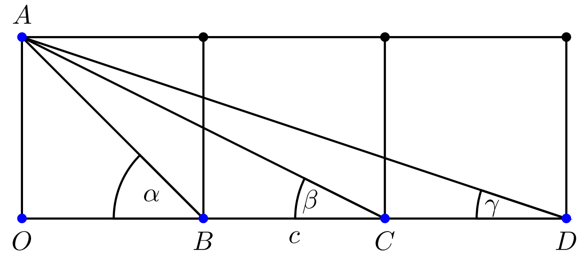
2. foglalkozás

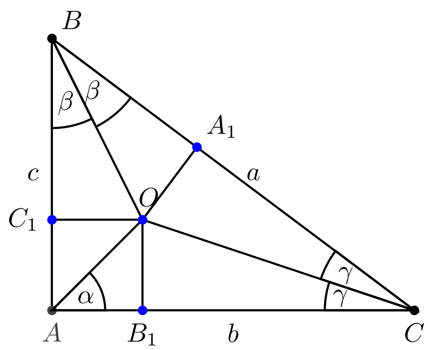
Szászné Simon Judit egy másik ismert és az általános iskola hetedik osztályától az addíciós tételekig rendre felbukkanó probléma újszerű megoldását is bemutatta. A megoldása azután, más adatokkal egy KÖMAL -ba kitűzésre javasolt feladatot is eredményezett.

Feladat: Vegyünk három egybevágó négyzetet az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy $\alpha = \beta + \gamma$.



A feladatnak többféle megoldása ismert, a tanulók életkorától függően, a négyzetrácson berajzolt háromszögektől egészen az addíciós tételek használatáig. A most következő megoldás egy háromszög-geometriai interpretáció lesz.

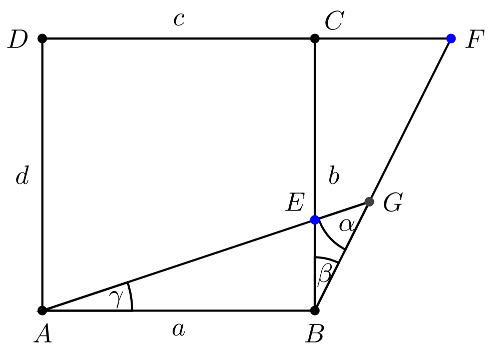
Megoldás: Vegyük a $3, 4, 5$ egység oldalú derékszögű háromszöget, továbbá beírt körének középpontját és állítsunk merőlegeseket a kör középpontjából az oldalakra.



Felhasználjuk, hogy derékszögű háromszögre a beírt kör sugara jelöléseinkkel $\frac{b+c-a}{2} = s - a$ és a hegyesszögű csúcsokhoz tartozó érintőszakaszok $s - b$, illetve $s - c$. Összevetve a feladathoz tartozó három négyzet jelöléseivel, látjuk, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögei $2\beta, 2\gamma$. A két hegyesszög összege $90°$, tehát $\beta + \gamma = 45° = \alpha$.

Ugyanez a feladat, más megfogalmazásban az 1951. évi Kürschák József Matematikaverseny első feladata volt.

Feladat (Kürschák-verseny, 1951): Az a oldalú $ABCD$ négyzet BC oldalára felmérjük a $BE = \frac{a}{3}$ távolságot, DC oldalának meghosszabbítására pedig a $CF = \frac{a}{2}$ távolságot. Bizonyítandó, hogy az AE és BF egyenesek metszéspontja a négyzet köré írt körön van.

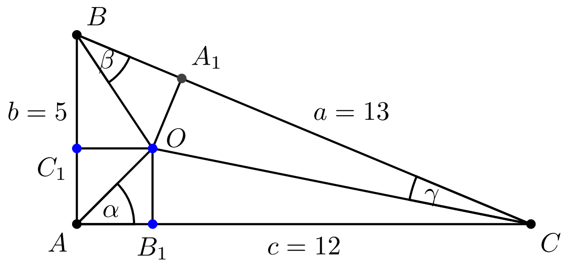


Az ábrán az eredeti feladat szögekre vonatkozó jelöléseit használva látjuk, hogy $CBF\angle = \beta$, az 1 és 2 egység befogójú derékszögű háromszög kisebbik hegyesszöge, míg $EAB\angle = \gamma$, az 1 és 3 egység befogókkal rendelkező derékszögű háromszög kisebbik szöge. Ezek összegéről már tudjuk, hogy 45°, tehát az ABG háromszögben a G csúcsnál fekvő szögre $AGB\angle = 180° - \beta - \gamma - 90° = 45°$. Az $ABCD$ négyzet köré írt körben az AB húrhoz 45°-os kerületi szög tartozik, tehát G a köré írt körön van.

A KÖMAL-feladatjavaslat a Kürschák-feladat módosított változata. Eredeztetése és gyors, elegáns megoldása ismét egy nevezetes, egész oldalú derékszögű háromszög beírt körére és érintőszakaszaira vonatkozó ismereteinkkel lehetséges.

Feladat(KÖMAL 2010. december, B.4316. feladat)
Legyen az $ABCD$ négyzet BC oldalának B-hez legközelebbi ötödölő pontja E, továbbá a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontjának C-re vonatkozó tükörképe F. Mutassuk meg, hogy az AE és BF egyenesek az $ABCD$ négyzet köré írt körön metszik egymást.

A feladat szemléltetésére most is használható a Kürschák verseny feladatának fenti ábrája, csak az arányok mások benne. A háttérben itt az 5, 12, 13 egység oldalakból szerkesztett derékszögű háromszög áll. Ennek a háromszögnek a beírt köre $r = \frac{12+5-13}{2} = 2$ egység sugarú. A csúcsoknál keletkező érintőszakaszok $2, 3, 10$ egység hosszúságúak. A két hegyesszög felének összege ismét 45°. Ez adja megoldás alapját.



Ebben az esetben is kényelmes lehet egy olyan változat, ahol egymás mellett elhelyezett négyzetekkel fogalmazunk.

Az általános iskolásokkal is tárgyalható megoldást az F pont felvétele után látjuk.