3. foglalkozás
A 2011. évi olaszországi matematikaverseny országos döntőjében tűzték ki az alábbi feladatot. A feladat igen nehéznek bizonyult, a versenyzőknek nem sikerült teljes megoldást találniuk.

Feladat

Egy 8-elemű H halmaz háromelemű részhalmazait akarjuk kiszínezni úgy, hogy diszjunkt részhalmazok színe különböző legyen. Legalább hány színre van ehhez szükség?

A szemináriumon is küzdöttünk a példával, újra és újra visszatértünk hozzá. Pataki János két szép bizonyítást mutatott, ezeket alább tárgyaljuk. Egy idő után felismertük, hogy a feladat általánosítása egy olyan kérdés, amelynek jelentős szerepe volt a matematika történetében. Az általános esetre ugyanis Martin Kneser 1955-ben megfogalmazott sejtése ad választ, amit Lovász László igazolt 1978-ban. Bizonyításában topológiai eszközöket használt, ami akkor forradalmian új gondolatnak számított. Módszerét Bárány Imre egyszerűsítésének felhasználásával Gyenes Zoltán és Hraskó András ismerteti.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy négy színnel megoldható a kívánt színezés, hárommal pedig nem.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy a 8-elemű halmaz elemei az $1, 2, \ldots, 7, 8$ számok.

A színeket is számokkal, nevezetesen 1, 2, 3 és 4-gyel jelöljük. Az ígért színezésben $i = 1, 2, 3$ esetén kapják az i színt azok a háromelemű részhalmazok, amelyek legkisebb eleme i. Ekkor az i színű halmazok között nincsenek diszjunktak, hiszen tartalmazzák i-t. Ezek után még a $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz háromelemű részhalmazait kell kiszíneznünk. Ehhez elég egyetlen további szín (a 4), hiszen egy ötelemű halmaz háromelemű részhalmazai között nincsenek diszjunktak.

Most megmutatjuk, hogy

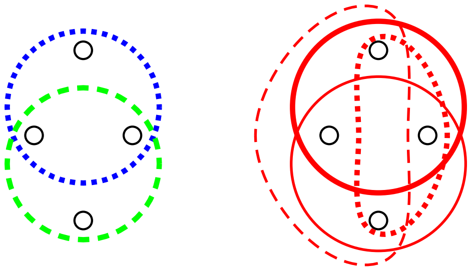
Lemma *három szín nem elegendő.*

Három bizonyítást adunk, mindegyik indirekt.

Tegyük fel tehát, hogy a H háromelemű részhalmazai kiszínezhetők három színnel – mondjuk pirossal, kékkel és fehérrel – a feltételnek megfelelő módon. A H halmaz háromelemű részhalamazait hívjuk *háromszögeknek*, a H négyelemű részhalmazait pedig *tetraédereknek*. Ezek után természetes módon beszélhetünk egy tetraéder négy lapjáról (mint a négyelemű halmaz háromelemű részhalmazairól), éleiről és csúcsairól. Mivel a H-nak 8 eleme van, egy tetraéder komplementere maga is tetraéder.

A Lemma I. bizonyítása

Először megmutatjuk, hogy a feltételeknek megfelelő színezésben van olyan tetraéder, amelynek mind a négy lapja azonos színű. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges T tetraédert. Föltehető, hogy T-nek vannak különböző színű lapjai, egyébként készen vagyunk. Mivel a T komplementerének és T-nek diszjunktak a lapjai , a komplementer tetraéder lapjait a T-ben használt színektől különböző-vel kell színeznünk. Ilyen szín legfeljebb egy van, a komplementer tetraédernek tehát valóban azonos színűek a lapjai.



Legyen tehát P egy olyan tetraéder, amelynek mondjuk pirosak a lapjai. Jelölje a P csúcsait A, B, C, D, a komplementer P' csúcsait pedig $1, 2, 3, 4$. Megmutatjuk, hogy már azok a háromszögek sem színezhetők ki, amelyeknek P-ben is és P'-ben is van csúcsa. Először is az $\{A, B, 1\}$ és a $\{C, D, 2\}$ háromszögek diszjunktak, van tehát közöttük nem piros. Föltehető, hogy mondjuk az $\{A, B, 1\}$ háromszög kék.

Megmutatjuk, hogy ezek után az összesen 24 darab $\{X, i, j\}$ típusú háromszög ($X \in \{A, B, C, D\}$ és $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$) színe egyértelműen meghatározott. Először is minden ilyen $\{X, i, j\}$ háromszög diszjunkt a P-nek az X csúcsot nem tartalmazó lapjától, tehát nem piros. Ezek a háromszögek viszonylag jól szemléltethetők, mint az alábbi táblázat mezői.

A kék színű $\{A, B, 1\}$ háromszög a táblázatban *-gal jelölt hat darab nem piros háromszög mindegyikével diszjunkt, így e hat háromszög színe fehér.

	A	B	C	D
{1,2}	+	+		
{1,3}	+	+		
{1,4}	+	+		
{2,3}			*	*
{2,4}			*	*
{3,4}			*	*

Mivel a vízszintes kettős elválasztó vonalra szimmetrikus élek : $\{1, 2\}$ és $\{3, 4\}$, $\{1, 3\}$ és $\{2, 4\}$, végül $\{1, 4\}$ és $\{2, 3\}$ diszjunktak, a + jelű háromszögek mindegyikéhez van tőle diszjunkt * jelű háromszög (például a táblázat középpontjára vonatkozó tükörképe), így a + jelű háromszögek színe kék.

Az élek "komplementer" elrendezése mutatja, hogy a további tizenkettő, eddig még nem azonosított színű háromszög mindegyikéhez van tőle diszjunkt, azonosított színű háromszög. Például a C oszlopában még nem kitöltött $\{C, 1, 3\}$-hoz ilyen a D oszlopában lévő már fehér színű $\{D, 2, 4\}$ háromszög.

	A	B	C	D
{1,2}	kék	kék		
{1,3}	kék	kék		
{1,4}	kék	kék		
{2,3}			fehér	fehér
{2,4}			fehér	fehér
{3,4}			fehér	fehér

	A	B	C	D
{1,2}	**a**	**b**	p	q
{1,3}	**c**	**d**	r	s
{1,4}	**e**	**f**	t	x
{2,3}	f	e	**x**	**t**
{2,4}	d	c	**s**	**r**
{3,4}	b	a	**q**	**p**

A bal oldali táblázatban ezeket a párokat azonos betűk jelölik úgy, hogy a kövéren szedett betű olyan háromszöget jelöl, amelynek a színét már ismerjük. Ennek alapján a teljes táblázatot ki lehet tölteni, hiszen az azonos betűjelű háromszögek színe különböző és egyikük sem piros. Ezt a kitöltést mutatja az alábbi táblázat.

	A	B	C	D
{1,2}	kék	kék	kék	kék
{1,3}	kék	kék	kék	kék
{1,4}	kék	kék	kék	kék
{2,3}	fehér	fehér	fehér	fehér
{2,4}	fehér	fehér	fehér	fehér
{3,4}	fehér	fehér	fehér	fehér

Befejezésül vegyük észre, hogy például az $\{X, Y, i\}$ típusú $\{A, B, 2\}$ háromszög diszjunkt mind a kék színű $\{C, 1, 3\}$, mind pedig a fehér színű $\{C, 3, 4\}$ háromszöggel, így szükségképpen piros színű. Ugyanígy a $\{C, D, 3\}$ háromszög diszjunkt a kék színű $\{A, 1, 2\}$ és a fehér színű $\{A, 2, 4\}$ háromszögekkel. A diszjunkt $\{A, B, 2\}$ és a $\{C, D, 3\}$ háromszögek tehát pirosak, ami ellentmondás. ■

A Lemma II. bizonyítása

A fenti megoldás kiindulásakor bizonyított tulajdonság – van olyan tetraéder, amelynek azonos színűek a lapjai – bizonyításából több is kiolvasható: ha a háromszögek a kívánt módon kiszínezhetők három színnel, akkor minden tetraéder és a komplementere közül legalább az egyiknek minden lapja ugyanolyan színű. Hívjuk az ilyen tetraédereket *egyszínűnek*, a lapok színét pedig az egyszínű tetraéder színének. Mivel összesen $\binom{8}{4} = 70$ tetraéder van, közülük eszerint legalább 35 egyszínű. Minden egyszínű tetraéder piros, kék vagy fehér, így van legalább tizenkét azonos színű, mondjuk piros tetraéder.

Az a feltétel viszont, hogy a piros tetraédereknek nem lehetnek diszjunkt lapjai, nagyon erős megszorítás. Két piros tetraéder nem lehet diszjunkt, a közös részük nem lehet egyetlen csúcs (ekkor a szemközti lapok volnának diszjunktak) és nem lehet egy él sem. (Ekkor a két tetraéderben a közös él egy egy végpontja és a másik két csúcs egy-egy diszjunkt háromszöget alkot.)

A piros tetraéderek rendszerében tehát bármely kettőnek *közös lapja van*! Megmutatjuk, hogy nem lehetséges 12 ilyen tetraéder.

Legyen $P_i = \{1, 2, 3, i\}$ és $P_j = \{1, 2, 3, j\}$ $(3 < i < j)$ két piros tetraéder. Minden további P piros tetraédernek mindkettejükkel van közös lapja.

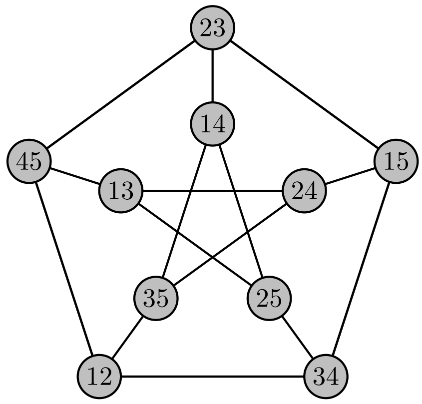
Ha ez ugyanaz, akkor ez az $\{1, 2, 3\}$ lap, a P tetraéder $\{1, 2, 3, k\}$ alakú. Ezt a negyedik k csúcsot összesen 5-féleképpen jelölhetjük ki.

Ha ez nem ugyanaz, tehát $P \cap P_i \neq P \cap P_j$, akkor $P = \{i, j, x, y\}$ alakú, ahol $\{x, y\} \subset \{1, 2, 3\}$. Ilyen $\{x, y\}$ részhalmaz és ezzel együtt ilyen P tetraéder pedig legfeljebb három van. A nyolcelemű halmazon tehát legfeljebb $5 + 3 = 8$ tetraéder adható meg úgy, hogy bármely kettőnek legyen közös lapja, nem létezhet tehát legalább 12 piros tetraéder. ■

A Lemma ígért harmadik bizonyítását az általános eset részeként vesszük elő.

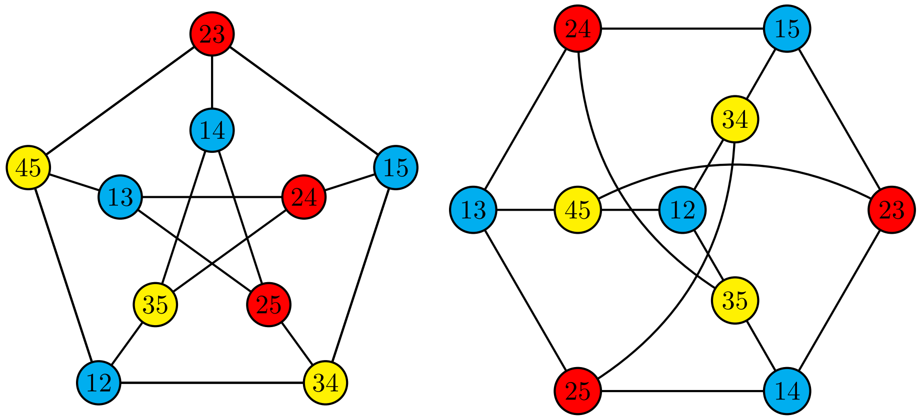
Az általános probléma

Tekintsük egy n elemből álló halmaz k elemű részhalmazait egy gráf csúcsainak és két csúcsot akkor tekintsünk szomszédosnak, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az így kapott gráfot Kneser gráfnak nevezik és $KG_{n,k}$-val jelölik. A legkisebb „érdekes" eset a $KG_{5,2}$ Kneser gráf, ami nem más, mint az alábbi ábrán is látható Petersen gráf.



A Petersen gráffal más megközelítésben már találkoztunk a Bergengóc példatárban (19. feladat) és a matek.fazekas.hu weboldalon is megtalálható „Gráfok spektruma" tanítási anyagban. Most azt a kérdést tesszük fel, hogy legkevesebb hány színnel lehet kiszínezni a gráf csúcsait, hogy élben szomszédos csúcsok mindig különböző színűek legyenek. Általában a G gráfhoz ilymódon tartozó számot $\chi(G)$-vel jelölik és a G gráf kromatikus számának nevezik. A kromatikus számról egyre többet tudunk, pld. az egyik leghíresebb eredmény a „Négyszíntétel", ez azt mondja ki, hogy ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$. A téma sok lényeges és érdekes részére rávilágít a honlapunkon található előadásjegyzetek közül Recski Andrásé (Gráfok színezése) és Simonyi Gáboré (Információközlés és gráfelmélet).

Mennyi a Petersen gráf kromatikus száma? Kiszínezhető-e pld. két színnel? Ezt azonnal cáfolná, ha lenne a gráfban háromszög, de a Petersen gráfban nincs ilyen. Mégsem színezhető ki három színnel ez a gráf, hiszen van benne páratlan kör. Három színnel azonban már megoldható a színezés, ezt mutatja az alábbi két ábra. Tehát $\chi(KG_{5,2}) = 3$.



Az olaszországi verseny fent említett feladata a $KG_{8,3}$ Kneser gráf kromatikus számára, a $\chi(KG_{8,3})$ mennyiségre kérdez rá. Martin Kneser 1955-ben fogalmazta meg a sejtést, miszerint $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$.

Meglehetősen egyszerű annak igazolása, hogy ennyi szín elég. Az általános esetben sem kell mást csinálni, mint amit a szemmináriumi anyag elején leírtunk $KG_{8,3}$ esetén. Jelölje 1, 2, $\ldots$, $(n - 2k + 1)$ és $(n - 2k + 2)$ a színeket és a részhalmazokat színezzük a bennük található legkisebb elem szeint: ha ez az elem j, akkor $j < (n - 2k + 2)$ esetén ez a részhalmaz legyen j színű, ha pedig $j \geq (n - 2k + 2)$, akkor a részhalmaz színe legyen $(n - 2k + 2)$. Az $(n - 2k + 2)$ színű halmaz elemei az n, $(n - 1)$, $\ldots$, $n - (2k - 2)$ számok közül, tehát $(2k - 1)$ lehetséges szám közül kerülnek ki. Mivel minden halmaz k elemből áll, így két ilyen halmaz nem lehet diszjunkt. A $j < (n - 2k + 2)$ esetben sem lehet két j színű halmaz diszjunkt, hiszen legkisebb elemük – a j – közös. Ez a színezés tehát valóban megfelelő.

Jóval nehezebb igazolni, hogy $(n - 2k + 1)$ szín nem elégséges. Ezt Lovász László a „Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy" címmel a Journal of Combinatorial Theory folyóirat 1978 novemberi számában megjelent cikkében igazolta. Ugyanezen folyóirat ugyanezen számának következő két oldalán Bárány Imre ad Lovász cikkétől inspirálva – a topológiai módszert másképp alkalmazva – rövid bizonyítást a Kneser sejtésre.

Lovász László utal rá, hogy őt magát mi inspirálta. Simonovits Miklós hívta fel a figyelmét egy érdekes konstrukcióra. Ő olyan gráfot keresett, amelyben nincs kicsi páratlan kör. Ha egy gömbfelület pontjait (vagy azok egy részhalmazát) egy gráf csúcsainak tekintjük és két pontot akkor mondunk szomszédosnak, ha térbeli távolságuk a gömb átmérőjénél csak legfeljebb egy icipicivel kisebbek akkor ilyen gráfot kapunk. Induljunk ki egy pontból és haladjunk az éleken! Így az első lépésben ugyan nagyon eltávolodunk a kezdőpontunktól a gömbön, de a második lépésben visszajutunk a közelébe, tehát a másodszomszédok közeli fizikai távolságban vannak az eredeti ponttól, és így a negyed-, hatod- stb. szomszédok sem lehetne messze, pedig a páratlan körhöz az kell, hogy valamely párosodik szomszéd az eredetivel átellenes pólus közelébe kerüljön. A gömb geometriája tehát egy érdekes gráfos konstrukcióhoz segít hozzá.

Térjünk rá a topológiai módszerre, Bárány Imre megközelítésében! Külön tárgyaljuk a $KG_{5,2}$, $KG_{8,3}$ speciális Kneser gráfokat és az általános esetet. Első menetben konstruálunk a megfelelő dimenziós gömbfelületen egy „kényelmes" ponthalmazt, majd azt és az indirekt feltevést felhasználva eljutunk a gömb egy olyan felosztásához (a gömb nem diszjunkt nyílt halmazok uniójaként való előállításához), amelynek létezése ellentmond a topológiai egy nevezetes tételének. Az ellentmondás fogja igazolni az indirekt feltevés lehetetlenségét, tehát Kneser sejtését.

Pontkonstrukció gömbökön

A körvonalon fel tudunk venni úgy 5 pontot úgy, hogy mindegyik nyílt félkörön – azaz olyan félkörvonalon, amelyhez nem tartoznak hozzá a végpontjai – legalább 2 legyen az adott pontok közül. Valóban, egy szabályos ötszög csúcsai megfelelőek erre.

A gömbfelületen fel tudunk venni 8 pontot úgy, hogy mindegyik nyílt félgömbön – azaz olyan félgömfelületen, amelyhez nem tartozik hozzá a határoló köre – legalább 3 legyen az adott pontok közül. Ez már nem is annyira nyilvánvaló, pld. első ötletként mindenkinek a kocka nyolc csúcsa adódik, de ez nem megfelelő. A két-két szemközti csúcson – tehát összesen négyen – áthaladó főkör két olyan nyílt félgömbre vágja a kockát, amelyeken csak két-két további csúcs van. Kis módosítással kaphatunk a kockából megfelelő ponthalmazt. Forgassuk el az egyik –és csakis az egyik – lap négy csúcsát 45°-kal a lap és az azzal szemköztes lap közös forgástengelye körül! Nem igazoljuk, hogy az így kapott pontnyolcas már megfelelő, csak fehívjuk a figyelmet a következő ötletre: ha lenne rossz félgömb, akkor az tudnán úgy mozgatni, hogy továbbra is rossz legyen, de határolóvonalán legyen az egyik adott pont, sőt ezután e körül a adott pont körül forgatva a félgömböt olyan rossz félgömbhöz juthatunk, amelynek határolóvonalára egy másik adott pont is ráesik. Ha tehát van olyan nyílt félgömb, amelyen csak két pont van, akkor ilyet elég keresni az adott pontok pontpárjain keresztülfutó főkörök által meghatározott félgömbök között.

Általában igaz az alábbi állítás:

David Gale Lemmája Az S^{n-2k} gömbön[1] felvehető n pont úgy, hogy bármelyik nyílt félgömbön (fél S^{n-2k}-n) legalább k pont legyen.

Az indirekt feltevés, a gömb felosztása

Tegyük fel, hogy az 5 elemből álló halmaz kételemű részhalmazai kiszínezhetők két színnel – mondjuk 1-gyel és 2-vel – úgy, hogy a diszjunkt részhalmazok különböző színűek. Tekintsük a kört és rajta a halmaz öt pontját az előző részben leírt elrendezésben. Képezzük a körvonal pontjainak U_1, U_2 halmazait a következőképpen. Ha P a körvonal tetszőleges pontja, akkor tekintsük azt a nyílt félkörívet, amelynek közepén van P. A ponthalmaz konstrukciója szerint az öt adott pont közül legalább kettő esik erre a nyílt félkörvonalra. Tekintsük

[1] S^m-mel jelöljük az $(m+1)$ dimenziós tér origójától pontosan 1 egység távolságra levő pontok halmazát, tehát S^1 a körvonal, S^2 a gömbfelület stb.

az erre a félkörvonalra eső adott pontokból álló párok színét és ha van köztük 1 színű, akkor tegyük be P-t az U_1 halmazba, ha pedig van 2 színű, akkor tegyük be P-t az U_2 halmazba. Ezen a módon P az U_1, U_2 halmazok közül legalább az egyikbe bekerül, de lehet, hogy mind a kettőnek eleme lesz.

Az U_1, U_2 halmazok nyíltak, tehát ha pld. $P \in U_1$, akkor a P-től kellően kicsiny pozitív távolságra levő minden pont benne van U_1-ben. Az eredeti ötelemű halmaz két színnel való, az indirekt feltevésnek megfelelő színezése garantálja, hogy ha P_1 és P_2 egy átmérő végpontjai, akkor nem lehetnek benne mindketten ugyanabban a halmazban. Valóban, ha pld. mindketten U_1 elemei lennének, akkor azok a nyílt félkörívek, amelyeknek a közepén van P_1 illetve P_2 tartalmaznának egy egy 1 színű pontpárt, amelyek szükségképpen diszjunktak lennének, hiszen diszjunkt félkörökön vannak. Az U_1, U_2 nyílt halmazok tehát együtt lefedik a körvonalat, de bármely két átellenes pont közül mindegyik csak legfeljebb az egyiket fedi le.

Tegyük fel, hogy most azt, hogy a 8 elemből álló halmaz háromelemű részhalmazai kiszínezhetők három színnel – mondjuk 1-gyel, 2-vel és 3-mal – úgy, hogy a diszjunkt részhalmazok különböző színűek. Tekintsük a gömböt és rajta a halmaz nyolc pontját az előző részben leírt elrendezésben. Képezzük a gömbfelület pontjainak U_1, U_2, U_3 halmazait a következőképpen. Ha P a gömbfelület tetszőleges pontja, akkor tekintsük azt a nyílt félgömblapot, amelynek közepén van P. A ponthalmaz konstrukciója szerint a nyolc adott pont közül legalább három esik erre a nyílt félgömblapra. Tekintsük az erre eső adott pontokból álló hármasok színét és ha van köztük i színű ($i \in \{1; 2; 3\}$), akkor tegyük be P-t az U_i halmazba. Ezen a módon P az U_1, U_2, U_3 halmazok közül legalább az egyikbe bekerül, de lehet, hogy többnek is eleme lesz.

Az előzőhöz hasonlóan igazolható, hogy az U_1, U_2, U_3 halmazok nyíltak, együtt lefedik a teljes gömbfelületet, de bármely két átellenes pont közül mindegyik halmaz csak legfeljebb az egyiket fedi le.

Az általános esetben David Gale konstrukciójából és a Kneser sejtésnek ellentmondó (indirekt) feltevésből az S^m gömbfelület ($m = n - 2k$) olyan $U_1, U_2, \ldots, U_{m+1}$ nyílt halmazaihoz jutunk, amelyek együtt lefedik a gömböt, de bármelyikük bármely átellenes pontpárból legfeljebb csak az egyiket tartalmazza.

Itt egy technikai lemmát kell közbeiktatnunk, amelynek igazolását nem részletezzük.

Technikai Lemma Ha az S^m gömbfelület előáll az $U_1, U_2, \ldots, U_{m+1}$ *nyílt* halmazok uniójaként, amelyek közül bármelyik bármely átellenes pontpárból legfeljebb csak az egyiket tartalmazza, akkor a gömb egyúttal felírható $(m+1)$ ugyanilyen tulajdonságú *zárt* halmaz uniójaként is.

A lemma igazolása megtalálható Bollobás Béla interneten is elérhető „The art of mathematics: coffee time in Memphis" könyvének 117. fejezetében.

Segít a topológia

LSB tétel *Luszternyik és Schnirelmann (1930), Borsuk (1933)*
Ha az S^m gömböt előállítjuk $(m+1)$ zárt halmaz uniójaként, akkor legalább az egyik halmaz tartalmaz legalább egy átellenes pontpárt.

A Kneser sejtést tagadva, David Gale konstrukcióját és a fenti Technikai Lemmát alkalmazva olyan halmazrendszerhez jutunk, amely ellentmond az LSB tételnek. Ez igazolja a Kneser sejtést. ∎

Az LSB tétel az $m = 1$ esetben azt mondja ki, hogy ha a kört előállítjuk két zárt halmaz uniójaként, akkor legalább az egyik zárt halmaz tartalmaz legalább egy átellenes pontpárt. Ez az állítás egyszerűen igazolható. Ha találunk egy olyan pontot, amelyik mindkét zárt halmazban benne van, akkor ez a pont a vele átellenes ponttal együtt benne lesz az egyik zárt halmazban, tehát készen leszünk. Most előállítunk egy ilyen pontot. A két zárt halmaz – a továbbiakban a és b – nem üres, legyen $A_0 \in a$, $B_0 \in b$ az egyikben illetve a másikban. Tekintsük a nem hosszabbik A_0B_0 ív F felezőpontját. Ha $F \in a$, akkor legyen $A_1 = F$ és $B_1 = B_0$, ha viszont $F \in b$, akkor legyen $A_1 = A_0$ és $B_1 = F$ (ha $F \in a \cap b$, akkor készen is vagyunk). Haladjunk így tovább, képezzük a zárt A_nB_n ívek sorozatát. Ezek hossza 0-hoz tart, lesz egy és csakis egy olyan C pont, amelyiket mindegyik tartalmazza (Cantor axióma). A C pont az $\{A_n\}$ és a $\{B_n\}$ sorozatnak is torlódási pontja, így az a, b halmazok zártsága miatt mindkét halmaznak eleme.

Az LSB tétel az $m = 2$ esetben egy másik nevezetes topológiai tétellel áll összefüggésben. A matek.fazekas.hu portálon található előadásjegyzetek között fellelhető Szűcs András „Levesek és sünök" címen 2007. november 20-án megtartott előadásának anyaga. Ebben az ELTE professzora igazolja az alábbi tételt:

Borsuk-Ulam tétel Minden $f: \quad S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos függvényre van olyan $x \in S^2$ pont, amelyre $f(x) = f(-x)$.

Tehát a tétel szerint a gömbfelületen mindenütt értelmezett, a síkra képező folytonos függvény a gömb valamely két átellenes pontját ugyanoda képezi. Az LSB tétel az $m = 2$ esetben következik a Borsuk-Ulam tételből. Tekintsük a gömbfelületen a Z_1, Z_2, Z_3 zárt halmazokat, melyek uniója a teljes gömb! Jelöljünk ki három tetszőleges pontot – jelben Q_1, Q_2 és Q_3 – a síkon! Legyen vektoraink kiindulópontja az erre a síkra nem illeszkedő tetszőleges O pont és értelmezzük a gömbről a síkra képező f függvényt a következőképpen: ha P a gömb tetszőleges pontja, akkor legyen $f_1(P)$, $f_2(P)$ és $f_3(P)$ a P pont távolsága a Z_1, Z_2, Z_3 halmazoktól! Mivel ezek a halmazok zártak, így az $f_i(P)$ érték pontosan akkor lesz zérus, ha $P \in Z_i$. Ha egy pontban mindegyik függvény értéke zérus, akkor ez a pont és a vele átellenes pont az $m = 1$ esethez hasonlóan megfelelő pontpár. Amúgy az f_1, f_2, f_3 függvények mindenhol értelmezettek, nemnegatívak és folytonosak a gömbön. Feltehető, hogy nincs olyan pont, ahol mindegyik zérus lenne, de olyan pont sincs, ahol egyik sem zérus, hiszen a P pont eleme legalább az egyik zárt halmaznak, így az attól való távolsága nulla. Legyen $f(P)$ az

$$\frac{f_1(P)\overrightarrow{OQ_1} + f_2(P)\overrightarrow{OQ_2} + f_3(P)\overrightarrow{OQ_3}}{f_1(P) + f_2(P) + f_3(P)} \tag{1}$$

vektor végpontja! Az $f(P)$ pont a $Q_1Q_2Q_3$ háromszöglap pontja – sőt, a $Q_1Q_2Q_3$ háromszögvonalé –, tehát az f függvény a gömbfelületet folytonos módon a síkra képezi. A Borsuk-Ulam tétel szerint az f leképezés egy átellenes pontpár – jelben P^+ és P^- – két tagját ugyanoda képezi. Ha a P^+ ponton az egyik f_i –pld. az f_1 – függvény értéke 0, akkor ezt a pontot az f leképezés a Q_2Q_3 szakaszra képezi. Mivel $f(P^-) = f(P^+)$, így $f(P^-)$ is a Q_2Q_3 szakaszra keül, tehát $f_1(P^-) = 0$, azaz $P^- \in Z_1$ és $P^+ \in Z_1$, ami igazolja az LSB tételt.

A szemináriumi anyagot lejegyző tanárok köszönik Rácz Béla András segítségét.