1. foglalkozás: Harmadfokú vagy három ismeretlen?

Alább néhány harmadfokú kifejezést illetve háromismeretlenes egyenletrendszert elemez Hraskó András, Kiss Géza és néhány diák.

Kísérletezéssel kezdünk.

0. feladat *Keressünk néhány olyan (x, y, z) valós számhármast, amelyre*

$$x + y + z = 2011, \qquad \textit{és} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2011}.$$

A diákok próbálkozásai motiválják a következő feladatot, amely a Kvantban jelent meg.

1. feladat

Mutassuk meg, hogy ha az x, y, z valós számokra

$$x + y + z = a, \qquad \textit{és} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

akkor x, y és z egyike a-val egyenlő!

I. Megoldás

Tekintsük a

$$p(t) = (t - x)(t - y)(t - z) \tag{1}$$

harmadfokú polinomot, melynek zérushelyei a feladatban említett x, y, z számok. A p polinom alakja a szorzások elvégzése után

$$p(t) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz, \tag{2}$$

ahol a feltételek szerint $x + y + z = a$, illetve a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \tag{3}$$

egyenletből $axyz$-vel való átszorzás után

$$a(xy + yz + zx) = xyz, \tag{4}$$

tehát ha $xy + yz + zx = \beta$, akkor $xyz = a\beta$, azaz polinomunk a

$$p(t) = t^3 - at^2 + \beta t - a\beta \tag{5}$$

alakba írható át. Azt kell igazolnunk, hogy x, y és z egyike a, azaz p-nek gyöke a $t = a$ szám. Erről meggyőződhetünk behelyettesítéssel:

$$p(a) = a^3 - a \cdot a^2 + \beta a - a\beta,$$

ami valóban zérus. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyezzük, hogy

$$p(t) = (t - a)(t^2 + \beta),$$

azaz a másik két gyök $t_2 = \sqrt{\beta}$ és $t_3 = -\sqrt{\beta}$ egymás ellentettje.

II. Megoldás *Machó Bónis ötletéből*

A $z = -b$ jelöléssel egyenletrendszerünk a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a + b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & = & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{array} \right. \tag{6}$$

alakba írható át. Ha

$$u = x + y = a + b, \qquad \text{és} \qquad v = xy = ab,$$

akkor $u = 0$ esetén $a = -b = z$, azaz a feladat állítása automatikusan teljesül, míg $u \neq 0$ esetén (6) egyenletrendszerünk a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & a + b \\ xy & = & ab, \end{array} \right. \tag{7}$$

tehát a keresett x és y – valamint egyúttal a és b is – a

$$t^2 - ut + v = 0 \tag{8}$$

másodfokú egyenlet két gyöke, így $x = a$ vagy $y = a$ – és egyúttal $y = b = -z$ vagy $x = b = -z$. Ezzel az állítást igazoltuk.

III. Megoldás *Ágoston Péter*

Hozzuk közös nevezőre a megadott második egyenlet bal oldalát!

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{a},$$

tehátaz első egyenletet felhasználva

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{x + y + z},$$

tehát

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz,$$

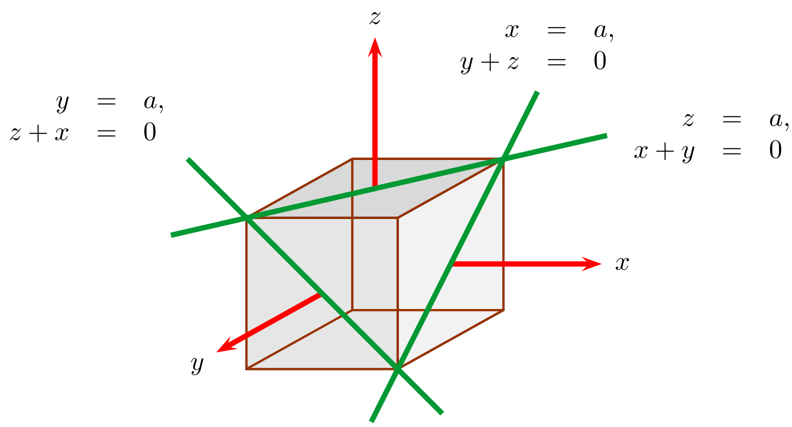
amit beszorozva, rendezve és újra szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 0. \tag{9}$$

A fenti (9) összefüggés szerint az x, y, z változók közül valamelyik kettő összeg zérus, így a megadott $x + y + z = a$ reláció miatt a kimaradó ismeretlen értéke a. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés

Hiába értik meg a példa megoldását a nebulók, az egyenletrendszer megoldáshalmazának ábrázolása továbbra is nehéz feladat marad. Segíti az ábrát, ha segédalakzatként felvesszük azt a kockát, amelynek csúcsai a térbeli derékszögű koordinátarendszer $(\pm a; \pm a; \pm a)$ koordinátájú pontjai.



2. feladat Oldjuk meg az

$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

1. Emeljük mindkét oldalt köbre! Alkalmazzuk ehhez az $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ azonosságot!

$$(4x-1) + (4-x) + 3\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}(\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x}) = -3. \tag{10}$$

2. Használjuk fel az eredeti összefüggést!

$$(4x-1) + (4-x) + 3\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}(-\sqrt[3]{3}) = -3. \tag{11}$$

3. Rendezés és 3-mal való osztás után kapjuk, hogy

$$x + 2 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{-4x^2 + 17x - 4} \tag{12}$$

4. Emeljünk újra köbre!

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = -12x^2 + 51x - 12. \tag{13}$$

5. Rendezzünk 0-ra!

$$x^3 + 18x^2 - 39x + 20 = 0. \tag{14}$$

6. Vegyük észre, hogy a (14) bal oldalán található polinomnak gyöke az 1, így $(x-1)$ kiemelhető:

$$(x-1)(x^2 + 19x - 20) = 0. \tag{15}$$

7. A (15) bal oldalán található másodfokú tényezőnek is gyöke az 1, így $(x-1)$ újra kiemelhető:

$$(x-1)(x-1)(x+20) = 0. \tag{16}$$

8. Az egyenlet gyökei: $x_1 = x_2 = 1$ és $x_3 = -20$.

9. Meglepődve tapasztaljuk, hogy az 1 nem gyöke az egyenletnek, hiszen az eredeti egyenlet bal oldalán $x = 1$ esetén

$$\sqrt[3]{4 \cdot 1 - 1} + \sqrt[3]{4 - 1} = 2 \cdot \sqrt[3]{3},$$

áll, míg a jobb oldal negatív.

Az $x = -20$ szám valóban gyök:

$$\sqrt[3]{4 \cdot (-20) - 1} + \sqrt[3]{4 - (-20)} = \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{24} =$$

$$= \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{8}) = \sqrt[3]{3} \cdot (-3 + 2) = -\sqrt[3]{3}.$$

Megjegyzés Egy alkalommal az alábbi beszélgetés hangzott el két diák – alább A és B – között:

A: mindegyik gyök jó kell legyen, hiszen mindegyik lépést megcsinálhatjuk visszafelé is.

B: mi a (fent 2.-ben található) behelyettesítés visszafelé? Talán kihelyettesítés?

Valóban, a 2. lépésben jött be a hamis gyök, az egyetlen megoldás a (-20).

3. feladat

Alább a és b valós számokat jelölnek. Igaz-e, hogy

a) $a + b = 0 \iff a^2 + b^2 = -2ab$?

b) $a + b + c = 0 \iff a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$?

Megoldás

a) $a^2 + b^2 = -2ab \iff a^2 + 2ab + b^2 = 0 \iff (a + b)^2 = 0 \iff (a + b) = 0$.

b) Ismeretes, hogy $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$, tehát $(a + b + c) = 0$ esetén $0 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$, de ilyenkor $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$, így $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, tehát a $\Longrightarrow$ következtetés jogos. Viszont

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$

$$= (a + b + c)\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2},$$

és a legutóbbi tényező pontosan akkor zérus, ha $a = b = c$, tehát az $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a + b + c = 0$ vagy $a = b = c$. Így a $\Longleftarrow$ következtetés nem jogos.

Megjegyzés

A fentebbi 2. feladat is ehhez a b) problémához köthető. Az

$$a = \sqrt[3]{4x - 1}, \qquad b = \sqrt[3]{4 - x}, \qquad c = \sqrt[3]{3}$$

leosztásban a feladat ott az $a + b + c = 0$ egyenlet megoldása. A zavart az okozza, hogy a köbgyökök kiküszöbölésekor az $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ összefüggésre térünk át és ebben $a = b = c$ – azaz $x = 1$ – hamis gyököt szolgáltat.