2. foglalkozás
Pataki János egy újabb harmadfokú relációról

Feladat Az x, y valós számok összege pozitív, továbbá

$$x^3 + y^3 + 3xy = 1. \tag{1}$$

Határozzuk meg $x + y$ értékét!

1. megoldás
Dolgozzunk a

$$\sigma_1 = (x + y), \qquad \sigma_2 = xy$$

elemi szimmetrikus polinomokkal. Ezekkel

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

azaz aredeti (1) egyenletünk így írható:

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_2 = 1,$$

ami σ_2-ben lineáris:

$$\sigma_1^3 - 1 = 3\sigma_2(\sigma_1 - 1). \tag{2}$$

Itt vagy $\sigma_1 - 1 = 0$, azaz $x + y = 1$, vagy leoszthatunk ezzel a tényezővel és kapjuk, hogy

$$\sigma_1^2 + \sigma_1 + 1 = 3\sigma_2 \tag{3}$$

Szorozzuk ezt az egyenletet néggyel, hogy felhasználhassuk a

$$4\sigma_2 = 4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 = \sigma_1^2 - \Delta^2$$

azonosságot!

$$4\sigma_1^2 + 4\sigma_1 + 4 = 3(\sigma_1^2 - \Delta^2),$$

azaz

$$(\sigma_1^2 + 2)^2 = -3\Delta^2. \tag{4}$$

Az ellenkező előjelű négyzetek csak akkor lehetnek egyenlőek, ha mindketten zérusok, azaz $\sigma_1^2 + 2 = \Delta = 0$, tehát $x = y = -1$.

Azt kaptuk, hogy amennyiben $x + y$ pozitív, akkor 1-gyel egyenlő. Sőt, fent azt vezettük le, hogy az $x = y = -1$ esettől eltekintve $x + y = 1$.

Megjegyzés
*Algebrai görbé*nek nevezzük egy polinom zérushelyeinek halmazát. Vizsgált (1) egyenletünk bármely rögzített x esetén harmadfokú y-ban, tehát van valós gyöke. A (1) egyenlet által meghatározott algebrai görbének tehát végtelen sok (valós) pontja van. Fent azt láttuk, hogy egy pont kivételével mind ráesik az $x + y - 1 = 0$ algebrai görbére.

Nevezetes algebrai geometriai tétel, hogy két algebrai görbének vagy véges sok közös pontja van, vagy van közös komponensük, egy algebrai görbe. Az $p(x, y) = x + y - 1$ polinom irreducibilis, nem írható fel kisebb fokú polinomok szorzataként, így a közös komponens csak ez az egyenes lehet. A (1)-ből adódó $q(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy - 1$ polinom tehát nem irreducibilis, hanem osztható a $p(x,y)$ polinommal. A fenti megoldás nem állította elő a q/p hányadost, de a magasabb matematika említett tételeiből adódik, hogy ez a hányados is egy polinom.

A hányados előállítása nem reménytelen, de nem is automatikus: a többváltozós polinomok világában nincs maradékos osztás, nem lehet jól értelmezni a ,,maradék"-ot. Itt maga a levezetés (2-3) adja a felbontást, eredeti görbénk egyenlete a

$$(\sigma_1 - 1) \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2) = 0$$

alakban is írható. Ezt nem fejezzük most ki x-szel és y-nal, mert a szorzatalak a következő megoldásban úgyis közvetlenül adódik.

2. megoldás

A profi felhasználja, hogy

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx). \tag{5}$$

Ekkor a 0-ra rendezett feltételből az $x \leftarrow x,\ y \leftarrow y, z \leftarrow -1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1) = 0. \tag{6}$$

A második tényező

$$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2\right]$$

most pozitív, így $x + y = 1$.

Megjegyzések

I. Innen az is látható, hogy ha nem kötjük ki azt, hogy $x + y > 0$, akkor a (1) egyenlettel meghatározott alakzat az $x + y = 1$ egyenes és az

$$r(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0$$

egyenletű ,,görbe" uniója, amelynek valós pontja csak egy van, a $(-1; -1)$ pont.

II. Ha nem ismerjük a (5) azonosságot (vagy nem vesszük észre, hogy működik), akkor még mindig gyanút foghatunk és eloszthatjuk az $f(x,y) = x^3+y^3+3xy-1$ polinomot a $g(x,y) = x + y + t$ polinommal, ahol t határozatlan. Ekkor a maradék az $f(x,y)$ polinom helyettesítési értéke az $x = -y - t$ helyen. (Minden úgy megy, mint egyváltozós esetben.) Tehát

$$f(x,y) = q(x,y) \cdot g(x,y) + r(x,y), \text{ ahol } r(x,y) = f(-y-t, y).$$

Így

$$r(x,y) = -(y+t)^3 + y^3 - 3(y+t)y - 1 = -(t+1)[3y(y+t) + t^2 + t + 1].$$

Innen pedig kiolvasható, hogy a maradék $t = -1$ esetben 0, egyébként az y másodfokú polinomja. Így pedig nem nyuszi a kalapból, ha azzal folytatjuk, hogy "vegyük észre, hogy ha az $x^3+y^3+3xy-1$ polinomot elosztjuk az $x+y-1$ polinommal", akkor az osztást elvégezve a (6) felbontást kapjuk.

Ez így szép és hasznos, és valahogy így kell ezt a feladatot ,,leizmozni". A most következő ,,kisipari megközelítés" hangulatosabb. A megoldás oda tereli a dolgot, hogy ha $x + y = 1$, akkor a feltétel az

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (x + y)^3$$

azonossággá válik. Ezek után a lehető legkorlátoltabb stratégia: ,,csak" annyit kell megmutatni, hogy a feltételek esetén sem $x+y > 1$, sem pedig $(0 <)x+y < 1$ nem lehetséges.

3. megoldás

Tegyük fel, hogy $x + y > 1$. Ekkor $1 < (x + y) < (x + y)^3$. A jobb oldalt kifejtve és $(x + y)$-nal osztva

$$1 < \frac{x^3 + y^3 + 3xy(x + y)}{x + y} = \frac{x^3 + y^3}{x + y} + 3xy. \tag{7}$$

Tanulságos, hogy az $x+y > 1$ feltevést még egyszer fel kell használni : a (7) jobb oldalán álló tört értéke **nő**, ha a nevezőt 1-gyel helyettesítjük. Ezzel igazoltuk, hogy ha $x + y > 1$, akkor $1 < x^3 + y^3 + 3xy$.

Ugyanígy kapjuk, hogy ha $0 < x + y < 1$, akkor $1 > x^3 + y^3 + 3xy$.