11. Feladatgyűjtemény

A fejezet első részében összefoglalási igénnyel felsoroljuk a cikk korábbi (kitűzött és megoldott) feladatait; a második részben néhány gyakorló feladatot tűzünk ki.

Feladatok a 2. fejezetben:

2.1. feladat: Egy urnában k darab kék és p darab piros golyó van ($k + p = n$). Ketten felváltva húznak véletlenszerűen egy-egy golyót úgy, hogy miután megnézték a golyó színét, visszateszik az urnába. Az a játékos győz, aki először húz piros golyót. Mekkora eséllyel nyer A, illetve B?

2.2. feladat: Két játékos felváltva dob fel egy dobókockát. Az a játékos győz, aki először tud hatost dobni. Mekkora valószínűséggel nyernek az egyes játékosok?

2.3. feladat: A **2.1.** játékot annyiban módosítjuk, hogy az A játékos győzelméhez a piros golyót kétszer kell kihúznia, míg B-nek továbbra is elég egy piros húzás a győzelemhez. Mekkora eséllyel nyer most A, illetve B?

2.4. feladat: Átlagosan hány húzásig tart a **2.1.** játék?

2.5. feladat: Átlagosan hány húzásig tart a **2.3.** játék?

2.6. feladat: Végezzük el a **2.1.** játék általános vizsgálatát (kétszemélyes visszatevéses sorsolás állandó P valószínűséggel).

2.7. feladat: Végezzük el a **2.3.** és **2.5.** játék általános vizsgálatát (kétszemélyes visszatevéses sorsolás állandó P valószínűséggel; a kezdőnek kétszer kell piros golyót húznia).

2.8. (kitűzött) feladat: Megvizsgálhatjuk a probléma következő általánosításait:

a) Adott golyóeloszlás esetén az A játékosnak x-szer, a B játékosnak $(x + k)$-szor kell kihúznia a piros golyót, hogy nyerjen.

b) Ha adott x és k, akkor közelítőleg milyen golyóeloszlás esetén lesz igazságos a játék?

c) Módosíthatjuk a nyerési valószínűségeket. Például A nyer p, B nyer $q = 1 – p$ valószínűséggel húzásonként.

d) További általánosítási lehetőség, ha r valószínűséggel „nem történik semmi”: ekkor $p + q + r = 1$.

e) Az eredeti játékokat és a fenti általánosításukat kettőnél több személy is játszhatja.

Feladatok a 3. fejezetben:

3.1. feladat (KöMaL P.209.): Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az A játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FFF volt, B pedig akkor, ha az utolsó három dobás FIF volt. Melyik félnek kedvező a játék?

(Például az FIIFFF játékot A nyerte a 6. lépésben; az IIIFFIF játékot pedig B a 7. lépésben.)

3.2. feladat: Átlagosan hány dobásig tart a **3.1.** játék?

3.3. feladat: Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az *A* játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FFF volt. A *B* játékos szabadon választhat egy saját, három dobás hosszú célsorozatot; *B* akkor győz, ha az utolsó három dobás az általa választott célsorozattal egyezik meg. Hogyan érdemes *B*-nek választania?

3.4. feladat: Elemezzük a szimmetria szempontjából azokat a játékokat, amelyekben *A* és *B* kettő hosszúságú (különböző) célsorozatot választ! Kinek melyik játék az előnyös?

3.5. feladat (problémafelvetés): Bebizonyítjuk, hogy bármely két sorozat „szimmetrikus”; abban az értelemben, hogy bármelyiket is választja *A* és *B*, a játék igazságos lesz.

3.6. feladat: Két játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után. Az *A* játékos akkor győz, ha a fejek száma hárommal több lesz, mint az írások száma; míg *B* akkor győz, ha az írások száma lesz hárommal több, mint a fejek száma.

Elemezzük a játékot! Mekkora valószínűséggel győz *A* és *B* a játék különböző állapotaiban? Mennyi ezekben az állapotokban a játék befejezéséig szükséges dobások átlagos száma?

3.7. feladat: Két játékos felváltva dobál fel egy szabályos pénzérmét. Az a játékos győz, aki először dob fejet. Vizsgáljuk meg a játékot!

3.8. feladat: A **3.1.** feladatban az *A* játékos FFF sorozatával szemben nagyobb eséllyel nyert a *B* játékos FIF sorozata, a nyerési arány $A : B = 2 : 3$ volt. Módosítsunk *B* sorozatán úgy, hogy nehezebb dolga legyen; például *B* akkor nyerjen, ha a FIFI sorozat jön ki eredményül.

a) Mennyivel lett igazságosabb a játék?

b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból kapjuk meg külön-külön az FFF, illetve FIFI sorozatokat!

3.9. (kitűzött) feladat (KöMaL B.3849.) Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának várható értéke?

3.10. (kitűzött) feladat: Egy érmét hajigálunk. Várhatóan hányszor kell feldobni, hogy **a)** FF, illetve **b)** FI jöjjön ki egymás után? (Ez két különböző feladat.)

3.11. (kitűzött) feladat: Egy érmét addig dobálunk, amíg három egymás utáni dobásban FIF vagy IIF nem adódik.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy FIF adódik előbb?

b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból kapjuk meg külön-külön az FIF, illetve az IIF sorozatokat!

3.12. (kitűzött) feladat: Módosítsuk az előző sorozatokat úgy, hogy egy F dobással mindkettőt megtoldjuk. Tehát: egy érmét addig dobálunk, amíg három egymás utáni dobásban FIFF vagy IIFF nem adódik. Mennyiben változtak meg az egyes nyerési valószínűségek?

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy FIFF adódik előbb?

b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból áll elő külön-külön az FIFF, illetve az IIFF sorozat!

3.13. (kitűzött) feladat: Három játékos egy szabályos érmét többször feldob egymás után úgy, hogy mindig csak a legutolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. Az *A* játékos akkor győz, ha az utolsó három dobás FIF volt; *B* akkor, ha az utolsó három dobás FII; végül C akkor, ha az utolsó három dobás FFI volt. Mekkora eséllyel nyernek az egyes játékosok? Átlagosan hány dobásig tart a játék?

Feladatok a 4. fejezetben:

4.1. feladat (konform piros stratégia): Egy urnában 10 golyó van, kezdetben 7 darab kék és 3 darab piros. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. A játékszabály a következő: ha a kiválasztott golyó kék, pirosra cseréljük ki; ha piros, akkor változtatás nélkül visszatesszük. (Ebben a játékban tehát csak nőhet a piros golyók száma.) A játéknak akkor van vége, amikor minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

4.2. feladat (kétirányú színpárbaj): Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 3 piros és 3 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játékot akkor nyeri Piros (P), ha minden golyó piros lesz; míg Kék (K) akkor, ha minden golyó kék lesz. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

4.3. feladat (egyirányú színpárbaj): Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 3 piros és 3 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játéknak akkor van vége, ha minden golyó piros lesz. Átlagosan hány lépésig tart egy játék? (Először próbáljuk számolás nélkül megbecsülni, hogy mennyivel nőnek a **4.2.** feladat lépésszámai!)

4.4. feladat: Egy 486 DLC 40 MHz-es AT számítógép az [1, 32] intervallumban egymillió véletlenszámot 11,59 másodperc alatt generált ki. Ugyanez a gép átlagosan mennyi idő alatt osztott ki négy játékos között egy 32 lapos kártyapaklit? (Az osztási algoritmus a következő: a gép először egy véletlenszámot választ az [1, 32] intervallumból; ha a számnak megfelelő kártyalap még nem foglalt, kiosztja a soron következő játékosnak; ha a lapot már megkapta valamelyik játékos, akkor a gép új véletlenszámot generál és így tovább.)

4.5. feladat: Vizsgáljuk meg az egyszerűbb alapjátékokat! Ebben két játékos, a kezdő *A* és a másodhúzó *B* játszik egymással. *A* nyer, ha piros golyót húz, *B* nyer, ha kéket; s a golyók kezdeti színmegoszlása

a) $(p, k) = (1, 1)$; **b)** $(p, k) = (1, 2)$; **c)** $(p, k) = (1, 3)$; **d)** $(p, k) = (2, 3)$; **e)** $(p, k) = (2, 4)$;
f) $(p, k) = (3, 5)$; **g)** $(p, k) = (2, 1)$; **h)** $(p, k) = (2, 2)$; **i)** $(p, k) = (3, 2)$; **j)** $(p, k) = (3, 3)$.

(Természetesen a tanórán a mennyiség helyett a minőségre törekedjünk: kevesebb feladatot tűzzünk ki, de lehetőleg az érdekesebbeket.)

4.6. (kitűzött) feladat: Határozzuk meg az előző játékokban a húzások átlagos számát!

4.7. feladat: Egy urnában kezdetben 1 piros, 2 kék és 3 sárga golyó van. Három játékos, *A*, *B* és *C* felváltva húz visszatevés nélkül. *A* nyer, ha piros golyót húz; *B* nyer, ha kéket; *C*, ha sárgát. Határozzuk meg *A*, *B*, *C* nyerési esélyét!

4.8. (kitűzött) feladat: Határozzuk meg az előző játékban a húzások átlagos számát!

4.9. (kitűzött) feladat (KöMaL A.381.): Egy n oldalú „dobókockát” addig dobálunk, amíg mind az n lehetséges eredményt legalább egyszer megkapjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

4.10. (kitűzött) feladat: Egy fizikusok által a gázok diffúziójára használt modell a következő:

Egy urna üres, egy másikban 6 darab számozott golyó van. Egy kísérlet abból áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy számot 1-től 6-ig, és a neki megfelelő golyót áttesszük a másik urnába. A játéknak akkor van vége, ha a golyók eloszlása 3 - 3.

a) Átlagosan hány lépésig tart a kísérlet?

b) Oldd meg a fordított feladatot is! (3 -3 golyó esetén várhatóan hány lépés után fog kiürülni valamelyik urna?)

4.11. (kitűzött) feladat: Egy dobozban négy különböző színű golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt, majd az első golyót olyan színűre festjük, mint a második. Várhatóan hány húzás kell ahhoz, hogy minden golyó egyszínű legyen?

Feladatok az 5. fejezetben:

5.1. feladat: Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjátékot $h = 2$ hosszúságú pályán, ha a korong kezdetben az első mezőn van!

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a játék döntetlennel ér véget?

b) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong az első, illetve a második mezőn van?

c) Átlagosan meddig (hány dobásig) tart a játék? (A játéknak akkor van vége, ha a korong valamelyik oldalon elhagyja a pályát.)

5.2. feladat: Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a $h = 3$ hosszúságú pályán!

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben az első (második, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

5.3. feladat: Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a $h = 4$ hosszúságú pályán!

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben az első (második, ..., ötödik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

5.4. feladat: Vizsgáljuk meg a ferdefoci alapjáték valószínűségeit a $h = 5$ hosszúságú pályán!

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben az első (második, ..., ötödik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

5.5. feladat: A ferdefoci játék egy újabb változata, amikor a korong nem egyforma valószínűséggel lép a két irányba (ez az „igazi" ferdefoci). Legyen például a balra lépés valószínűsége $p = \frac{2}{3}$, a jobbra lépés valószínűsége $q = \frac{1}{3}$, a pálya hossza $h = 3$.

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben a második (első, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

5.6. feladat: Az előző játékot annyiban módosítjuk, hogy most a korong adott valószínűséggel helyben is maradhat. (Ilyen esetben tehát a lépésszám 1-gyel nő, de a korong nem mozdul el.) Legyen a balra lépés valószínűsége $p = \frac{2}{5}$, a jobbra lépés valószínűsége $q = \frac{1}{5}$, a helyben maradás valószínűsége $r = 1 - p - q = \frac{2}{5}$; a pálya hossza $h = 3$.

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben a második (első, harmadik) mezőn van?

b) Mekkora az átlagos lépésszám az egyes esetekben?

Feladatok a 6. fejezetben:

6.1. feladat (általánosítás a pálya hosszára és a lépési valószínűségekre): Vizsgáljuk meg a ferdefoci játékot tetszőleges h hosszúságú pályán! Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben az első (második, ...) mezőn van? (Érdemes rögtön a feladat általánosítását vizsgálni: tegyük fel, hogy a korong nem egyforma valószínűséggel lép balra, illetve jobbra. Legyen a balra lépés valószínűsége p, a jobbra lépés valószínűsége $q = 1 - p$.)

6.2. feladat: Legyen a h hosszúságú pályán a balra lépés valószínűsége p ($\neq \frac{1}{2}$) a jobbra lépés valószínűsége $q = 1 - p$. Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a korongot, hogy a játék közelítőleg igazságos legyen?

6.3. feladat (a lépésszámok általános vizsgálata): Legyen a h hosszúságú pályán a balra lépés valószínűsége p, a jobbra lépés valószínűsége $q = 1 - p$. Melyik mezőre kell kezdetben helyezni a korongot, hogy a játék a lehető legtovább tartson?

6.4. feladat (helyben maradási valószínűség): A ferdefoci játék egy újabb változata, amikor a korong r valószínűséggel helyben marad. Ekkor a lépésszám eggyel nő, de a korong nem változtatja helyét. Rögtön általánosan tárgyaljuk a feladatot: balra p, jobbra q legyen az elmozdulási valószínűség; ekkor $p + q + r = 1$ teljesül. A kérdések ugyanazok:

a) Mekkora valószínűséggel győz J, ha a korong kezdetben az első (második, ...) mezőn van?

b) Mennyi a játék átlagos lépésszáma?

6.5. feladat (különböző lépéshossz): A ferdefoci játék egy másik változata, amikor a korong nem egyforma nagyot lép jobbra, illetve balra. A következő játékban legyen a balra lépés valószínűsége $\frac{2}{3}$, a jobbra lépés valószínűsége $\frac{1}{3}$; viszont ha a korong jobbra lép, egy lépésben egyszerre két mezőt halad. Határozzuk meg az egyes nyerési valószínűségeket a $h = 5$ hosszúságú pályán!

6.6. feladat (egyirányú ferdefoci – kitűzés): A ferdefoci játék egy másik lehetséges változata, amikor a korong a pálya egyik széléről, például a jobb kapuról visszaverődik. (Ekkor természetesen mindig *J* győz.) Vizsgáljuk meg a játék átlagos lépésszámát!

6.7. (kitűzött) feladat ([7], 16.43.) X-nek x, Y-nak y forintja van. Szabályos érmével játszanak: feldobják egymás után, és ha fejre esik, X kap Y-tól egy forintot; írás esetén viszont Y kap X-től egy forintot. A játék addig tart, amíg valamelyikük fizetésképtelenné nem válik.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy X megy tönkre?

b) Átlagosan hány dobásra van szükség a játék befejezéséhez?

Feladatok a 7. fejezetben:

7.1. feladat: A síkbeli négyzetrács egyik mezőjében elhelyezkedő bolyongó pont mindegyik lépésében véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel lép a négy, élben szomszédos mező egyikére. A bolyongó pont kezdetben a 3x3-as táblázat egyik mezőjében van.

a) Átlagosan hány lépés múlva hagyja el a pont a táblázatot?

b) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha a csúcsban érintkező négy mezőre is léphet a pont? (Tehát a szomszédsági definíciót változtattuk meg: egy mezőnek most nyolc szomszédja lehet.)

c) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha irányfüggő valószínűséggel dolgozunk? Például balra kétszer akkora valószínűséggel lép a pont, mint a többi irányba; vagyis egyik irányba támogatott, „szélfútta” bolyongásról van szó.

7.2. feladat: Egy bolyongó pont kezdetben a 2x2x2-es kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy kijut a kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva kerül ki a pont a 2x2x2-es kocka felszínére?

7.3. feladat: Hogy legyen egyéb összehasonlító adatunk is, oldjuk meg a **7.1.** feladattal analóg térbeli problémát, vagyis:

Egy bolyongó pont kezdetben a 3x3x3-as kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy a nagy kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva jut ki a pont a 3x3x3-as kocka felszínére?

7.4. feladat (kitűzés): Egy szabályos nyolcszög alakú pálya két szemköztes csúcsában egy egér és egy sajtdarab van. Adott időközönként az egér átmegy egy szomszédos csúcsba a sokszög valamelyik oldala mentén. (A sajtot nem látja, útválasztása véletlenszerű.) Átlagosan hány lépés múlva találja meg a sajtot?

7.5. feladat: Egy szabályos nyolcszög alakú labirintus egyik csúcsában egy egér, másik csúcsában egy sajtdarab van. Az egér nem látja a sajtot; minden lépésben a nyolcszög oldalai vagy átlói közül véletlenszerűen választ egyet, és az utat csúcstól csúcsig végigjárja (tehát például a második lépésben visszatérhet a kiindulási helyére).

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egér nem találja meg a sajtot?

b) Átlagosan hány lépés múlva találja meg az egér a sajtot?

c) Átlagosan mennyi időre van szüksége az egérnek, míg az összes csúcsot sikerül átkutatnia?

d) Mennyivel csökken a keresési idő, ha az egér intelligensebb, és visszafelé nem keres? (Tehát minden, a kezdetitől különböző lépésben hat irány közül választ.)

7.6. feladat: Válaszoljuk meg az előző feladat **b) – d)** kérdéseit nyolcszög helyett szabályos n-szög alakú labirintusra!

7.7. feladat: Egy 2x2-es négyzetrács alakú pálya egyik csúcsában egy egér, a középső rácsponton pedig egy macska van. Az egér és a macska nem látja egymást; egyenlő időközönként az élben szomszédos pontok közül véletlenszerűen kiválasztanak egyet, és az él mentén megteszik az utat (tehát például a második lépésben visszatérhetnek a kiindulási helyükre). Átlagosan hány lépés múlva találkoznak?

7.8. (kitűzött) feladat: Készítsünk a **7.4 – 7.7.** feladatokkal analóg térbeli problémákat!

7.9. feladat: Az egyszerű „Ki nevet a végén”-típusú játékban a bábuval a 0. mezőről indulunk, s minden lépésben véletlenszerűen 1-et vagy 2-t lépünk előre. (Mindig feldobunk egy érmét; ha a dobás írás, akkor 1-et, ha pedig fej, akkor 2-t lépünk.) Mekkora valószínűséggel lépünk rá a 100-as mezőre?

7.10. feladat: Az előző „Ki nevet a végén”-játékot annyiban módosítjuk, hogy most minden lépésben véletlenszerűen 1-et, 2-t vagy 3-at lépünk, mindegyiket $\frac{1}{3}$ valószínűséggel. Mekkora valószínűséggel lépünk rá a 100-as mezőre?

7.11. (kitűzött) feladat (KöMaL F. 3042.): Egy a Ki nevet a végén?-hez hasonló játékban egy bábuval legalább 100 lépést kell megtenni. Egyszerre véletlenszerűen 1, 2, 3 vagy 4 mezővel léphetünk tovább. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy rálépünk az n-edik mezőre. (A bábu a nulladik mezőről indul.) Bizonyítsuk be, hogy $0{,}399\,999 < p_{100} < 0{,}400\,001$.

7.12. (kitűzött) feladat: A bolyongó pont kezdetben a 2x3-as táblázat egyik mezőjében van.

a) Átlagosan hány lépés múlva hagyja el a pont a táblázatot?

b) Mennyivel változik meg a lépésszám, ha a táblázatot csak balról hagyhatja el a pont? (A másik három irányban a tábla szélén gát van; ezekhez érve a pont „visszapatta”.)

c) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha a csúcsban érintkező négy mezőre is léphet a pont? (Tehát a szomszédsági definíciót változtattuk meg: egy mezőnek most nyolc szomszédja lehet.)

d) Mennyivel változik meg az átlagos lépésszám, ha balra kétszer akkora valószínűséggel lép a pont, mint a többi irányba? (Vagyis irányfüggő valószínűséggel dolgozunk: „szélfútta” bolyongásról van szó.)

e) Vizsgáljuk meg a fenti egyszerű kétdimenziós problémákat 2x4-es, 2x5-ös stb. alakú táblákra is!

7.13. (kitűzött) feladat: Egy kocka élein bolyongó pók az egyik csúcsból indul, és a kocka szemközti csúcsában lévő légyhez igyekszik. Minden lépésben egy élt csúcstól-csúcsig jár végig, s minden csúcsban a lehetséges 3 irányból véletlenszerűen választja ki a továbbhaladási irányt (akár visszafelé is mehet az előző lépéséhez képest).

a) Átlagosan hány lépés múlva éri el a legyet?

b) Mihez kell több idő (lépés): ahhoz, hogy a légyhez érjen, vagy ahhoz, hogy visszatérjen a kiindulási helyére?

c) Átlagosan hány lépés kell a póknak, hogy a kocka összes csúcsát bejárja?

d) Mennyivel csökken a keresési (bejárási) idő, ha a pók intelligensebb, és visszafelé nem keres? (Tehát minden, a kezdetitől különböző lépésben már csak két irány közül választ.)

7.14. (kitűzött) feladat: Az előző feladat **a)** részét (amikor a pók keresi a legyet) annyiban módosítjuk, hogy most a légy is véletlenszerű mozgást végez, hasonlóan a pókhoz. Átlagosan hány lépés múlva találkoznak?

7.15. (kitűzött) feladat: Egy kocka hét csúcsában egy-egy bogár, a nyolcadik csúcsban pedig egy pókháló van. Adott jelre a bogarak azonos sebességű, véletlenszerű bolyongást végeznek a kocka élein. Minden lépésben egy élt csúcstól-csúcsig végigjárnak, s minden csúcsban a lehetséges 3 irányból véletlenszerűen választják ki a továbbhaladási irányt (akár visszafelé is mehetnek az előző lépésükhöz képest). Ha egy bogár a pókhálóba kerül, akkor onnan már nem tud elszabadulni. Átlagosan mennyi idő múlva kerül az összes bogár a pókhálóba?

7.16. (kitűzött) feladat: Egy bolyongó pont kezdetben a 2x2xn-es kocka egyik egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy kijut a kocka felszínére. Átlagosan hány lépés múlva kerül ki a pont a 2x2xn-es kocka felszínére, ha

a) $n = 3$;

b) $n = 4$;

c) $n = 5$?

Feladatok a 8. fejezetben:

8.1. feladat: Milyen kapcsolat áll fenn az eddig ismertetett, különböző típusú játékok között?

8.2. feladat: Milyen megoldási módszereket alkalmazhatunk akkor, ha sok (igen sok) állapotot kell vizsgálnunk?

8.3. feladat: A bolyongások egy alkalmazása lehet a következő általános probléma: átlagosan hány lépésben jutunk el adott gráf egyik csúcsából a másikba? (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.)

Ebben a feladatban most egyszerű láncokat vizsgálunk (egyetlen útból álló, n pontú, n – 1 élű fagráfokat); s a „logikai rekurzió” módszerét alkalmazzuk.

8.4. feladat: A Markov-láncokat akkor alkalmazhatjuk, ha bármely állapot bekövetkezésének valószínűsége csak az őt közvetlenül megelőző állapottól függ. Mit tehetünk akkor, ha egy állapot bekövetkezése például két korábbi állapottól függ?

8.5. feladat: Többször említettük, hogy a cikkben szereplő játékok 1 valószínűséggel véget érnek. Mi ennek a magyarázata?

8.6. feladat: Ebben a játékban három sorozat verseng egymással: A = FIFI, B = IIFF, C = IFII.

a) Mennyi az egyes sorozatok győzelmi valószínűsége?

b) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásig tart a játék!

c) Határozzuk meg, átlagosan hány dobásból áll elő külön-külön az FIFI, IIFF, illetve IFII sorozat!

8.7. (kitűzött) feladat: Két játékos egy szabályos érmét folyamatosan dobál. András akkor győz, ha a fejek száma 6-tal több, mint az írások száma; Béla pedig akkor, ha az írások száma lesz több 6-tal a fejek számánál. A játszma egy adott pillanatában a dobott fejek száma éppen 2-vel több, mint az írásoké.

a) Mekkora ebben a pillanatban András nyerési esélye?

b) Átlagosan hány dobásig tart még a játék?

c) Mekkora András nyerési esélye akkor, ha a dobott fejek száma 1-gyel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel több az írások számánál?

8.8. (kitűzött) feladat:

a) Átlagosan hány lépésben jutunk el az *n* pontú teljes gráf egyik csúcsából egy kijelölt másik csúcsba? (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.)

b) Átlagosan hány lépésben járjuk be az *n* pontú teljes gráf minden csúcsát?

8.9. (kitűzött) feladat: Bizonyos értelemben a “legnehezebben” bejárható gráfok a “sárkány” alakúak (lásd [3]). Konkrétan tekintsünk egy teljes 4 pontú gráfot, és egy hozzá csatlakozó 8 pontú láncot. Határozzuk meg, hogy véletlenszerű bolyongást végezve a lánc végpontjából átlagosan hány lépésben érjük el

a) valamelyik előre megadott csúcsot;

b) az összes csúcsot!

8.10. (kitűzött) feladat: Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálásos játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

a) A = IFI, B = IFF;

b) A = IFI, B = IIF;

c) A = IFF, B = IIF;

d) A = IFI, B = IFF, C = IIF.

8.11. (kitűzött) feladat: Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálásos játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

a) A = FIFI, B = FIFF;

b) A = FIFI, B = FIIF;

c) A = FIFF, B = FIIF;

d) A = FIFI, B = FIFF, C = FIIF.

8.12. (kitűzött) feladat: Elemezzük Conway algoritmusát alkalmazva a következő érmedobálásos játékokat (győzelmi valószínűség, lépésszámok külön-külön és együtt):

a) A = IFI, B = FIFF;

b) A = IFI, B = FIFFI;

c) A = IFI, B = FIFFF;

d) A = IFI, B = FIFF, C = FFIF.

8.13. (kitűzött) feladat: Conway algoritmusa (és egy kis számítógépes segítség) alkalmazásával állítsuk elő a kétszemélyes, 3 hosszú célsorozatú érmedobálásos játékok valószínűségekre vonatkozó eredménytáblázatát!

8.14. (kitűzött) feladat: Conway algoritmusa (és egy kis számítógépes segítség) alkalmazásával állítsuk elő a kétszemélyes, 3 hosszú célsorozatú érmedobálásos játékok átlagos lépésszámainak az eredménytáblázatát!

8.15. (kitűzött) feladat: Vizsgáljuk meg az IIII sorozat viselkedését a többi 4 hosszú célsorozat ellenében! (Például: FIII : IIII = 15 : 1.) Milyen érdekességet vehetünk észre és mi ennek az oka?

8.16. (kitűzött) feladat (KöMaL P.380.): Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy egy találomra kiválasztott (nem feltétlenül értelmes) n betűs szövegben előfordul a „vagyok” szó. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Feladatok a 9. fejezetben:

9.1. feladat: Szimuláljunk néhány egyszerű diszkrét egydimenziós bolyongást!

A modell a következő: megadjuk a h hosszú lineáris pályán bolyongó pont kezdeti helyzetét (ez 1-től h-ig lehet valamelyik pozíció); majd ezután minden lépésben véletlenszerűen elmozdítjuk valamelyik irányba a bolyongó pontot. A bolyongás egyfajta játéknak is tekinthető, melyben azt vizsgáljuk, hogy a pont melyik irányban hagyta el a pályát. A játéknak tehát akkor van vége, ha a pont aktuális pozíciója 0 vagy $h + 1$ lesz.

9.2. (kitűzött) feladat: Bizonyítsuk be az előző feladatban kapott 1 – 4. (igaz) sejtéseket!

9.3. feladat: A fenti bevezető sorsolás (10 játékos, visszatevéses húzás $\frac{1}{6}$ nyerési eséllyel) a legegyszerűbb feladatok közé tartozik, de néhány érdekes kérdést felvet.

a) Ha valaki elnök akar lenni, akkor hogyan érdemes „helyezkednie”? Igyekezzen hamar húzni, vagy inkább később? (A kérdés matematikai megfogalmazása: n játékos esetén melyik helyen legvalószínűbb az első piros húzás?)

b) Átlagosan hány húzásig tart a játék?

c) Hogyan változnak a fenti eredmények, ha megváltoztatjuk a golyók színmegoszlását?

d) És ha többféle golyóval végezzük a húzásokat? (Például 7 kék, 1 piros és 2 sárga golyóval játszunk; aki először húz sárga golyót, a társaság jegyzője lesz.)

9.4. (kitűzött) feladat: Láttuk, hogy a húzások átlagos száma 6. Magyarázzuk meg, ez miért nem jelenti azt, hogy leggyakrabban a 6. jelölt húzza a piros golyót!

9.5. feladat: Egy dobozban n (egyforma) golyó van, közülük 1 piros, a többi kék. Véletlenszerűen, ezúttal visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat. Mi annak a valószínűsége, hogy az i. húzás piros? (Az előző feladatbeli modellt tehát annyiban változtattuk meg, hogy a kihúzott golyót most nem tesszük vissza. Így sorsolták ki Mikszáth: A fekete város c. regényének egyik filmfeldolgozásában Lőcse város főbíráját.)

9.6. feladat: Vizsgáljuk meg az előző feladatot, ha a golyók kezdeti eloszlása 3 piros és 7 kék! Készítsünk a kihúzott golyókból egy 10 hosszúságú sorozatot, és állapítsuk meg, hogy

a) melyik helyen legvalószínűbb az első piros húzás;

b) melyik helyen legvalószínűbb a piros húzás;

c) melyik sorozat húzása a legvalószínűbb?

9.7. (kitűzött) feladat: Oldjuk meg az előző feladatot, ha a golyók kezdeti megoszlása
a) 1 piros, 3 sárga, 6 kék;
b) 3 piros, 2 kék és 5 sárga!

9.8. (kitűzött) feladat: A **9.6.** feladatban szimulációs eredményül azt kaptuk, hogy ha kezdetben a piros és kék golyók száma 3, illetve 6, akkor az első piros golyót átlagosan 2,76. húzásra kapjuk meg. Mennyire valós ez az eredmény? Mi a pontos matematikai érték?

9.9. (kitűzött) feladat: Az **9.6.** feladat szimulációjaként diákjainktól kétféle algoritmust kaptunk. Mindkét algoritmus kezdetben a $g[1..10]$ vektorban tárolja a golyók színét.

Az egyik: Az 1 - 10 közötti i véletlenszámú $g[i]$ golyót a $g[1]$-gyel megcseréli; ezután a 2 - 10 közötti i véletlenszámú $g[i]$ golyót a $g[2]$-vel megcseréli és így tovább. Az algoritmus eredményeképp $g[]$-ben a keresett sorozatot kapjuk.

A másik: Az 1 - 10 közötti i véletlenszámú $g[i]$ golyót eltárolja $h[1]$-ben, i-t megjegyzi; ezután addig generál 1 - 10 közötti véletlenszámot, míg olyan golyót nem talál, amelyiket még nem jegyzett meg, s ezt tárolja el $h[2]$-ben és így tovább. Eredményül $h[]$-ban kapjuk a keresett sorozatot.

Azonos eredményt ad mindkét eljárás? Átlagosan hányszor generálunk véletlenszámot az egyik, illetve a másik eljárásban?

9.10. feladat: Egy dobozban p darab piros színű és k darab kék golyó van. A dobozból kiveszünk két golyót. Ha ezek különböző színűek, akkor a piros golyót visszatesszük, ha egyforma színűek, akkor egy kék golyót teszünk vissza. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg egyetlen golyó marad a dobozban. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a golyó piros?

9.11. feladat: Egy táblára felírtunk 1996 darab 1-est, 1997 darab 2-est és 1998 darab 3-ast. Bármely két számjegyet letörölhetjük, ha helyette a harmadik számjegyet egyszer felírjuk a táblára. Igaz-e, hogy ezt az eljárást ismételve elérhetjük, hogy **a)** csak egyfajta; **b)** csak egyetlen szám marad? Ha igen, melyik lehet ez a szám?

9.12. (kitűzött) feladat: Annak szükséges feltétele, hogy a végállapotban a három számjegy közül bármelyik megmaradhasson, az, hogy a három számjegy darabszámának azonos legyen a paritása. Ez a feltétel vajon elégséges is?

9.13. feladat: Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, megijednek egymástól, mindketten a harmadik színre változtatják a bőrüket. Két azonos színű találkozásakor nem változtatják meg a színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színűvé válik?

9.14. (kitűzött) feladat: Annak szükséges feltétele, hogy a végállapotban a három közül bármelyik színű kaméleon megmaradhasson, az, hogy a három szín darabszáma (mod 3) azonos maradékot adjon. Ez a feltétel vajon elégséges is?

9.15. feladat: Egy urnában tíz golyó van, kezdetben mind kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. A húzási szabály a következő: Ha a kiválasztott golyó kék, pirosra cseréljük ki, ha piros, akkor változtatás nélkül visszatesszük. A játéknak akkor van vége, amikor minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

9.16. feladat: Határozzuk meg a **9.13.** feladat kaméleon-problémájának $s = 1$, $b = 3$, $z = 4$ kiindulási adatokhoz tartozó várható lépésszámát! (Emlékeztetőül: ha két egyforma színű kaméleon találkozik, nem történik semmi; különböző színűek a harmadik színre változtatják a színüket; a játéknak akkor van vége, ha minden kaméleon azonos színű; a várható lépésszám pedig a végállapot eléréséig a találkozások átlagos számát jelenti.)

9.17. feladat: Egy dobozban 3 piros, 2 sárga és 4 kék golyó van. A statisztikus golyómodell szabályait megadhatjuk az alábbi mátrixszal:

	p	**s**	**k**
p	*p*	*p*	*k*
s	*p*	*s*	*k*
k	*k*	*k*	*p*

Itt a **p** sor és **s** oszlop *p* eleme azt a szabályt jelenti, hogy ha elsőnek egy piros, majd másodiknak egy sárga golyót húzunk, akkor egy piros golyót teszünk vissza a dobozba.

Elemezzük a játékot! Mekkora valószínűséggel marad egyetlen piros, sárga, illetve kék golyó a dobozban?

9.18. (kitűzött) feladat: Egy dobozban 3 piros és 3 kék golyó van. Minden lépésben véletlenszerűen (visszatevéssel) kihúzunk egy golyót, s a színét feljegyezzük. A játéknak akkor van vége, ha a húzott piros és kék golyók számának különbsége eléri az 5-öt. Átlagosan hány húzásig tart a játék?

9.19. (kitűzött) feladat: Egy urnában 8 golyó van, kezdetben 4 piros és 4 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és ellenkező színűre cseréljük ki. A játéknak akkor van vége, ha minden golyó színe egyforma. Átlagosan hány lépésig tart ez a [2, 1, 0] típusú játék? (A játék mindkét színben kontrastratégiájú.)

9.20. (kitűzött) feladat: Az előző feladatot annyiban módosítjuk, hogy a játéknak akkor van vége, ha minden golyó piros. Átlagosan hány lépésig tart ez a [2, 1, 0] típusú játék?

9.21. (kitűzött) feladat: Egy dobozban négy különböző színű golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt, majd az első golyót olyan színűre festjük, mint amilyen a második. (A játék típusa [4, 2, 0].) Várhatóan hány húzás kell ahhoz, hogy minden golyó egyszínű legyen?

9.22. (kitűzött) feladat: Egy kémcsőbe egy amőbát helyezünk el. Az amőba szaporodási stratégiája a következő: minden perc végén

– vagy meghal;
– vagy kettéosztódik;
– vagy háromfelé osztódik;
– vagy ül tovább, mintha mi sem történt volna.

Mi annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb elpusztul az összes amőba, ha mind a négy állapotváltozás $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be?

9.23. (kitűzött) feladat: Egy dobozban kezdetben 3 piros, 2 sárga és 4 kék golyó van. Elemezzük az alábbi **a)** – **d)** játékokat!

a)

	p	**s**	**k**
p	*s*	*k*	*s*
s	*k*	*s*	*p*
k	*s*	*p*	*s*

b)

	p	**s**	**k**
p	*s*	*k*	*s*
s	*k*	*ss*	*p*
k	*s*	*p*	*s*

c)

	p	**s**	**k**
p	*s*	*k*	*s*
s	*k*	–	*p*
k	*s*	*p*	*s*

d)

	p	**s**	**k**
p	*pp*	*k*	*s*
s	*k*	*s*	*p*
k	*s*	*p*	*pp*

(Itt *ss* és *pp* azt jelenti, hogy a dobozba két sárga, illetve két piros golyót teszünk vissza.)

9.24. (kitűzött) feladat (egyirányú bolyongás): [12]-ből származik a következő feladat:

Mindenki ismeri a „Ki nevet a végén” játékot, ahol pontosan a célmezőre kell lépni a győzelemhez. Ha a cél pontosan a 100. mező és egy dobókockával játszunk, akkor eltekintve a kiütéstől vagy egyéb trükköktől, mekkora eséllyel fogunk pontosan a 100-as mezőre lépni a végén: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$ vagy $\frac{1}{2}$?

Jelentse p_i annak a valószínűségét, hogy a játékban az i-edik mezőre lépünk.

a) Írjunk egy programot, amellyel elvégezhetjük a játék nagyszámú szimulációját, s állapítsuk meg, hogy a három számérték közül melyik a helyes!

b) Igazoljuk, hogy $p_i = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{i-1}$, ha $i = 1, 2, \dots, 6$.

c) Igazoljuk, hogy $p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}p_{n-2} + \frac{1}{6}p_{n-3} + \frac{1}{6}p_{n-4} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \frac{1}{6}p_{n-6}$.

d) Írjunk egy programot, amellyel kiszámoljuk p_{100} értékét a fenti rekurzív formula segítségével.

Feladatok a 10. fejezetben:

10.1. feladat (a véletlen számok „kiegyenlítődési hajlama”): A [6] könyvben olvashatunk egy újságcikkről: „Ha feldobunk egytrillió tízfillérest, rendkívül furcsa eredményt kapunk: néhány pénzdarab eltéréssel féltrillió fej lesz és féltrillió írás.” Átlagosan mennyi ez az újság által említett „néhány pénzdarabnyi eltérés”?

10.2. feladat: Három herceg, *A*, *B* és *C* egyaránt szerelmes Bergengócia királylányába. Elhatározzák, hogy egyetlen pisztolypárbajban eldöntik, melyikük legyen a kérő. Egyszerre körbeállnak és bármelyikük lőhet bármelyikükre. Tudják egymásról, hogy ha lő, *A* 1, *B* 0,8 és *C* 0,5 valószínűséggel talál, ezért abban állapodnak meg, hogy először lő *C*, utána (ha életben van) *B*, végül *A*. Ha nincs vége a párbajnak, akkor még egy kört lőnek azonos sorrendben.

Mikor a királylány meghallotta a feltételeket, a párbaj előtti este titokban kicserélte *C* első golyóját vaktölténybe.

a) Kibe szerelmes a királylány?

b) Hogyan változnak meg a párbaj valószínűségei, ha most a felek nemcsak kettő, hanem tetszőleges számú lövést adhatnak le?

(A királylány most is csak az első golyót cseréli ki vaktölténybe.)

10.3. feladat (osztozkodás-paradoxon): Két játékos egy szabályos érmével játszik. András akkor győz, ha – nem szükségképpen egymás után – öt fej jön ki, Béla pedig akkor, ha öt írás. A játszma négy fej, két írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok az 1600 Ft-os téten?

10.4. (kitűzött) feladat: A **10.3.** alapfeladatban András 5 fej, Béla 5 írás esetén nyert (nem szükségképpen egymás utáni dobásokkal); s a játék András 4:2-es vezetésekor szakadt félbe. Vizsgáljunk meg egyéb félbeszakadt játékokat is: például ha András vezet

a) 4:1;

b) 3:2;

c) 3:1 arányban.

Mekkora valószínűséggel nyer ekkor András?

10.5. (kitűzött) feladat: Egyéb általánosítási lehetőségek is elképzelhetők. Például: Andrásnak 6 fejet, Bélának 4 írást kell elérnie, s András 2:1-re vezet. Most mekkora valószínűséggel nyer András?

10.6. (kitűzött) feladat: Két játékos egy szabályos érmét folyamatosan dobál. András akkor győz, ha a fejek száma 5-tel több, mint az írások száma; Béla pedig akkor, ha az írások száma lesz több 5-tel a fejek számánál. Amikor a játszma véglegesen félbeszakad, a dobott fejek száma éppen 2-vel több, mint az írásoké. Hogyan osztozzanak a játékosok az 1600 Ft-os téten?

10.7. (kitűzött) feladat: Az osztozkodási alapfeladatot három játékosra általánosítjuk.

András akkor győz, ha – nem szükségképpen egymás után – öt fej jön ki; Béla akkor, ha öt írás; Csaba pedig akkor, ha három fej és három írás.

a) Melyik játékosnak mekkora kezdetben a nyerési esélye?

b) Átlagosan hány dobásig tart egy játék?

c) A játszma két fej, egy írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok a mindannyiuk által befizetett 1600 Ft-os téten?

10.8. (kitűzött) feladat: Három játékos, *A*, *B*, *C* játékában három hosszú érmedobás-sorozatot vizsgálunk. Egy szabályos érmét folyamatosan dobálnak a játékosok úgy, hogy a játék szempontjából mindig csak az utolsó három dobás eredményét veszik figyelembe. (Egy lehetséges játék lenne például a következő: *A* nyer, ha az utolsó 3 dobás az FFF célsorozat, *B* nyer, ha III, *C* nyer, ha IFI.) A szabály ebben a játékban a következő:

Először az *A* játékos választ egy három hosszúságú sorozatot, ez lesz az ő célsorozata; ezután *B* választ egy célsorozatot úgy, hogy *A*-val szemben ez a lehető legjobb legyen számára; majd *C* választja azt, amelyik számára *B*-vel szemben a lehető legelőnyösebb. A játékosok által befizetett tét játékonként és fejenként 12 egység. Ez a játék *A* számára nagyon előnytelennek tűnik, ezért ha *B* vagy *C* nyer a játékban, akkor fájdalomdíjként a 36 egység nyereményből 3 egységet átad *A*-nak.

Kinek legelőnyösebb így ez a játék? Hogyan kezdjen *A*?

(Tapasztalunk valami érdekeset?)

10.9. feladat: Ha a kétszemélyes „fej vagy írás” játékokban az *A* és *B* célsorozatok egymással szemben ugyanakkora valószínűséggel nyernek, a játékot „igazságosnak” nevezzük. Mutassuk meg, hogy az „igazságosság” nem tranzitív reláció!

10.10. (kitűzött) feladat: Ha a kétszemélyes „fej vagy írás” játékokban az *A* és *B* célsorozatok egymás ellen játszanak, és *A* nagyobb valószínűséggel nyer, mint *B*, akkor az *A* sorozatot „jobb”-nak nevezzük. Mutassuk meg, hogy a „jobb” nem tranzitív reláció!

10.11. (kitűzött) feladat: Próbáljuk az előző feladat eredményei alapján megbecsülni, hogy „fej vagy írás” játék esetén az FFI, IFF, IIF, FII sorozatokat (külön-külön) átlagosan hány dobás után kapjuk meg! Számoljuk is ki ezeket az értékeket.

10.12. feladat: Szabályos érmét sokszor ismételten feldobunk, míg vagy szomszédos FIFI, vagy szomszédos IFII sorozatokat kapunk. András akkor nyer, ha az FIFI sorozat jön ki hamarabb, míg Béla akkor, ha az IFII sorozat.

a) Melyik játékosnak előnyös ez a játék?

b) Átlagosan hány dobást kell végeznünk, míg megkapjuk az egyik, illetve a másik sorozatot?

c) Nincs itt valamilyen ellentmondás?

10.13. (kitűzött) feladat: Adottak IFF, IIF, FII, FFI. Két játékos játszik; először *A* választ egy sorozatot, majd egy ettől különbözőt *B*. „Mennyire” előnyös a korábban választó *A* számára ez a játék? Ha játékonként 100 Ft a tét, mennyi az átlagos nyereménye?

10.14. (kitűzött) feladat: A kétszemélyes „fej vagy írás” játékban a célsorozatok: A = IFF, B = FFI. Az előállásukhoz szükséges átlagos lépésszám egyforma: $L(A) = 8$, $L(B) = 8$. Mégis a győzelmi arány $A : B = 3 : 1$. Hogyan lehetséges ez?

10.15. feladat: A **8.6.** feladatban (ami a **10.12.** „kibővítése”) három játékos játszott egymás ellen. András akkor nyert, ha az FIFI sorozat jött ki hamarabb, Béla akkor, ha az IIFF sorozat, míg Csaba akkor, ha az IFII sorozat. Elemezzük a kapott eredményeket! Milyen érdekességeket vehetünk észre?

Kitűzött feladatok a 11. fejezetben

11.1. feladat (KöMaL P. 197.): Tíz ember társasjátékot akar játszani, és ehhez a kezdő embert ki akarják sorsolni. A házigazdát megbízzák, hogy tegyen bele egy kalapba néhány piros és néhány fehér golyót. A kalapból ciklikusan visszatevés nélkül húznak, és aki elsőként húz pirosat, az kezd. Az első húzó a házigazda. Hogyan töltse meg a kalapot, ha nem nagyon szeretne kezdeni?

11.2. feladat: Egy urnában k darab kék és p darab piros golyó van ($k + p = n$). Hárman felváltva húznak véletlenszerűen egy-egy golyót úgy, hogy miután megnézték a golyó színét, visszateszik az urnába. Az a játékos győz, aki először húz piros golyót. Mekkora eséllyel nyer *A*, *B*, illetve *C*? Átlagosan hány húzásig tart a játék?

11.3. feladat: Egy urnában k darab kék és p darab piros golyó van ($k + p = n$). Hárman, *A*, *B* és *C*, felváltva húznak véletlenszerűen egy-egy golyót úgy, hogy miután megnézték a golyó színét, visszateszik az urnába. Az előnyös helyzetben levő kezdő *A* játékosnak a győzelméhez kétszer, a többieknek egyszer-egyszer kell kihúzniuk a piros golyót. Mekkora eséllyel nyer *A*, *B*, illetve *C*? Átlagosan hány húzásig tart a játék?

11.4. feladat: Egy urnában k darab kék és p darab piros golyó van ($k + p = n$). Ketten felváltva húznak véletlenszerűen egy-egy golyót úgy, hogy miután megnézték a golyó színét, visszateszik az urnába. A kezdő *A* játékos akkor győz, ha piros golyót húz; míg a második *B* játékos akkor, ha kék golyót húz. Mekkora eséllyel nyer *A*, illetve *B*? Átlagosan hány húzásig tart a játék?

11.5. feladat ([7], 16.4.): Három személy közül szeretnénk egyet igazságosan kiválasztani. E célból mindhárman feldobnak egy szabályos kockát. Ha a legnagyobb számot közülük csak egy dobja, akkor őt választjuk ki. Ha mindhárman egyforma számot dobnak, akkor megismételjük a dobásokat. Ha a legnagyobb számot ketten dobják, akkor a harmadik személy kiesik a választásból; a másik kettő addig folytatja, amíg különbözőt nem dobnak, és ekkor az nyer, aki a nagyobbat dobja.

a) Igazságos-e ez a sorsolás?
b) Várhatóan hány dobássorozatra kerül sor?

11.6. feladat ([7], 16.4.): Három személy közül szeretnénk egyet igazságosan kiválasztani. E célból mindhárman feldobnak egy szabályos kockát. Ha a legnagyobb számot közülük csak egy dobja, akkor őt választjuk ki. Ha a legnagyobb számot többen (ketten vagy hárman) dobják, akkor megismételjük a dobásokat.

a) Igazságos-e ez a sorsolás?
b) Várhatóan hány dobássorozatra kerül sor?

11.7. feladat: Három játékos felváltva dob egy dobókockával. A kezdő *A* akkor nyer, ha sikerül 1-est dobnia; a másodiknak következő *B* akkor nyer, ha 2-est vagy 3-ast dob; végül a harmadik *C* akkor nyer, ha 4-est, 5-öst vagy 6-ost dob. Mekkora eséllyel nyer *A*, *B*, illetve *C*? Átlagosan hány húzásig tart a játék? Hasonlítsuk össze a kapott valószínűségeket a **4.7.** hasonló játék visszatevéses sorsolási modelljében kapott értékekkel!

11.8. feladat: Egy kockát az első 6-osig dobálunk. Mekkora az ezt megelőző dobások várható összege?

11.9. feladat ([7], 16.5.): Egy urnában van 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó. Ebből egy játékos addig húzhat visszatevés nélkül, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor abba kell hagynia a játékot, és a játszótársától annyi pénzt kap, ahány golyót kihúzott. A játszótárs a maradék golyók közül húzhat addig, amíg ő is kihúzza a zöldet. Ő is annyi pénzt kap a társától, ahány golyót kihúzott. Igazságos-e ez a játék?

11.10. feladat ([7], 16.5.): Egy urnában van 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó. Ebből egy játékos addig húzhat visszatevés nélkül, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor abba kell hagynia a játékot, és a játszótársától annyi pénzt kap, ahány piros golyót kihúzott. A játszótárs a maradék golyók közül húzhat addig, amíg ő is kihúzza a zöldet. Ekkor ő annyi pénzt kap a társától, ahány fehér golyót kihúzott. Igazságos-e ez a játék?

11.11. feladat: Egy statisztikus gázmodell a következő:

Legyen n darab fekete és n darab fehér golyónk. Kezdetben két urnába elhelyezünk valamilyen elosztásban $n – n$ darabot. Egy kísérlet abból áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk mindkét urnából egy-egy golyót, és ezeket megcseréljük. Mi várható elég sok kísérlet után?

11.12. feladat (KöMaL P.81.): Péter és Pál golyókkal játszik. Péternek 12 fehér és 8 fekete golyója, Pálnak 8 fehér és 12 fekete golyója van, golyóikat egy-egy urnában tartják. Lépésről-lépésre egyidejűleg (odanézés nélkül) mindegyikük áttesz egy golyót a saját urnájából a másikba. Mi a valószínűsége annak, hogy a k-adik lépésben Péter fehér golyót tesz át Pálhoz, és Pál Péterhez feketét?

11.13. feladat ([7], 16.52.) X és Y érmékkel játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban lévő összes érmét, és a fejre esett érméket átadják társuknak. Kezdetben X-nek 3 érméje van, ő kezd, Y-nak 1 érméje van. Mekkora valószínűséggel nyer X? Átlagosan hány dobásból áll egy játék?

a) Az nyer, akinél a játék egy pillanatában az összes pénzérme van.
b) Az nyer, aki nem tud lépni, azaz ő jön és nincs nála érme.

11.14. feladat: Átlagosan hány golyót kell véletlenszerűen betenni 7 urnába ahhoz, hogy egyik urna sem maradjon üresen?

11.15. feladat: Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 2 piros, 2 sárga és 2 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. Ha ez sárga vagy kék, akkor pirosra cseréljük ki; ha piros, akkor kékre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy idő után minden golyó

a) sárga;
b) kék;
c) piros lesz?
d) Átlagosan hány húzásig tartanak a fenti **a)** – **c)** játékok?

11.16. feladat: Az előző játékot annyiban módosítjuk, hogy a játéknak akkor van vége, ha minden golyó

a) piros;
b) kék lesz.

Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

11.17. feladat: Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 2 piros, 2 sárga és 2 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. Ha ez piros vagy kék, akkor ellenkező színűre cseréljük; ha sárga, akkor változtatás nélkül visszatesszük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy idő után minden golyó azonos színű lesz az urnában? Mennyi az ehhez szükséges átlagos húzásszám?

11.18. feladat: Egy urnában 6 golyó van, kezdetben 2 piros, 2 sárga és 2 kék. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. Ha ez piros, akkor kicseréljük sárgára; ha sárga, kicseréljük kékre; ha kék, kicseréljük pirosra. Átlagosan hány lépésig tart egy játék?

11.19. feladat (KöMaL P.257.): Egy absztrakt állat kettes és hármas csoportokban él. Egy erdőben egy kettes és egy hármas csoport él. Naponta egy-egy újabb állat érkezik az erdőbe, és véletlenszerűen kiválasztja az erdő valamelyik lakóját. Ha a kiválasztott állat hármas csoporthoz tartozik, az a csoport szétválik két kettes csoportra, ha pedig kettes csoporthoz tartozik, hármas csoporttá alakulnak. Mi a valószínűsége, hogy az n-ediknek érkező állat kettes csoporthoz csatlakozik?

11.20. feladat: Egy dobozban 1-től n-ig számozott N darab cédula van. N-szer húzunk

a) visszatevéssel;
b) visszatevés nélkül.

Ha az i. húzásnál az i számot húztuk ki, azt mondjuk, hogy véletlen találkozás történt. Átlagosan mennyi a véletlen találkozások száma?

11.21. feladat: N darab számozott dobozba véletlenszerűen berakunk r darab számozott golyót. Átlagosan hány doboz marad üresen?

11.22. feladat: A és B két kockával dobnak. A nyer, ha a dobott számok összege 12, B nyer, ha egymás után két 7-es összeg jön ki. Kinek előnyös a játék?

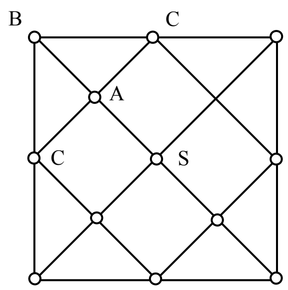
11.23. feladat: Az előző játékot folyamatosan játssza A és B.

a) Mekkora valószínűséggel nyer az n. dobás után A, illetve B?

b) Mekkora A várható nyeresége egymillió lejátszott menet után? (Játékonként 100 Ft a tét.)

11.24. feladat: Egy dobókocka a 6-os lapjával felfelé fekszik. Minden lépésben véletlenszerűen a szomszédos lapjára billentjük a kockát. Átlagosan hány lépésben kerül ismét felülre a 6-os?

11.25. feladat (KöMaL P.64.): Az ábra egy park útvonalait mutatja. Egy sétáló a park közepéről indul úgy, hogy a lehetséges négy út közül egyenlő valószínűséggel választja ki az egyiket. Útelágazáshoz érve ismét egyenlő valószínűséggel választ a négy irány közül, amíg a park szélére nem ér. Mi a valószínűsége annak, hogy a sétáló a park egyik csúcsába jut?



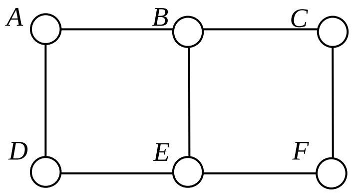
11.26. feladat: Adott csúcsból indulva véletlenszerű bolyongással bejárjuk az n-pontú gráfot. (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.) A gráf mely pontjában végzünk a leggyakrabban? A gráf alakja

a) kör;

b) teljes gráf.

11.27. feladat: Egy m élű gráfban minden csúcs foka d. Adott csúcsból indulva véletlenszerű bolyongást végzünk. (A bolyongás csúcstól-csúcsig történik, az éleket minden csúcsban véletlenszerűen választva.) Igazoljuk, hogy ahhoz, hogy a kiindulási csúcsba visszatérjünk, átlagosan $\frac{2m}{d}$ lépést kell tennünk!

11.28. feladat (Brazil Matematikai Olimpia 2001): Egy patkány kezdetben az ábra szerinti A ketrecben van. A patkányt beidomították: ha csengőszót hall, egy járaton keresztül átmegy valamelyik szomszédos ketrecbe. Amikor tehát a csengő megszólal, a patkány véletlenszerűen, egyforma valószínűséggel kiválaszt egy járatot; a döntését nem befolyásolja az sem, hogy előzőleg merre ment. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 23 csengőszó után a patkány a B ketrecben lesz?



11.29. feladat (Észtország, Matematikai Olimpia, 2002) John egy robotot épít, amely egy szabályos nyolcszög oldalain mozog úgy, hogy pontosan egy perc alatt halad végig egy oldalon. A robot kezdetben a nyolcszög valamely A csúcsában van, a továbbiakban az egyes csúcsoknál vagy eredeti irányban halad tovább, vagy megfordul és az ellenkező irányban folytatja útját. Hányféleképpen érhet a robot $2n$ perc után az A csúccsal szemközti B csúcsba?

11.30. feladat ([7], 16.79.): Megszámoztuk 1-től 4-ig egy négyzet négy csúcsát. Ezeken a csúcsokon két játékos felváltva helyezheti el saját korongjait egy kocka feldobása segítségével. Ha a soron következő játékos az 1, 2, 3 vagy 4 számokat dobja, akkor erre a csúcsra teheti le a saját korongját. Ha ott az ellenfeléé volt, akkor azt kiütheti. 5 vagy 6 dobása esetén kimarad. A játék akkor fejeződik be, ha valamelyik oldal mindkét végpontjában ugyanazon játékos korongjai vannak, ekkor ő nyer. Mekkora a kezdő játékos nyerési esélye?

11.31. feladat ([7], 16.62.): X-nek és Y-nak egyaránt z forintja van. Szabályos kockával játszanak: feldobják egymás után, és ha az eredmény legfeljebb 4, akkor X kap Y-tól 1 forintot; 5 vagy 6 esetén viszont Y kap X-től 2 forintot. A játék addig tart, amíg valamelyikük fizetésképtelenné nem válik (tehát fizetnie kellene, de nincs annyi pénze).

a) Mekkora a valószínűsége, hogy X megy tönkre?
b) Átlagosan hány dobásra van szükség a játék befejezéséhez?

11.32. feladat ([7], 16.80.): X és Y kockázik. Felváltva dobnak fel két kockát, X kezd. Ha X előbb dob hatos összeget, mint Y hetest, akkor X nyer, különben Y.

a) Igazságos-e ez a játék?
b) Mennyi ideig tart átlagosan a játék?

11.33. feladat (OKTV 1983.): A és B játéka a következő. Addig dobnak fel ismételten egy kockát, amíg vagy két 6-os jön ki egymás után (ekkor A nyer), vagy van 10 egymást követő olyan dobás, amelyek között nincs 6-os (ekkor B nyer). Kinek kedvez a játék?

11.34. feladat ([7], 16.72.): Minőségellenőrzés során sorban egymás után több terméket vizsgálnak meg. Ha egy megvizsgált termék jó, akkor +1-et, ha selejtes, akkor –1-et írnak le, és ezeket a számokat mindig összeadják. (Feltesszük, hogy a megvizsgált termékek egymástól függetlenül lehetnek jók vagy selejtesek.) Mindaddig új terméket vizsgálnak meg, amíg a részletösszegek –3 ás +5 között maradnak. Ha a részletösszeg eléri a +5-öt, akkor befejezik a vizsgálatot és átveszik a tételt; ha pedig a részletösszeg eléri a –3-at, akkor visszautasítják a tételt.

a) Mekkora az átvétel valószínűsége, ha a termékek 80%-a jó?
b) Mekkora az átvétel valószínűsége, ha a termékek 40%-a jó?

11.35. (kitűzött) feladat (Zener-paradoxon): Telepátia-kísérlet folyamán egy elkülönített szobában egymás mellé tették az öt Zener-alakzatot (négyzet, kör, háromszög, kereszt és hullám). A másik szobában levő médium pedig megpróbálja kitalálni az alakzatok sorrendjét úgy, hogy ő is tippel egy sorrenddel.

a) A különleges képességekkel nem rendelkező médium átlagosan hány alakzat helyét találja el?

b) Mennyi a találatok átlagos száma, ha nem 5, hanem tetszőleges *n* számú alakzattal végezzük a kísérletet?

c) És akkor mennyi az **a)** esetben a találatok átlagos száma, ha az alakzatok ismétlődhetnek is? (Vagyis egy-egy alakzatot többször is felhasználhatunk a sorozatban.)

Megjegyzések:

1. Meglepő, de mindegyik kérdés eredménye 1.

2. Ezek szerint ha csak nagyszámú kísérlet eredményét látjuk, nem tudjuk eldönteni, hogy ismétléses vagy ismétlés nélküli sorozatokat vizsgáltunk?

11.36. feladat (matek-tábor 2000): Egy moziban N + 1 hely van. N ember (köztük Pista), akiknek helyre szóló jegyük van, a jegyeket figyelmen kívül hagyva véletlenszerűen leült N székre. A késve érkező (N + 1). néző azonban ragaszkodik a jegyén feltüntetett saját helyéhez, ezért – ha helye foglalt – az ott ülőt felállítja. Ezután a most felállított néző is ragaszkodik a saját helyéhez, ha az foglalt, akkor az ott ülőt felállítja, aki ismét a saját helyét akarja elfoglalni stb. Ez a folyamat addig folytatódik, amíg valamelyik felállított néző jegye éppen a szabad helyre nem szól. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a helycserék során Pistának is fel kell állnia?

11.37. feladat (KöMaL Gy. 2328.): Ketten a következő játékot játsszák: Egy 52 lapos francia kártyacsomagot megkevernek, majd az első játékos addig húz belőle egyesével, visszatevés nélkül, amíg ki nem húz egy fekete ászt. Ezután a második játékos húz a csomag megmaradt részéből, amíg ki nem húzza a másik fekete ászt. A játékot az nyeri, akinél több kihúzott kártyalap van. Melyik fél számára előnyös a játék?

11.38. feladat ([7], 16.23.): Három személy közül szeretnénk egyet igazságosan kiválasztani. E célból egy jól megkevert magyar kártyacsomagból mindhárman emelnek egy lapot. Ha a legnagyobb értéket közülük csak egy húzza, akkor őt választjuk ki. Ha mindhárman egyforma értékű lapot húznak, akkor megismételjük az emelést, mindig új keverés után. Ha a legnagyobb értékű lapot ketten húzzák, akkor a harmadik személy kiesik a választásból; a másik kettő addig folytatja, amíg különböző értéket nem húznak, és ekkor az nyer, aki a nagyobbat húzza.

a) Igazságos-e ez a sorsolás?

b) Várhatóan hányszor kell emelniük?

11.39. feladat ([7], 16.23.): Három személy közül szeretnénk egyet igazságosan kiválasztani. E célból egy jól megkevert magyar kártyacsomagból mindhárman emelnek egy lapot. Ha a legnagyobb értéket közülük csak egy húzza, akkor őt választjuk ki. Ha a legnagyobb értékű lapot többen (ketten vagy hárman) húzzák, akkor megismételjük az emelést, mindig új keverés után.

a) Igazságos-e ez a sorsolás?

b) Várhatóan hányszor kell emelniük?

11.40. feladat: Az egyszerű „Ki nevet a végén”-típusú játékban a bábuval a 0. mezőről indulunk, s minden lépésben véletlenszerűen $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-et, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2-t vagy $\frac{1}{6}$ valószínűséggel 3-at lépünk előre. Azt vizsgáljuk, hogy mekkora valószínűséggel lépünk rá a 100-as mezőre. Egy szemléletes okoskodás a következő:

Átlagosan $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3=\frac{5}{3}$ hosszú lépést teszünk, vagyis a mezőknek átlagosan a $\frac{3}{5}$ részére lépünk rá; tehát egy adott mezőre kb. $\frac{3}{5}$ valószínűséggel.

a) Írjunk egy szimulációs programot, amellyel elvégezhetjük a játék nagyszámú futtatását, s állapítsuk meg, hogy mennyire pontos a szemléletes okoskodás!
b) Próbáljunk elméleti úton is (a számítógép alkalmazása nélkül) becslést adni a keresett valószínűség értékére!
c) Állapítsuk meg a keresett valószínűséget akkor, ha a lépési valószínűségeket felcseréljük: $\frac{1}{6}$ valószínűséggel 1-et, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2-t vagy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 3-at lépünk előre.

11.41. feladat (KöMaL F. 2494.): Van 100 külsőre egyforma golyóm, közülük az egyik radioaktív, de nem tudom, melyik az. Egy ismerősöm kizárólag nem radioaktív golyókat venne tőlem, darabját 1 forintért. Egy másik ismerősömnek viszont van egy műszere, amivel akárhány golyóról el tudja dönteni, van-e köztük radioaktív. Egy mérésért 1 forintot kér, de a műszere olyan, hogy ha a mérendő golyók között van radioaktív, mérés közben az össze radioaktívvá válik. Mekkora az a legnagyobb nyereség, amit mindenképpen el tudok érni?

11.42. feladat: Adjuk meg $N + 1$ elem egy permutációját. A permutáció ciklikus írásmódját tekintve mi valószínűbb: az, hogy két előre kijelölt elem azonos ciklusba kerül, vagy az, hogy nem?

11.43. feladat (a pötyögő majom problémája): Egy Chumpi nevű csimpánz leül a számítógép elé, és elkezdi lelkesen püfölni a billentyűzetet. A billentyűzet az angol ábécé 26 nagybetűjét tartalmazza; Chumpi pedig teljesen rendszertelenül (véletlenszerűen) üti le egymás után a betűket.

a) Igazoljuk, hogy ha Chumpi elég kitartó, akkor előbb-utóbb leírja a nevét!

b) Ehhez átlagosan hány leütésre van szüksége? (Először becsüljük meg, hogy ha egy leütés átlagosan 1 másodpercig tart, akkor várhatóan mennyi idő alatt írja le Chumpi a nevét!)

c) Chumpi stratégiát változtat. Most is véletlenszerű a betűválasztása, de arra ügyel, hogy az éppen leütött karaktert nem ismétli (bár két lépés múlva persze már megint leütheti). Ezzel a módosítással átlagosan hány leütésre van szüksége, amíg a nevét véletlenszerűen kiírja? (Több vagy kevesebb leütés kell, mint a b) esetben?)

11.44. feladat (Pósa Lajos): Egy forgó páncélajtón négy darab kétállapotú nyomógomb van, melyek állapota kívülről nem látszik. Az ajtó akkor nyitható, ha a négy gomb állapota egyforma. (Ha az állapotokat 0-val és 1-gyel jelöljük, a nyithatóság feltétele tehát a 0000 vagy 1111 állapot.) Az ajtó kinyitásához a megengedett művelet egy vagy két gomb állapotának egyidejű megváltoztatása. Minden egyes próbálkozás után ha az ajtó nem nyitható, akkor elfordul, s véletlenszerűen áll meg (vagyis nem tudjuk, hogy az utolsó lépésben melyik gomb vagy gombok állapotát változtattuk meg).

a) Van-e olyan műveletsorozat, amely végrehajtásakor a páncélajtó biztosan kinyitható?

Megjegyzés: Első pillantásra nehezen hihető, de ilyen *biztosan nyitó* algoritmus létezik.

b) Átlagosan hány műveletet végzünk az ajtó nyitásáig, ha a *biztosan nyitó* algoritmust alkalmazzuk?
c) Igazoljuk, hogy ha véletlenszerűen próbálkozunk, az ajtó akkor is előbb-utóbb kinyílik!
d) Átlagosan hány műveletet végzünk az ajtó nyitásáig, ha véletlenszerűen próbálkozunk?

11.45. feladat (Kürschák-verseny, 2005): A és B teniszeznek. Az a játékos győz, aki elsőként nyer meg legalább négy labdamenetet úgy, hogy ellenfelénél legalább kettővel több labdamenetet nyert. Tudjuk, hogy az A játékos minden labdamenetet, a korábbiaktól függetlenül, $p \leq 0{,}5$ valószínűséggel nyer meg. Bizonyítsuk be, hogy az A játékos győzelmének valószínűsége legfeljebb $2p^2$.

11.46. feladat (Huygens feladata: osztozkodás-paradoxon véges esetben, három fővel): Már 1380-as és 1494-es kéziratokban is találkozunk az osztozkodás-paradoxonnal, de a korabeli megoldók még azt sem vették észre, hogy a feladat egyáltalán valószínűségszámítási jellegű. 1654-ben Pascal és Fermat egymástól függetlenül megoldotta a problémát, s ez akkoriban olyan komoly felfedezésnek számított, hogy sokan ma is ettől az időponttól számítják a valószínűségszámítás megszületését. 1657-ben pedig Huygens, a holland természettudós három játékos esetére is általánosította a problémát.

Végezzük el mi is a **10.3. feladat (**osztozkodás-paradoxon) általánosítását három játékos esetén!

A legegyszerűbb esetre egy konkrét példa: Három játékos egy szabályos dobókockával játszik. András akkor győz, ha – nem szükségképpen egymás után – öt darab 1-es vagy 2-es jön ki. Béla akkor nyer, ha öt 3-as vagy 4-es, míg Csaba akkor, ha öt 5-ös vagy 6-os dobás született. A játszma 2, 3, 6, 1, 1, 4 állásnál, hat dobás után véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok a 6000 Ft-os téten?