6. foglalkozás
Pataki János egy harmadfokú relációról

1. feladat
Egy háromszög oldalaira érvényes, hogy $a^3 + b^3 = c^3$. Mutassuk meg, hogy a háromszög hegyesszögű.

Ez a feladat fakultációs csoportban órán is tárgyalható és a megoldása is vázolható néhány lépésben.

Megoldás: Látjuk, hogy a leghosszabb oldal c, tehát elegendő belátni, hogy γ hegyesszög. Osszuk el a feltételi egyenletet c^3-nal. Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} = 1.$$

Az $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ törtek egynél kisebb pozitív számok, így teljesül, hogy

$$\frac{a^3}{c^3} < \frac{a^2}{c^2} \text{ és } \frac{b^3}{c^3} < \frac{b^2}{c^2}.$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenletből egy azonnal használható egyenlőtlenséget nyerünk.

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} > 1.$$

Most c^2-tel szorozva látjuk, hogy a legnagyobb szög valóban hegyesszög.

Most jön a valódi kérdés, amely a legnagyobb szög minimumára vonatkozik.

2. feladat
Egy háromszög oldalaira érvényes, hogy $a^3 + b^3 = c^3$. Mennyi a legnagyobb szög minimális értéke?

A feladatra három megoldást is mutatunk.
1. megoldás
A könnyebb kezelhetőség érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy $c = 1$. Az $a^3 + b^3 = 1$ alakból rögtön a szimmetrikus polinomokra gondolunk. Legyen tehát $u = a + b$ és $v = ab$. Ezekkel a jelölésekkel a feltétel átírható

$$u^3 - 3uv = u(u^2 - 3v) = 1.$$

E feltétel mellett keressük a $cos\gamma$ maximumát, hiszen ekkor lesz a szög a legkisebb.

$$cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} = \frac{u^2 - 2v - 1}{2v}. \tag{1}$$

Fejezzük ki a feltételi egyenletből a v-t és írjuk be a $cos\gamma$ kifejezésébe.

$$v = \frac{u^2 - \frac{1}{u}}{3},$$

$$cos\gamma = \frac{u^2-2v-1}{2v} = \frac{u^2 - \frac{2(u^2-\frac{1}{u})}{3} - 1}{2\frac{u^2-\frac{1}{u}}{3}} = \frac{u^2+\frac{2}{u}-3}{2u^2-\frac{2}{u}} = \frac{u^3-3u+2}{2u^3-2} =$$
$$= \frac{u^3-u-2u+2}{2(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(u-1)(u^2+u-2)}{2(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+u-2}{u^2+u+1}.$$

Mielőtt rátérnénk a levezetésben kapott $f(u)$ törtfüggvény részletesebb vizsgálatára határozzuk meg u legnagyobb lehetséges értékét. A számtani- és a harmadik hatványközép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Beszorzás után látjuk, hogy

$$a+b \le \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

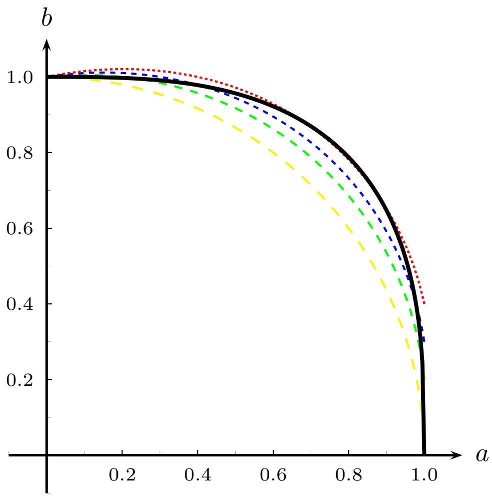
Az egyenlőség pontosan akkor, ha a háromszög egyenlő szárú, $a = b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Most megmutatjuk, hogy az $f(u)$ függvény szigorúan monoton növekedő.

$$f(u) = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+u-2}{u^2+u+1} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{3}{u^2+u+1}\Big) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right).$$

A nevezőben szereplő másodfokú függvény pozitív u értékekre szigorúan monoton növekedő, a reciproka csökken, s végül ennek negatív számszorosa ismét növekszik. Az f függvény pozitív u értékekre tehát szigorúan monoton növekedő. A legnagyobb értéket ennek megfelelően akkor veszi fel, ha $u = a + b = \sqrt[3]{4}$. Ekkor

$$cos\gamma = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \qquad \gamma \approx 78,09°.$$

2. megoldás Először szemléltetjük a problémát.



Az 1. megoldáshoz hasonlóan c értékét 1-nek rögzítjük. a-t és b-t ilyenkor az

$$a^3 + b^3 = 1 \tag{2}$$

reláció köti össze, az ennek megfelelő görbét feketével ábrázoltuk. A γ szög koszinuszát a $\frac{a^2+b^2-1}{2ab}$ kifejezés értéke adja meg, ennek szintvonalait színes szaggatott vonallal ábrázoltuk. A sárga vonal pld a $\gamma = 90°$-nak, tehát $\cos\gamma = 0$-nak felel meg, azaz egyenlete $a^2+b^2-1 = 0$. Általában a színes vonalak egy-egy rögzített γ-ra az

$$a^2 + b^2 - 1 - 2ab\cos\gamma = 0 \tag{3}$$

egyenletű görbéknek a pozitív síknegyedbe eső részei (technikai okból az $a > 1$ tartományhoz tartozó részek sincsenek ábrázolva). Ezek a görbék mind átmennek a $(0; 1)$ és az $(1; 0)$ ponton, az a kérdés, hogy melyik az a legnagyobb γ, amelyre a (3) görbének még ezeken kívül is van közös pontja a pozitív síknegyedben a (2) görbével.

Vizsgáljuk a problémát az a változó szerint! Akárhogyan is választjuk a értékét a $(0; 1)$ intervallumban (2) alapján mindig egyértelműen található hozzá egy b érték és (1) alapján egy $\cos\gamma$ érték. A differenciálszámítás segítségével elemezzük az összefüggéseket.

A hagyományos jelölésekkel az a szerint deriválva $a^3 + b^3 = 1$-et:

$$\frac{d(a^3+b^3)}{da} = 0,$$

$$3a^2 + 3b^2\frac{db}{da} = 0,$$

$$\frac{db}{da} = -\frac{a^2}{b^2}. \tag{4}$$

Deriváljuk most a (1)-ben már kifejezett $cos\gamma$-t az a szerint, felhasználva b-nek a szerinti deriváltjára előbb kapott eredményünket.

$$\frac{d(cos\gamma)}{da} = \frac{d\left(\frac{a^2+b^2-1}{2ab}\right)}{da} = \frac{\left(2a - \frac{2a^2}{b}\right)2ab - 2(a^2+b^2-1)\left(b - \frac{a^3}{b^2}\right)}{4a^2b^2}.$$

Közös nevezőre hozások és összevonások után

$$\frac{4a^2b - 4a^3 - 2(a^2+b^2-1)\frac{b^3-a^3}{b^2}}{4a^2b^2} = \frac{(b-a)4a^2b^2 - 2(a^2+b^2-1)(b^3-a^3)}{4a^2b^4}.$$

Emeljünk ki most a számlálóban $(b-a)$-t és végezzünk néhány azonos átalakítást is.

$$\frac{(b-a)[4a^2b^2 - 2(a^2+b^2-1)(a^2+ab+b^2)]}{4a^2b^4} =$$

$$= \frac{b-a}{4a^2b^4}\left[4a^2b^2 - 2(a^2+b^2)^2 - 2ab(a^2+b^2) + 2(a^2+ab+b^2)\right] =$$

$$= \frac{2(b-a)}{4a^2b^4}\big[-2a^4 - 2b^4 - 2a^3b - 2ab^3 + 2(a^2+ab+b^2)\big] =$$
$$= \frac{b-a}{a^2b^4}\big[-a(a^3+b^3) - b(a^3+b^3) + a^2 + ab + b^2\big].$$

Tekintettel a (2) feltételre és a nevező pozitív voltára, elegendő a számláló előjelváltásait vizsgálnunk. Külön feladatban megfogalmazzuk és be fogjuk látni, hogy a második tényező pozitív. Ez alapján, ha $b > a$, akkor a derivált pozitív, ha $b < a$, akkor a derivált negatív.

Míg a értéke 0-tól 1-ig nő, aközben b értéke 1-től 0-ig szigorúan monoton csökken – lásd az (2) képletet, a (4) deriváltat vagy az ábrát. A $\frac{d\cos\gamma}{da}$ derivált előjelére vonatkozó előző észrevételekből következik, hogy a növelésével $\cos\gamma$ értéke egészen az $a = b$ helyig nő, utána pedig csökken. Tehát $cos\gamma$-nak maximuma van, ha $b = a$.

A megoldás akkor van készen, ha belátjuk azt is, hogy $a^2 + ab + b^2 - a - b$ pozitív. Tehát a hátralévő, önmagában is érdekes feladat:

3. feladat (*KÖMAL, B. 4343., 2011. március*)

Legyenek a és b olyan pozitív számok, amelyekre $a^3 + b^3 = 1$. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen számpárra $a^2 + ab + b^2 - a - b > 0$.

I. megoldás (*Gyenes Zoltán*)

Az $a^3+b^3 = 1$ feltétel mellett azt kell bizonyítanunk, hogy $a^2+ab+b^2 > a+b$. Jelöljük d-vel a két szám számtani közepét. Ekkor $a = d - x$ és $b = d + x$. A feltétel az új jelöléssel

$$a^3 + b^3 = (d-x)^3 + (d+x)^3 = 2d^3 + 6dx^2 = 1.$$

A bizonyítandó állítás pedig

$$(d-x)^2 + (d-x)(d+x) + (d+x)^2 > d - x + d + x,$$
$$3d^2 + x^2 > 2d.$$

Fejezzük ki a feltételből az x^2-et és helyettesítsük a bizonyítandó egyenlőtlenségbe.

$$x^2 = \frac{1-2d^3}{6d},$$
$$3d^2 + \frac{1-2d^3}{6d} > 2d.$$

Ezt ekvivalens átalakításokkal még szorzattá is tudjuk alakítani:

$$18d^3 + 1 - 2d^3 > 12d^2,$$
$$16d^3 - 12d^2 + 1 > 0,$$
$$16d^3 - 8d^2 - 4d^2 + > 0,$$
$$8d^2(2d-1) - (2d+1)(2d-1) > 0,$$

$$(2d-1)(8d^2-2d-1)>0,$$

s végül a gyöktényezős alak felhasználásával

$$(2d-1)^2(4d-1)>0$$

alakban írható fel a bizonyítandó állítás. Mivel az a és b 1-nél kisebb pozitív számok, $a>a^3, b>b^3$, így

$$d=\frac{a+b}{2}>\frac{a^3+b^3}{2}=\frac{1}{2}.$$

$2d-1>0, 4d-1>0$, a bizonyítandó egyenlőtlenség tehát igaz.

Azt is látjuk, hogy a $d=\frac{1}{2}$ eset csak úgy valósulhat meg, ha az egyik szám 0, a másik 1.

II. megoldás

Mivel a és b pozitív számok harmadik hatványainak összege 1, ezért mindkét szám 1-nél kisebb. Tudjuk tehát, hogy $a>a^2>a^3$ és $b>b^2>b^3$. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget 2-vel és erről mutassuk meg, hogy pozitív. Közben még egyszer felhasználjuk a feltételt is.

$$2a^2+2ab+2b^2-2a-2b>a^2+a^3+2ab+b^2+b^3-2a-2b=$$

$$=a^2+b^2+2ab-2a-2b+1=(a+b-1)^2.$$

Tudjuk, hogy $a+b>a^3+b^3=1$, tehát $(a+b-1)^2>0$.

A 2. feladat 3. megoldása

Az

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2$$

cosinus-tétel köbét az

$$a^3+b^3=c^3$$

reláció négyzetével összevetve $\cos\gamma$-ra a

$$8a^2b^2\cos^3\gamma-12ab(a^2+b^2)\cos^2\gamma+6(a^2+b^2)^2\cos\gamma+2a^2b^2-3ab(a^2+b^2)=0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk. Ebből $8a^2b^2$-tel osztva és az

$$x=\frac{a^2+b^2}{2ab} \tag{5}$$

segédváltozót bevezetve kapjuk a

$$\cos^3\gamma-3x\cos^2\gamma+3x^2\cos\gamma+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x=0,$$

összefüggést, amelyben észrevehetjük a teljes köböt:

$$(x-\cos\gamma)^3=x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}.$$

Ebből expliciten adódik $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = x - \sqrt[3]{x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}. \tag{6}$$

Vegyük észre, hogy a (5) képlettel definiált x segédváltozó értéke legalább 1, hiszen az a^2, b^2 számokra vonatkozó számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. A (6) jobb oldalán található $g(x)$ függvényről látni fogjuk, hogy $1 \leq x$ esetén szigorúan monoton fogy. Deriváltja:

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt[3]{\left(x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)^2}},$$

azaz – felhasználva, hogy

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x+1), \qquad x^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) = 1 - \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x+1)}}. \tag{7}$$

A $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $(x+1)$, $(x+1)$ számok a vizsgált tartományon pozitívak és nem mind egyenlők, így felírhatjuk rájuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + (x+1) + (x+1)}{3} > \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x+1)}.$$

Ez épp azt fejezi ki, hogy $g'(x)$ negatív, tehát maximuma $x = 1$ esetén van. A g függvény maximuma a háromszög legnagyobb szögének, γ-nak a minimumát adja:

$$\cos\gamma = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$