerű szögszámolás mutatja, hogy az $\angle IKJ$ szög is derékszög (az $\angle AIB$ és $\angle DJE$ szögek összege 135°, így $\angle JIK + \angle KJI = 2\cdot 180° - 2\cdot 135° = 90°$). Ebből pedig az állítás világos a Pitagorasz tétel alapján, hiszen $AI = IK$ és $KJ = JE$.

Negyedik megoldás

A feladatot megoldhatjuk integrálással is.

Tekintsük a kör két olyan húrját, amelyek egyik végpontja közös és határozzuk meg a körlapnak a két húr közés eső részének területét!



Vizsgáljuk a BA, BC húrok közti tartományt, ahol ezek a húrok a B-beli b érintővel α illetve $(\alpha+\beta)$ szöget zárnak be. Az R sugarú körben az érintővel x szöget bezáró húr hossza $2R\sin x$, míg az egymással piciny Δx szöget bezáró h_1, h_2 hosszúságú húrok közti tartományt megközelítő háromszög területe $\frac{1}{2}h_1h_2\sin\Delta$, ahol $\lim_{\Delta\longrightarrow 0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$, így a teljes tartomány területe

$$T_\alpha^{\alpha+\beta} = 2R^2\int_\alpha^{\alpha+\beta}\sin^2 x dx.$$

$T_0^\pi = R^2\pi$.

A feladatban szereplő cikk-cakkon végighaladva a húrok a saját végpontjukban húzott érintővel mindig 45°-kal, azaz $\frac{\pi}{4}$ radiánnal nagyobb szöget zárnak be. Így a feladat állítása a

$$T_0^\alpha - T_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{4}} + T_{\alpha+\frac{\pi}{4}}^{\alpha+2\frac{\pi}{4}} - T_{\alpha+2\frac{\pi}{4}}^{\alpha+3\frac{\pi}{4}} + T_{\alpha+3\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 0 \qquad (1)$$

összefüggéssel analóg. Mivel a $\sin^2 x$ függvény periódusa π, így (1) első és utolsó tagja összevonható és feladatunk a

$$\int_\alpha^{\alpha+\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx + \int_{\alpha+2\frac{\pi}{4}}^{\alpha+3\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx = \int_{\alpha+\frac{\pi}{4}}^{\alpha+2\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx + \int_{\alpha+3\frac{\pi}{4}}^{\alpha+\pi}\sin^2 x dx \qquad (2)$$

integrálazonosság bizonyítása marad. Vegyük észre, hogy

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx + \int_{\varphi+2\frac{\pi}{4}}^{\varphi+3\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{4}} \sin^2 x + \sin^2(x+2\frac{\pi}{4}) dx =$$

$$= \int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{4}} 1 \quad dx = \frac{\pi}{4},$$

azaz (2) mindkét oldalán $\frac{\pi}{4}$ áll, tehát a két oldal értéke valóban egyenlő.