4. foglalkozás
Pataki János kolléga két tanulságos feladatot ismertetett.

1.1. feladat: Hány olyan hatjegyű szám és hány olyan hatjegyű páros szám van, amely az $1; 3; 3; 2; 2; 2$ számjegyekből áll?

1.2. feladat: Hány olyan ötjegyű szám és hány olyan ötjegyű páros szám van, amelyek az $1; 3; 3; 2; 2; 2$ jegyekből képezhetők.

1.1. Megoldás: Hat szám ismétléses permutációit kell kiszámítanunk.

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60.$$

A páros számok számának meghatározásához rögzítsünk az utolsó helyre egy 2 számjegyet. A maradék öt szám ismétléses permutációinak száma adja a megoldást:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Vegyük most a másik változat megoldását is.

1.2. Megoldás: Szedjük jól elkülöníthető esetekre az összeszámlálást. Rendre – nincs egyes, egy kettes hiányzik, egy hármas hiányzik –, lesznek ezek az esetek.

$$\frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{3!} = 10 + 30 + 20 = 60.$$

Nézzük most, hogy ezek között hány páros van. Az esetek szétválasztása az előbbi szerint történhet kiegészítve azzal, hogy az utolsó jegye 2.

$$\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 6 + 12 + 12 = 30.$$

Az igazi meglepetés az, hogy hatjegyűből pontosan ugyanannyi van, mint ötjegyűből és ezek közül pontosan ugyanannyi a páros is.

Magyarázat
Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk a megfelelő hatjegyű és ötjegyű számok között.
Ha a hatjegyű szám legelső számjegyét letöröljük, akkor ötjegyű számot kapunk. Ha a hatjegyű szám páros volt, akkor az ötjegyű is az lesz.
Másrészt, ha az ötjegyű szám elé beírjuk a kimaradt hatodik számjegyet, akkor olyan hatjegyű számot kapunk, amely a megadott számjegyekből áll. Pontosan akkor kapunk így páros hatjegyű számot, ha az ötjegyű szám is páros volt.

2. feladat: Egy számtani sorozat első tíz tagjának összege 100, első száz tagjának összege 10. Mennyi az első száztíz tag összege?

Ez a feladat a szokásos algebrai úton is végigszámolható, emelt szintű érettségihez való gyakorláshoz ajánlható. Pataki János két megoldást ismertetett.

I. Megoldás

Ismerve a számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó általános képletet, kereshetjük az S_n képletét $S_n = a{\cdot}n^2{+}b{\cdot}n$ alakban. Ennek megfelelően:

$$S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n,$$

$$S_m = a \cdot m^2 + b \cdot m,$$

$$S_{n+m} = a(n+m)^2 + b(n+m).$$

Az első két egyenletet kivonva és $(n-m)$-mel osztva kapjuk, hogy

$$\frac{S_n - S_m}{n-m} = a(n+m) + b.$$

Az S_{n+m}-et $(n+m)$-mel osztva ugyanez az eredmény adódik, így látjuk, hogy általában is teljesül:

$$\frac{S_n - S_m}{n-m} = a(n+m) + b = \frac{S_{n+m}}{n+m}. \tag{1}$$

Ezt az általános formulát használva a feladat kiinduló adataival kapjuk, hogy

$$\frac{S_{110}}{100+10} = \frac{S_{100} - S_{10}}{100-10} = -\frac{90}{90} = -1.$$

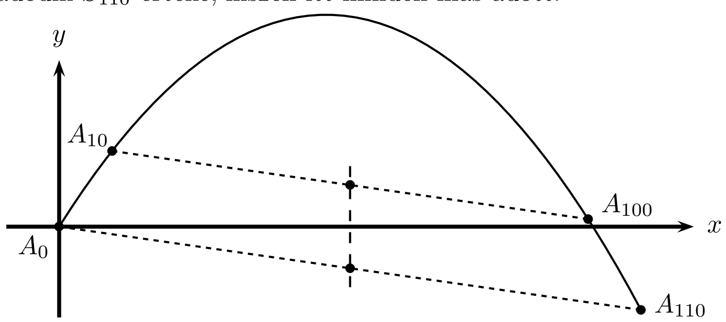
Tehát $S_{110} = -110$.

Az I. megoldás geometriai magyarázata

A számtani sorozat első n elemének összegét olyan másodfokú függvény írja le, amelynek 0-ban 0 az értéke ($S_0 = 0$). A másodfokú függvény parabola. Ismeretes, hogy a parabola két húrja pontosan akkor párhuzamos, ha a felezőpontjaikat összekötő egyenes pűrhuzamos a parabola tengelyével, tehát párhuzamos az y-tengellyel. Az $A_0(0, S_0)$, azaz $A_0(0,0)$ pontot és az $A_{110}(110, S_{110})$ pontot összekötő húr felezőpontjának x-koordinátája 55 csakúgy mint az $A_{10}(10, S_{10})$ pontot és az $A_{100}(10, S_{10})$ ponttal összekötő húr felezőpontjáé. A két húr tehát párhuzamos, azaz (1)-nek megfelelően

$$\frac{S_{110} - S_0}{110 - 0} = \frac{S_{100} - S_{10}}{100 - 10}.$$

Ebből adódik S_{110} értéke, hiszen itt minden más adott.



Az I. megoldás aritmetikai magyarázata

A számtani sorozat erősen kapcsolódik a „számtani közép" fogalmához. A

$$\{12, 13, 14, 15\}$$

számok számtani közepe megegyezik a

$$\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

számok számtani közepével – azaz 13,5-del – így tetszőleges $\{a_n\}$ számtani sorozatra az

$$\{a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}$$

számok számtani közepe is megegyezik az

$$\{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}\}$$

számok számtani közepével. Persze, hiszen mind a kettő épp

$$a_{13,5}$$

-del egyezik meg, amelynek ugyan nincs értelme a számtani sorozatban, de az annak elemeit megadó lineáris függvény valós számokra való kiterjesztésében van. Tehát

$$\frac{S_{15} - S_{11}}{4} = \frac{S_{18} - S_8}{10},$$

vagy általánosabban

$$\frac{S_n - S_m}{n - m} = \frac{S_{n'} - S_{m'}}{n' - m'}, \tag{2}$$

ha $\frac{n+m}{2} = \frac{n'+m'}{2}$. Ezt az összefüggést fogalmazza meg a megoldásban adott (1) képlet is az $n' = n + m$, $m' = 0$ speciális esetben.

II. megoldás: Legyenek az eredeti sorozat elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Képezzük a $\{b_n\}$ sorozat elemeit úgy, hogy az $\{a_n\}$ sorozat elemeihez rendre 1-et hozzáadunk. Erre az új sorozatra, a kezdeti adatokat is figyelembe véve, már látjuk, hogy

$$S_{10} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 110,$$

$$S_{100} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = 110.$$

Tehát erre a sorozatra $S_{10} = S_{100}$. Ez azt is jelenti hogy a tizenegyediktől a századik elemeig összeadva, az összeg nulla.

$$S_{11}^{100} = b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{100} = 0.$$

Ha „előre és hátra lépve" egy-egy elemet hozzáadunk, akkor az összeg nem változik. Ugyanez a helyzet akkor is, ha szimmetrikusan ugyanannyi elemet adunk hozzá az összeghez az induló elem előtti és az utolsó elem utáni tagokból. Jelöléseinkkel és a feladat adataival:

$$S_{11}^{100} = S_{10}^{101} = S_{11-k}^{100+k} = 0.$$

Ha most $k = 10$-re alkalmazzuk előbbi megfigyelésünket, akkor kapjuk, hogy $S_{110} = 0$. Ne feledjük, hogy ez a $\{b_n\}$ sorozat első 110 elemének összegére vonatkozik, így az eredeti sorozat első száztíz elemének összege 110-zel kevesebb, azaz -110 lesz.

Megjegyzés a II. megoldáshoz

A II. megoldás lényegében az első megoldás gondolata abban a speciális esetben, amikor egy számtani sorozat (a módosított) néhány szomszédos elemének nulla az összege

Általános megjegyzés a feladathoz

A feladat ,,fapados" megoldásában a differencia -0.22, az első elem pedig $10.99\ldots$ Szóval igen könnyen elszámolható az egyenletrendszer és azután a behelyettesítés.

További feladatok

Az első megoldási ötlettel hatékonyan kezelhető a Pintér – Hajnal – Nemetz –Urbán-féle ,,B" fakultációs 12. osztályos Matematika tankönyv egyik összefoglaló feladata a 335. oldalon.

Jelölje d a számtani sorozat differenciáját, S_n a sorozat első n tagjának összegét.

a.) Igaz-e, hogy $3 \cdot S_{2n} - S_n = S_{3n}$, minden n pozitív egészre?

b.) Milyen m, p pozitív egész számokra igaz, hogy

$$d(S_{nm} - S_n) = S_{pn}?$$

c.) Igaz-e tetszőleges k és m pozitív egészekre

$$\frac{S_k - S_m}{S_{k+m}} = \frac{k-m}{k+m}?$$

d.) Mutassuk meg, hogy

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

e.) Igazoljuk, hogy ha k, m, n pozitív egészek, akkor

$$(m-n)\frac{S_k}{k} + (n-k)\frac{S_m}{m} + (k-m)\frac{S_n}{n} = 0.$$