1. foglalkozás, 2010. szeptember 02.

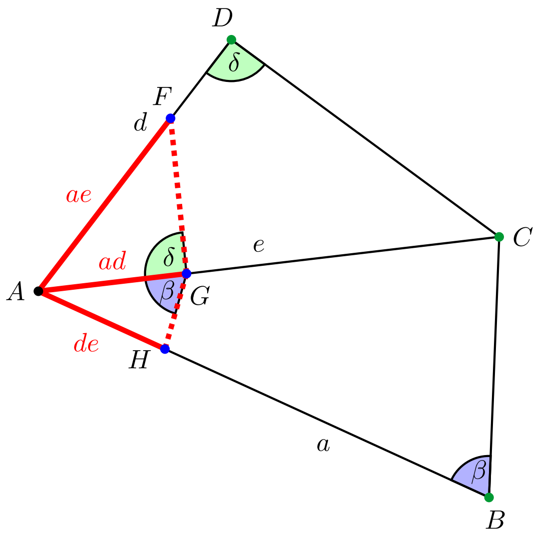
A húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaios-tételre több bizonyítás is ismert. Egy nagyon elegáns és órán is könnyen tárgyalható bizonyítást ismertetett Szászné Simon Judit kolléganő az első szemináriumon. A bizonyítást Számadó Lászlótól, az Árpád Gimnázium tanárától hallotta egy előadáson, aki viszont egy osztálytársától, Kiss Györgytől vette az ötletet. A levezetés szerepel az alábbi tankönyvben is:

Gerőcs - Számadó: Matematika 10., 127. oldal, (NT 16202),
http://www.ntk.hu/cikk/ntkshop/16202

Tétel: Az ABCD tetszőleges síknégyszög oldalainak hossza rendre a, b, c, d, átlóinak hossza e és f, megfelelő szögei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ekkor teljesül, hogy

$$ef \leq ac + bd, \text{illetve}$$

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cdot cos(\beta + \delta).$$



Bizonyítás: Hosszabbítsuk meg az A csúcsból induló szakaszokat a következőképpen. A d oldal AD félegyenesén legyen az F pont olyan, hogy $AF = a \cdot e$, továbbá az a oldal AB félegyenesén a H pont olyan, hogy $AH = d \cdot e$, és végül válasszuk az AC átló AC félegyenesén a G pont úgy hogy, $AG = a \cdot d$.

Tekintsük az ABC és AGH háromszögeket. A két háromszög A-nál fekvő szöge megegyezik és az ezt közrefogó két-két oldal aránya is ugyanakkora (d). A két háromszög tehát hasonló és ennek megfelelően a GH szakasz hossza $d \cdot b$. Az adatok felvétele alapján azt is látjuk, hogy a B csúcsnak a G csúcs felel meg, azaz $ABC\angle = HGA\angle = \beta$.

Teljesen hasonló módon látható be további két-két háromszög hasonlósága. Az ACD és AFG háromszögek is hasonlók, a hasonlóság aránya itt éppen a, s ezért egyrészt $FG = a \cdot c$, másrészt $ADC\angle = AGF\angle = \delta$.

A harmadik párt az ABD és AFH háromszögek alkotják. Itt is közös az egyik szög, tovább az ezt közrefogó oldalak aránya is megegyezik, (e). A hasonlóság miatt az $FH = e \cdot f$.

Az eredeti négyszög adataival összevetve látjuk, hogy az FGH háromszögben az $FGH\angle$ az $AGH\angle$ és $AGF\angle$ összege $(\varphi = \beta + \delta)$, vagy ezek összegének teljes szögre kiegészítő szöge. Mindkét esetben felírhatjuk a háromszög-egyenlőtlenséget és a cosinustételt az FH oldalra. Az előbbiből látjuk, hogy

$$ef \leq ac + bd.$$

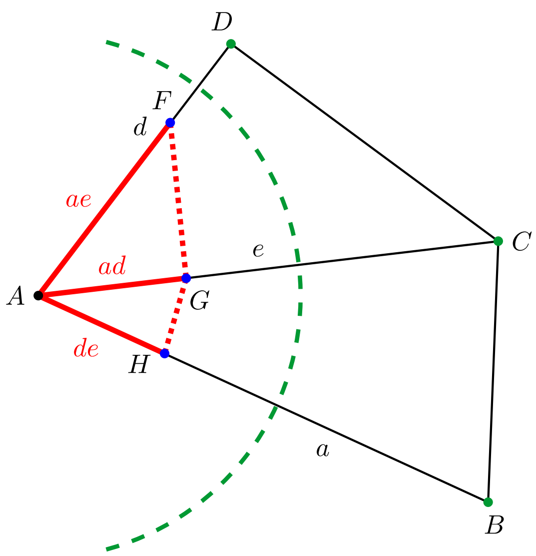
Az utóbbiból pedig figyelembe véve a cosinusfüggvény tulajdonságát $(cos\varphi = cos(360° - \varphi))$. Mindenképpen kapjuk, hogy

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cdot cos(\beta + \delta).$$

Amennyiben a szemközti szögek összege 180° a háromszög elfajuló, illetve a cosinustételben $\beta + \delta = 180°$, $ef = ac + bd$, vagyis az ismert Ptolemaios-tétel adódik.

Megjegyzés

A kezdő ötlet – az A-ból induló AB, AC, AD félegyenesek mindegyikére mérjük fel a másik kettő szorzatát – eredetét firtatta Hraskó András. Valószínű, hogy egy inverziós bizonyítás áll a háttérben, ugyanis egy A centrumú inverzió hoz létre ilyen pontrendszert. Nevezetesen, az A centrumú $\sqrt{ade}$ sugarú körre vonatkozó inverziónál a B, C, D pontok képe rendre H, G, F.



Másrészt, ha adott három, egymást páronként metsző kör, akkor a hatványpontjukkal együtt épp a megoldásban vázolt szituációt állítják elő. A körök most rendre a $BHCG$, $CGFD$, $FDHB$ négyszögek körülírt körei, páronként hatványvonaluk CG, FD és HB, hatványpontjuk A.