7. foglalkozás Egy Szabályos háromszöggel kapcsolatos példa

A példa

A 20-adik Nemzetközi Magyar Matematikaverseny most a határainkon belül, Bonyhádon került megrendezésre. A kifogástalan szervezés részeként elkészült egy elektronikus kiadvány a verseny elmúlt 19 évéről. A verseny többnapos rendezvénysorozatának keretében nagyon érdekes plenáris előadást tartott Laczkovich Miklós professzor úr. Az eddigi 19 versenyről szóló kiadványból ott a helyszínen az alábbi, 1999-ben kitűzött szellemes feladatra és a kapcsolódó történetre Ő hívta fel figyelmünket.

Kántor Sándorné, a Debreceni Egyetem docense a következőket írja a kiadványban: Ezen a versenyen négy általam javasolt feladatot választott be kitűzésre a zsűri. Ezek egyikéért, a 10. évfolyam 2. feladatáért ítélt meg nekem, a feladat kitűzőjének, a zsűri elnöke, Lajkó Károly professzor egy „külön díjat” és a díjkiosztó ünnepségen az Arany Bika nagy termében át is adta azt egy üveg uborka formájában. Az ok az volt, hogy a 10. évfolyam 2. feladatát senkinek sem sikerült tökéletesen megoldania, vagyis túl magasra került a mérce. Mai napig sem tudom, hogy miért nem boldogultak a versenyzők ezzel a geometriai feladattal? Szokatlan volt a megoldás módszere? Nem találták meg a célra vezető ötletet? Pedig a síkgeometriai feladatok megoldásában gyakran kell alkalmazni a geometriai transzformációk módszerét. Nem tudom, hogy ki érdemelte volna meg még a későbbiekben a „külön díjat”, de sejtésem szerint, végignézve a versenyzők által elért pontszámokat az egyes években, biztosan lett volna utódom. Így most ismét közzéteszem a feladatot és megoldását. Kíváncsian várom, hogy születnek-e más megoldások. Tényleg olyan nehéz volt a feladat? Miért?

10. évfolyam 2. feladat: Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 12$. Határozza meg az ABC háromszög területét.

A Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium Matematika Tanári Szemináriumára Kiss Géza tanár úr hozta el a példát, elmesélte Laczkovich Miklós lelkesültségét is. Mi is lelkesek lettünk. Alább négy lényegesen különböző megközelítésben tárgyaljuk a feladatot, két általánosítási lehetőséget is vázolunk.

Forgatás

A feladatot nem konkrét adatokkal tárgyaljuk.[1]

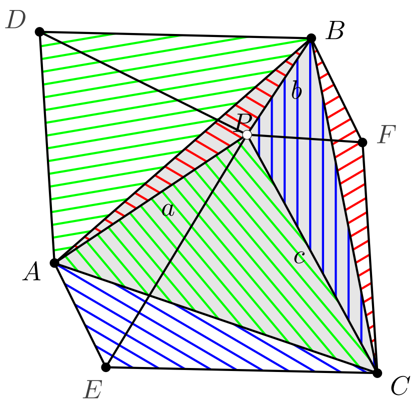
Feladat

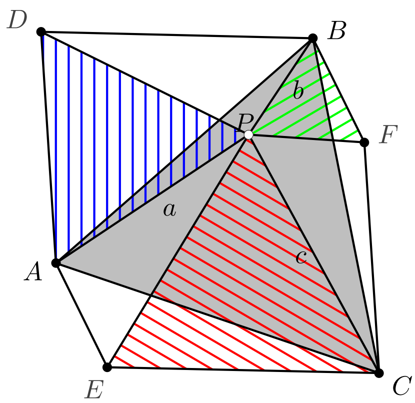
Adott a sík valamely P pontjának egy szabályos háromszög A, B, C csúcsaitól mért a, b illetve c távolsága. Határozzuk meg a szabályos háromszög oldalának hosszát!

[1] Az eredeti feladat megoldása elolvasható a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyekről készült kötetben, amely elérhető az alábbi linken:
http://www.petofi-bhad.sulinet.hu/nmmv/hely/kiadvany.pdf

Megoldás

Forgassuk el az APC háromszöget az A csúcs körül $60°$-kal. Mivel az ABC háromszög szabályos, kapjuk az ADB háromszöget. A $60°$-os forgatás miatt az APD háromszög a oldalú szabályos háromszög, míg a BPD háromszög oldalai a, b és c. Most az előbbihez hasonlóan forgassuk el a CPB háromszöget a C csúcs körül $60°$-kal. Kapjuk a CEA háromszöget. A CEP háromszög c oldalhosszúságú szabályos háromszög, míg a PAE háromszög oldalai sora a, b, c hosszúságúak. A harmadik $60°$ -os forgatást a B csúcs körül végezzük a BPA háromszögre. Ekkor kapjuk a BFC háromszöget. Itt az előzőeknek megfelelően BFP háromszög b oldalhoszúságú szabályos háromszög, míg CFP háromszög oldalai sorra ismét a, b, c.





A három forgatás után az $ADBFCE$ hatszög területe egyrészt éppen az ABC szabályos háromszög területének kétszerese. Másrészt ez a kétszeres terület három a, b, c oldalú háromszög és három szabályos háromszög területének összege. Ezek alapján

$$2 \cdot T(ABC) = T(a) + T(b) + T(c) + 3 \cdot T(a, b, c).$$

Itt $T(x)$ az x oldalhosszúságú szabályos háromszög területe, míg $T(a, b, c)$ az a, b, c hosszúságú szakaszokból szerkesztett háromszög területe. Most használjuk fel a háromszögek területére vonatkozó ismert formulákat. A Heron-képletet a szorzattá alakítás nélkül, a félkerület bevezetése nélkül is írhatjuk.

$$2\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{3}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4},$$

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4},$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}{2}}.$$

Koordinátageometria

Az alábbi megközelítést Dobos Sándor valamint a Berzsenyi Dániel Gimnáziumban tanító Erben Péter és diákja Frankl Nóra javasolta, de csak a további megoldások ismeretében, az eredmény alakját látva vettük a bátorságot, hogy végigkövessük képletekkel a gondolatot.

Az ötlet

Rögzítsünk egy szabályos háromszöget és keressük meg azt a pontot (illetve azokat a pontokat), amelynek (amelyeknek) a háromszög csúcsaitól mért távolságainak aránya az adott távolságok arányaival egyezik meg. Amilyen arányban a kész ábrában nagyítani kell a pontnak a szabályos háromszög csúcsaitól mért távolságait, hogy az előírt távolságokat kapjuk meg, olyan arányban kell a felvett szabályos háromszöget is nagyítani.

A kivitelezés alábbi részletezése első olvasatban kihagyható, csak azért közöljük, mert a későbbi részek magasabb szintű ismeretekre támaszkodnak, a diákolvasók egy részének első megközelítésben túl nehezek lehetnek, míg ez a tárgyalás közelebb áll a középiskolás tananyaghoz.

Kivitelezés

Legyenek a szabályos háromszög csúcsai a derékszögű koordinátarendszerben $A(1;0)$, $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Az ABC háromszög tehát az egységkörbe írt szabályos háromszög, oldalának hossza $\sqrt{3}$.

Az eredetileg adott pont, amit most keresünk legyen $P'(x;y)$, ennek teljesítenie kell a

$$\frac{P'A}{P'B}=\frac{a}{b},\qquad \frac{P'A}{P'C}=\frac{a}{c} \tag{1}$$

távolságarányokat. A feladatban keresett oldalhossz a

$$AB\frac{a}{PA}=\sqrt{3}\frac{a}{PA}$$

érték. Ennek négyzetére vezessük be az X jelölést, tehát

$$X=\frac{3a^2}{PA^2}=\frac{3a^2}{(x-1)^2+y^2}. \tag{2}$$

Fenti (1) egyenleteink így írhatók:

$$X=\frac{3b^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},\qquad X=\frac{3c^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \tag{3}$$

Használjuk fel, hogy

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(x^2+x+1+y^2)\pm\sqrt{3}y=$$

$$=(x^2-2x+1+y^2)+(3x\pm\sqrt{3}y)=\frac{3a^2}{X}+(3x\pm\sqrt{3}y).$$

Ennek segítségével a (3) egyenletek a nevezőkkel való átszorzás és X-szel való osztáy után így írhatók:

$$\frac{3a^2}{X} + (3x - \sqrt{3}y) = \frac{3b^2}{X}, \qquad \frac{3a^2}{X} + (3x + \sqrt{3}y) = \frac{3c^2}{X},$$

azaz

$$3x - \sqrt{3}y = 3\frac{b^2 - a^2}{X}, \qquad 3x + \sqrt{3}y = 3\frac{c^2 - a^2}{X}, \tag{4}$$

amiből

$$x = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2X}, \qquad y = \sqrt{3}\frac{c^2 - b^2}{2X}. \tag{5}$$

Helyettesítsük be ezeket az X (2)-ben található definíciójának megfelelő

$$X \cdot (x^2 + y^2 - 2x + 1) = 3a^2$$

összefüggésbe! Kapjuk, hogy

$$X \cdot \left(\frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)^2 + 3(c^2 - b^2)^2}{4X^2} - \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{X} + 1 \right) = 3a^2,$$

azaz X-szel való szorzás és rendezés után

$$X^2 - (a^2 + b^2 + c^2)X + (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) = 0. \tag{6}$$

Megjegyzések

I. A (6) egyenlet a feladat I. megoldásával ellentétben két megoldást ad. Erre a problémára a következő megoldás után térünk vissza.

II. A (3) egyenleteit rendre $(c^2 - a^2)$-tel, illetve $(b^2 - a^2)$-tel szorozva és a kettő különbségét véve kapjuk, hogy

$$3(c^2 - b^2)x - \sqrt{3}(c^2 + b^2 - 2a^2)y = 0. \tag{7}$$

A (7) egyenlet egy origón átmenő egyenes egyenlete, tehát a (7) képlet az alábbi önmagában is érdekes összefüggést igazolja szabályos háromszögre:

Lemma

Ha adott háromszöghöz keressük azokat a pontokat, amelyeknek a háromszög csúcsaitól mért távolságainak arányai előre adott értékekkel egyenlők ($\frac{PA}{PB} = \lambda_1$, $\frac{PA}{PC} = \lambda_2$), akkor tipikusan két megoldás van és a két megoldást jelentő pontot összekötő egyenes átmegy a háromszög körülírt körének középpontján.

A fenti Lemmára, amelyre Erben Péter hívta fel figyelmünket máskor térünk vissza.

Szabályos háromszög és térfogat

A feladatot a térbe kilépve is kezelhetjük. Azt kell hozzá észrevenni, hogy a $PABC$ négyszög egy elfajult, tehát nulla térfogatú tetraéder.

Lemma

Az $A_0A_1A_2A_3$ tetraéder térfogata kifejezhető oldalélei $A_iA_j^2 = a_{ij}$ négyzetének polinomjaként.

Bizonyítás

Ismeretes, hogy az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata (azaz az $A_0A_1A_2A_3$ tetraéder térfogatának hatszorosa annak az A mátrixnak a determinánsa, amelynek sorai ezek a vektorok. Szorozzuk meg ezt a mátrixot a transzponáltjával! A determinánsok szorzástétele szerint az így kapott mátrix determinánsa a keresett térfogat harminchatszorosa. A szorzatmátrix elemei a megadott vektorok egymással vett skaláris szorzatai:

$$36V^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_1} & \overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_2} & \overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_0A_3} \\ \overrightarrow{A_0A_2}\cdot\overrightarrow{A_0A_1} & \overrightarrow{A_0A_2}\cdot\overrightarrow{A_0A_2} & \overrightarrow{A_0A_2}\cdot\overrightarrow{A_0A_3} \\ \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1} & \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2} & \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_3} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Ismeretes, hogy

$$\overrightarrow{A_iA_j}^2 = (\overrightarrow{A_0A_i} - \overrightarrow{A_0A_j})^2 = \overrightarrow{A_0A_i}^2 + \overrightarrow{A_0A_j}^2 - 2\cdot\overrightarrow{A_0A_i}\cdot\overrightarrow{A_0A_j}, \tag{9}$$

amiből

$$2\cdot\overrightarrow{A_0A_i}\cdot\overrightarrow{A_0A_j} = \overrightarrow{A_0A_i}^2 + \overrightarrow{A_0A_j}^2 - \overrightarrow{A_iA_j}^2. \tag{10}$$

Ha a (8)-ban szereplő mátrix minden elemét kettővel szorozzuk, akkor kényelmesen használhatjuk fel a (10) összefüggést:

$288V^2 =$

$$\begin{vmatrix} 2\overrightarrow{A_0A_1}^2 & \overrightarrow{A_0A_1}^2 + \overrightarrow{A_0A_2}^2 - \overrightarrow{A_1A_2}^2 & \overrightarrow{A_0A_1}^2 + \overrightarrow{A_0A_3}^2 - \overrightarrow{A_1A_3}^2 \\ \overrightarrow{A_0A_1}^2 + \overrightarrow{A_0A_2}^2 - \overrightarrow{A_1A_2}^2 & 2\overrightarrow{A_0A_2}^2 & \overrightarrow{A_0A_2}^2 + \overrightarrow{A_0A_3}^2 - \overrightarrow{A_2A_3}^2 \\ \overrightarrow{A_0A_1}^2 + \overrightarrow{A_0A_3}^2 - \overrightarrow{A_1A_3}^2 & \overrightarrow{A_0A_2}^2 + \overrightarrow{A_0A_3}^2 - \overrightarrow{A_2A_3}^2 & 2\overrightarrow{A_0A_3}^2 \end{vmatrix},$$

azaz

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a_{01} & a_{01}+a_{02}-a_{12} & a_{01}+a_{03}-a_{13} \\ a_{01}+a_{02}-a_{12} & 2a_{02} & a_{02}+a_{03}-a_{23} \\ a_{01}+a_{03}-a_{13} & a_{02}+a_{03}-a_{23} & 2a_{03} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

A (11) képlet a Heron képlethez hasonlóan megadja a tetraéder térfogatát az oldalélek négyzeteinek polinomjaként.

Dolgozzunk az $A_0 = P$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ szereposztással, tehát $a_{01} = a^2$, $a_{02} = b^2$, $a_{03} = c^2$ és $a_{12} = a_{13} = a_{23} = x^2$, ahol x jelöli a keresett szabályos háromszög oldalát. A $PABCD$ tetraéder elfajuló, térfogata zérus, azaz

$$0 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-x^2 & a^2+c^2-x^2 \\ a^2+b^2-x^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-x^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

A determinánst kifejtve és kettővel osztva kapjuk, hogy

$$x^6 - (a^2+b^2+c^2)x^4 + (a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)x^2 = 0. \tag{13}$$

A (13) egyenlet egyik gyöke zérus, a másik kettő négyzete ($x^2 = X$) kielégíti a

$$X^2 - (a^2 + b^2 + c^2)X + (a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) = 0 \tag{14}$$

másodfokú egyenletet, azaz

$$x^2 = X = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2}. \tag{15}$$

Megjegyzés
A fenti megoldás után merült fel a kérdés, hogy miért van két megoldás. Ennek megfejtéséhez vettük elő a komplex számokat.

Szabályos háromszög és DFT

Definíció Az

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

sorozat diszkrét Fourier transzformáltjának (DFT) nevezzük az

$$a_1' = a_1 + a_2 + a_3, \quad a_2' = a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3, \quad a_2' = a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3$$

sorozatot, ahol ω primitív harmadik egységgyök. Erről a számról érdemes tudni, hogy

$$\overline{\omega} = \omega^2, \qquad \overline{\omega^2} = \omega, \qquad 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

A sorozat diszkrét Fourier transzformáltjának konjugált diszkrét Fourier transzformáltja (tehát 1, ω és ω^2 helyett rendre 1-gyel $\overline{\omega} = \omega^2$-tel és $\overline{\omega^2} = \omega$-val szorzunk) az eredeti sorozat konstans-szorosa:

$$\begin{aligned}
a_1'' &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2) + (a_1 + a_2\omega^2 + a_3\omega) = \\
&= 3a_1 + (1 + \omega + \omega^2)a_2 + (1 + \omega^2 + \omega)a_3 = 3a_1; \\
a_2'' &= (a_1 + a_2 + a_3) + \omega^2(a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2) + \omega(a_1 + a_2\omega^2 + a_3\omega) = \\
&= (1 + \omega^2 + \omega)a_1 + 3a_2 + (1 + \omega + \omega^2)a_3 = 3a_2; \\
a_3'' &= (a_1 + a_2 + a_3) + \omega(a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2) + \omega^2(a_1 + a_2\omega^2 + a_3\omega) = \\
&= (1 + \omega + \omega^2)a_1 + (1 + \omega^2 + \omega)a_2 + 3a_3 = 3a_3.
\end{aligned}$$

Térjünk át a feladatunkra!

Az eredeti feladat megoldása
Legyen P a komplex számsík origójában, jelölje u a keresett szabályos háromszög középpontjának megfelelő komplex számot és legyen $v = A - u$ a középpontból az A csúcsba mutató komplex szám. Ekkor

$$A = u + v, \quad B = u + \omega v, \quad C = u + \omega^2 v$$

és a feltétel szerint

$$\begin{array}{llllll} a^2 = & (u+v)(\overline{u+v}) & = (u\overline{u}+v\overline{v}) & +\overline{u}v & +u\overline{v} \\ b^2 = & (u+\omega v)(\overline{u+\omega v}) & = (u\overline{u}+v\overline{v}) & +\omega\overline{u}v & +\omega^2 u\overline{v} & , \\ c^2 = & (u+\omega v)(\overline{u+\omega^2 v}) & = (u\overline{u}+v\overline{v}) & +\omega^2\overline{u}v & +\omega u\overline{v} \end{array}$$

tehát az

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2$$

sorozat az

$$(u\overline{u}+v\overline{v}), \quad \overline{u}v, \quad u\overline{v}$$

sorozat Fourier transzformáltja. Újbóli (konjugált) Fourier transzformációval:

$$\begin{aligned} (u\overline{u}+v\overline{v}) &= \frac{a^2+b^2+c^2}{3}, \\ \overline{u}v &= \frac{a^2+\omega^2 b^2+\omega c^2}{3}, \\ u\overline{v} &= \frac{a^2+\omega b^2+\omega^2 c^2}{3}, \end{aligned}$$

Tehát adott az $u\overline{u}$, $v\overline{v}$ számok összege mellett a szorzata is:

$$(u\overline{u})(\overline{v}v) = \frac{(a^2+\omega b^2+\omega^2 c^2)(a^2+\omega^2 b^2+\omega c^2)}{9}.$$

Beszorozva:

$$(|u|^2)(|v|^2) = \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{9},$$

tehát az $X_u = 3|u|^2$ és $X_v = 3|v|^2$ számokra – ahol X_v a keresett szabályos háromszög oldalának négyzete–

$$X_u + X_v = a^2+b^2+c^2, \qquad X_u X_v = a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2,$$

így X_u és X_v a már (14)-ben is megkapott

$$X^2-(a^2+b^2+c^2)X+(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)=0$$

egyenlet gyökei.

Megjegyzések

I. A másodfokú egyenlet megoldásai algebrailag megkülönböztethetetlenek. Azt kaptuk tehát, ha van olyan megoldás, amelyben a P pont és a szabályos háromszög középpontjának távolsága $|u|$ és a szabályos háromszög körülírt körének sugara $|v|$, akkor olyan megoldás is van, amelyben a szabályos háromszög középpontjának távolsága $|v|$ és a szabályos háromszög körülírt körének sugara $|u|$.

Ez algebrailag könnyen levezethető. Összesen csak arról van szó, hogy az u középpontú $|v|$ sugarú körbe írt szabályos háromszög csúcsait alkotó

$$u+v, \qquad u+\omega v, \qquad u+\omega^2 v$$

komplex számok rendre ugyanakkora abszolút értékűek, mint a v középpontú $|u|$ sugarú körbe írt szintén szabályos háromszöget alkotó

$$u+v, \qquad \omega^2 u+v, \qquad \omega u+v$$

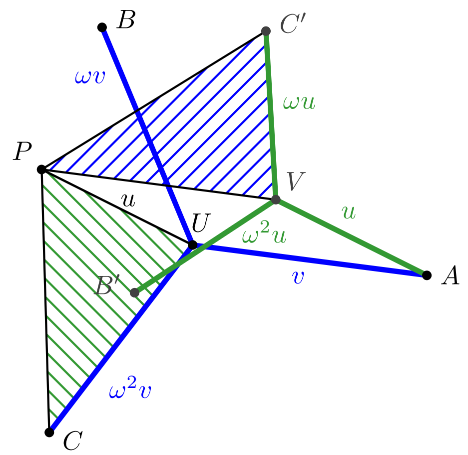
komplex számok, hiszen hányadosaik egységnyi komplex számok:

$$\frac{u+v}{u+v}=1, \qquad \frac{u+\omega v}{\omega^2 u+v}=\omega, \qquad \frac{u+\omega^2 v}{\omega u+v}=\omega^2.$$

A két megoldást az alábbi ábrán is látható, a fenti eredmény elemi állításként is megfogalmazható.

Lemma

Ha P, U, A tetszőleges pontok és V a $PUAV$ paralelogramma negyedik csúcsa, továbbá B és C az A pont U körül rendre $120°$ és $240°$-kal elforgatott képe, valamint C' és B' az A pont V körül rendre $120°$ és $240°$-kal elforgatott képe, akkor $PB=PB'$ és $PC=PC'$.



A Lemma bizonyítása

Csak a $PC=PC'$ relációt igazoljuk, a másik összefüggés is ugyanígy bizonyítható. Azt mutatjuk meg, hogy a PCU, $PC'V$ háromszögek egybevágóak. Ehhez elég igazolni, hogy az $\overrightarrow{UC}$, $\overrightarrow{UP}$ vektorok $-60°$-os elforgatottjai rendre a $\overrightarrow{VP}$, $\overrightarrow{VC'}$ vektorok. Mivel

$$\overrightarrow{UC}^{120°}=\overrightarrow{UA}=\overrightarrow{PV},$$

így

$$\overrightarrow{UC}^{-60°}=\overrightarrow{VP},$$

ahogy állítottuk és $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{AV}$, ezért

$$\overrightarrow{UP}^{120^\circ} = \overrightarrow{AV}^{120^\circ} = \overrightarrow{C'V},$$

így

$$\overrightarrow{UP}^{-60^\circ} = \overrightarrow{VC'}.$$

Ezzel a Lemmát igazoltuk.

II. Felmerül a kérdés, hogy a (14) egyenletnek milyen a diszkriminánsa.

$$D = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) =$$
$$= 3(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

A legutóbbi képletben felismerhetjük a Heron képlet beszorzott alakját, tehát

$$D = 3(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c). \tag{16}$$

Mikor nulla ez a diszkrimináns? A (16) képlet szerint akkor, ha az a, b, c mennyiségek közül valamelyik a másik kettő összege. Másrészt akkor zérus a diszkrimináns, ha a másodfokú egyenlet két gyöke – jelesül $3|u|^2$ és $3|v|^2$ – egyenlő, tehát ha a P pont a szabályos háromszög körülírt körén helyezkedik el. Megkaptuk tehát azt a nevezetes összefüggést, hogy egy szabályos háromszög körülírt körének bármely pontját a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok közül az egyik a másik kettő összegével egyenlő. Az állítás megfordítása is bizonyítást nyert most: ha egy pontot a szabályos háromszög csúcsaival összekötő szakaszok közül az egyik a másik kettő összegével egyenlő, akkor a pont a szabályos háromszög körülírt körén helyezkedik el.

Ha az a, b, c szakaszokból háromszög szerkeszthető, akkor e háromszög T területére a Heron képlet szerint $D = 3 \cdot 16T^2$, tehát a diszkrimináns pozitív. Ha nem szerkeszthető háromszög e három szakaszból az azért van, mert nem teljesül rájuk valamelyik háromszög-egyenlőtlenség, azaz a

$$(a + b - c), \qquad (a - b + c), \qquad (-a + b + c)$$

tényezők – (16) tényezőinek – egyike negatív. Nemnegatív a, b, c mennyiségek esetén ez csak úgy fordulhat elő, hogy pontosan az egyik tényező negatív. Valóban, ha pl $(a + b - c) < 0$, azaz $a + b < c$, akkor $b < c$ és $a < c$ is teljesül, így a $(a - b + c)$, $(-a + b + c)$ tényezők pozitívak. Ebben az esetben tehát a D diszkrimináns negatív.

Azt kaptuk, hogy *pontosan akkor van olyan szabályos háromszög, amelynek csúcsai a sík egy adott pontjától három előre adott távolságra vannak, ha ebből a három távolságból, mint szakaszból szerkeszthető háromszög.* Ez összhangban van az eredeti feladatra adott első – Kiss Géza által bemutatott – megoldással, amelyben meg is jelenik ez a háromszög.

III. A térfogatos módszer lehetőséget ad a dimenzió szerinti általánosításra. Nevezzük n-szimplexnek az n-dimenziós tér $(n + 1)$ tetszőleges pontjából álló halmazt, szabályos n-szimplexnek pedig az olyan $(n+1)$ pontú részhalmazt, melyek közül bármely kettő távolsága egyforma pozitív szám.

Feladat Legyenek adva az n-dimenziós Euklideszi tér egy pontjának egy szabályos n-szimplex csúcsaitól való távolságai, határozzuk meg ezekből az n-szimplex oldalélének hosszát!

E feladatot megoldhatjuk úgy, hogy az n-szimplex csúcsait és az adott pontot egy olyan $(n+1)$-szimplexnek képzeljük, amely elfajult, csúcsai benne vannak egy $(n+1)$ dimenziós térben, tehát térfogata 0. Ezt a térfogatot a az eredeti feladat térbeli megoldásának mintájára a vektorokból álló mátrix és transzponáltjának szorzatával számolhatjuk ki.

IV. Az n elemű sorozatokra vonatkozó véges Fourier transzformációval kényelmesen kezelhető az alábbi általánosítás is:

Feladat Legyenek adva a sík egy pontjának egy szabályos n-szög csúcsaitól való távolságai, határozzuk meg ezekből a szabályos n-szög oldalának hosszát!

A Fourier transzformáció bemutatására és ennek a problémának a megoldására később térünk vissza.

V. Erben Péter az egyik fenti megoldással kapcsolatban felhívta figyelmünket az alábbi feladatra, amelyről Vladimir Dubrovsky ,,Suggestive Tilings (new material, old topics revisited)” című könyvében olvasott:

Feladat Fejezzük ki a Napóleon-háromszög területét az eredeti háromszög oldalaiból és területéből! (A háromszög oldalaira kifelé emelt szabályos háromszögek középpontjai által alkotott háromszöget nevezik a háromszög Napóleon háromszögének.)