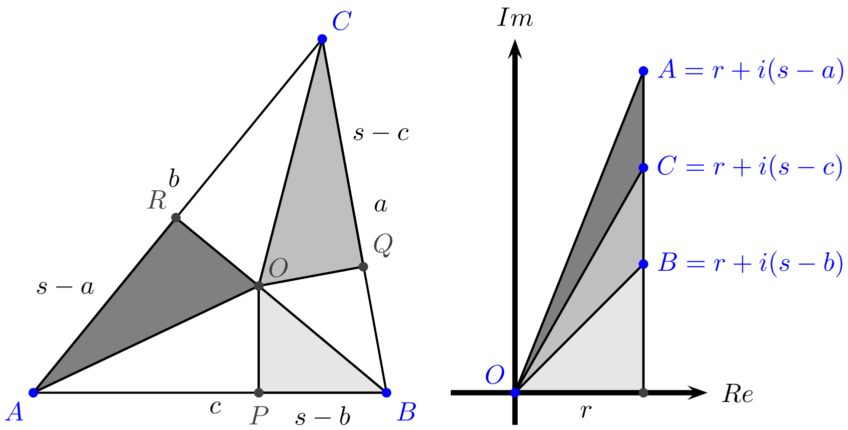
5. „Virtuális” foglalkozás

Mészáros József felvidéki kolléga a Heron-képletről és Szászné Simon Judit feladatáról

Egy cseh folyóiratban (MFI) találtam egy érdekes bizonyítást a Heron-képletre. A folyóirat szerint ez a bizonyítás nem régi és Miles Dillon Edvardstól származik. (Edvards, M.D.: „A proof of Heron's Formula”, Am. Math. Monthly XII. 2007.)



A háromszögek O-nál fellépő szögei a szokásos jelölésekkel rendre $90° - \frac{\alpha}{2}, 90° - \frac{\beta}{2}, 90° - \frac{\gamma}{2}$. A beírt kör sugara r, az érintőszakaszok $AP = s-a, BQ = s-b, CR = s-c$.

Helyezzük el most az OPA, OQB és ORC háromszögeket a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy az O pont mindegyik háromszögre legyen a középpontban és a háromszögek r hosszúságú befogója a valós tengelyre essen. Így az A, B, C csúcsoknak megfelelő komplex számok

$$A = r + (s-a)i, B = r + (s-b)i, C = r + (s-c)i.$$

A három komplex szám argumentumának összege

$$90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2} = 270° - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180°.$$

Szorzásakor az argumentumok összeadódnak, ennek megfelelően a három szám szorzatának képzetes része nulla kell, hogy legyen.

$$A \cdot B \cdot C = [r + (s-a)i][r + (s-b)i][r + (s-c)i] =$$

$$= [r^3 - r(s-a)(s-b) - r(s-b)(s-c) - r(s-c)(s-a)] +$$

$$+ i[r^2(s-a) + r^2(s-b) + r^2(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c)].$$

A képzetes rész nulla:

$$r^2(s-a+s-b+s-c) - (s-a)(s-b)(s-c) = 0.$$

Átrendezve és s-sel szorozva

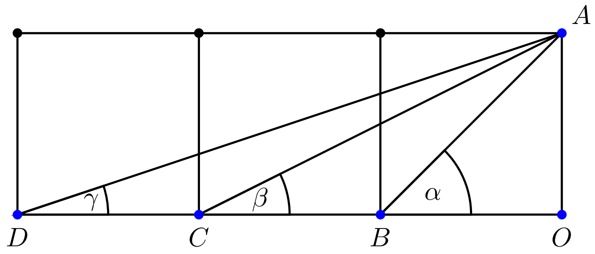
$$r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Végül beírva az ismert $t = rs$ összefüggést éppen a Heron-képlet adódik

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ez a bizonyítás adta az ötletet, hogy a 2010/2. szemináriumi anyagban szereplő feladatra komplex számok segítségével is adjak egy bizonyítást.

Feladat: Vegyünk három egybevágó négyzetet az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy $\alpha = \beta + \gamma$.



Az egyszerűség kedvéért legyen a négyzetek oldala egységnyi és helyezzük el a három négyzetet a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy O legyen a kezdőpont, továbbá a B, C, D pontok a valós tengelyre essenek. Ekkor $A - B = 1 + i, A - C = 2 + i, A - D = 3 + i$ komplex számok. Ha ezt a három komplex számot összeszorozzuk, akkor argumentumaik összeadódnak.

$$(1+i)(2+i)(3+i) = (1+3i)(3+i) = 0 + 10i.$$

Tisztán képzetes számot kaptunk. Tekintve, hogy három hegyesszöget adtunk össze ez csak úgy lehetséges, ha a szögek összege pontosan 90°.