3. foglalkozás

Itt Gyenes Zoltán kolléga adott egy nagyon érdekes bizonyítást a Pitagorasz-tételre differenciálszámítás segítségével.

A bizonyításhoz felhasználta a Heron-képletet. Erre a tankönyvekben, feladatgyűjteményekben kétféle bizonyítás szerepel. Ezek közül csak az egyik alapul a Pitagorasz-tételen, a másik a beírt és hozzáírt körök érintőszakaszain, a körök sugarainak hosszán és két derékszögű háromszög hasonlóságán múlik. Most ebben a tekintetben csak az a fontos, hogy ez a második bizonyítás független a Pitagorasz-tételtől.

Rögzítsük a háromszög két oldalát, a-t és b-t, és változtatva a harmadik oldalt figyeljük, hogy mikor lesz legnagyobb a háromszög területe. Tudjuk, hogy akkor, ha a két megadott oldal, a és b merőlegesek lesznek egymásra. Milyen feltételt ad a szélsőértékszámítás a harmadik oldalra?

A terület helyett, a sokkal kényelmesebben kezelhető $16T^2$ maximumát keressük, hogy a törtektől és a gyököktől megszabaduljunk. A fentiek szerint Heron képletéből:

$$f(x) = 16T^2 = (x+a+b)(x-a+b)(x+a-b)(-x+a+b).$$

Deriváljuk most ezt a négy tényezős szorzatot x szerint. Minden lépésben egy tényező deriváltja 1 vagy -1 a többi tényezők változatlanok maradnak. Deriválás után célszerű az egész kifejezésből kiemelni a $16T^2$-et.

$$f'(x) = 16T^2\Big[\frac{1}{x+a+b} + \frac{1}{x-a+b} + \frac{1}{x+a-b} - \frac{1}{-x+a+b}\Big] =$$

$$16T^2\Big[\left(\frac{1}{x+a+b} - \frac{1}{-x+a+b}\right) + \left(\frac{1}{x-a+b} + \frac{1}{x+a-b}\right)\Big] =$$

$$16T^2\Big[\frac{-2x}{(a+b)^2-x^2} + \frac{2x}{x^2-(a-b)^2}\Big].$$

Ott lehet maximum, ahol ez nulla. Nyilván nem az lesz a maximum, amikor $16T^2 = 0$, így elég az

$$\frac{f'(x)}{16T^2} = \frac{-2x}{(a+b)^2-x^2} + \frac{2x}{x^2-(a-b)^2} \tag{1}$$

függvény zérushelyeit vizsgálni. A maximum természetesen nem az $x = 0$ esetben lesz, így egyszerűsíthetünk. Rendezés után

$$(a+b)^2 - x^2 = x^2 - (a-b)^2.$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2x^2,$$

$$2a^2 + 2b^2 = 2x^2,$$

$$x = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy ez valóban maximumhely. Ha az $x > \sqrt{a^2+b^2}$ és a háromszög-egyenlőtlenségnek megfelelően még kisebb, mint $(a+b)$, továbbá $(a+b)$-hez tart, akkor a (1) derivált vizsgált részében (az első rész mindig pozitív) az első tört minusz végtelenhez, a második egy pozitív értékhez közeledik, tehát a nagyobb x-ekre a derivált negatív. A kisebb értékek esetén pedig közeledjen az x az $|a-b|$-hez. Látjuk, hogy ekkor az első tört egy negatív konstanshoz, míg a második plusz végtelenhez közeledik. Az $x^2 = a^2 + b^2$ esetében tehát valóban maximuma van a területnek, derékszögű háromszögnél éppen ekkora lesz a harmadik oldal.