Tömegközéppont és nyomatékok a geometriában[1]

Hraskó András

ALAPELVEK

A fizikában gyakran érdemes helyettesíteni egy tömegpontrendszert a tömegpontok tömegközéppontjába helyezett egyetlen, a tagok tömegének összegével megegyező tömeggel. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni az alábbi alapelveket:

I. alapelv A tömegközéppont megkaphatjuk úgy is, hogy a tömegpontrendszert részekre osztjuk, kiszámoljuk a részek tömegközéppontját és helyettesítő tömegét, majd meghatározzuk az így kapott rendszer tömegközéppontját. Bármely részekre osztásnál végül ugyanahhoz a tömegközépponthoz jutunk.

II. alapelv Ha a C pontban γ kg, a B pontban β kg tömeg van, akkor tömegközéppontjuk a CB szakasznak az az A_1 pontja, amelyre $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$ (másképp: az γCA_1, βBA_1 forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást).

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a pontrendszer tömegközéppontja nem változik, ha benne minden egyes súly nagyságát megszorozzuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Megfogalmazhatjuk az I., II. alapelvek egy olyan következményét, amelyet később széleskörűen alkalmazunk: *ha a rendszert két részre osztjuk, az egyik tömegközéppontja S_1, a másiké S_2, míg a teljes rendszer tömegközéppontja S, akkor S_1, S és S_2 egy egyenesen vannak.*

A II. alapelv vektorgeometriai analogonja az osztópont helyvektorára vonatkozó nevezetes tétel:

Osztópont helyvektora Ha a C pont helyvektora $\overrightarrow{C}$, a B ponté $\overrightarrow{B}$ és A_1 a BC egyenesen úgy helyezkedik el, hogy $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$, akkor A helyvektora:

$$\overrightarrow{A_1} = \frac{\beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}}{\beta + \gamma}.$$

Itt tehát az $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ vektorok „súlyozásával” kapjuk az $\overrightarrow{A_1}$ vektort. Fontos, hogy itt az CA_1/A_1B arányt és vele együtt β/γ arányt is előjelesen értelmezzük, tehát CA_1/A_1B pozitív ha C-től A_1 ugyanabban az irányban van, mint A_1-től B – azaz A_1 a BC *szakaszon* van –, míg arány negatív ez a két irány különböző.

Az I. alapelv az alábbi vektoralgebrai azonossággal analóg:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I}\beta_i} + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)\cdot\frac{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j}}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)},$$

ahol tehát $\overrightarrow{S}$ a bal oldalon feltüntetett vektor, míg

$$\overrightarrow{S}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I}\beta_i} \qquad \overrightarrow{S}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j}.$$

Negatív tömeget nem szokás értelmezni, de a vektorok együtthatói nyugodtan lehetnek negatív számok. Mivel az I., II. alapelvek vektorokkal is értelmezhetők így a későbbiekban negatív tömegekkel is számolni fogunk.

Ekkor előfordulhat az is, hogy néhány tömeg összege zérus. Ha például fent $\beta + \gamma = 0$, akkor nem létezik olyan A_1 pont a BC egyenesen, amelyre $CA_1/A_1B = \beta/\gamma = -1$, de a CA_1/A_1B arány határértéke épp (-1), ha A_1 tart a végtelenbe az egyenesen bármelyik irányban. A vektoros megközelítésben is hasonlót látunk: a $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$ vektor párhuzamos a BC egyenessel, tehát annak „végtelen távoli pontja” felé mutat.

III. alapelv A tömegpontrendszernek a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka zérus.

IV. alapelv A tömegpontrendszernek a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_t = m_1d_1^2 + m_2d_2^2 + \ldots + m_nd_n^2, \tag{1}$$

ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik tömegpont tömegét, d_i pedig a tengelytől való távolságát jelöli.

V. alapelv *Steiner tétel*

Ha a t tengely átmegy a tömegpontrendszer súlypontján, az u tengely pedig párhuzamos t-vel és tőle d távolságban van, akkor

$$\Theta_u = \Theta_t + md^2,$$

ahol $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a pontrendszer teljes tömegét jelöli.

Síkbeli pontrendszer esetén beszélhetünk a pontrendszernek egy adott pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékáról. Ezen a nyomatékon az adott pontban az adott síkra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot értjük.

[1] Az ELTE 2011 november 23-ai „Tanárklub”-ján elmondott előadás kibővített változata

VI. alapelv A síkbeli pontrendszernek a súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka így is számítható:

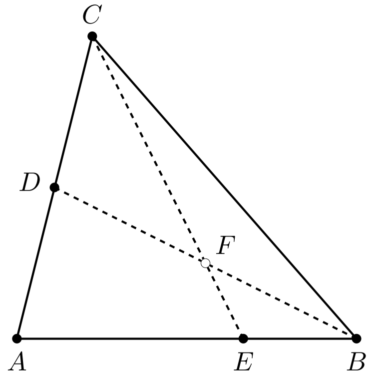
$$\Theta_S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j r_{ij}^2,$$

ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik pont tömegét, m az össztömeget, r_{ij} az i-edik és j-edik tömegpont távolságát jelöli.

Megjegyezzük, hogy a síkbeli pontrendszer pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az átlagos négyzetes eltéréshez rendkívül hasonló mennyiség. a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a szórásnégyzettel rokon mennyiség. A fenti V., VI. alapelvek bizonyítása analóg a statisztika hasonló összefüggéseinek bizonyításával.

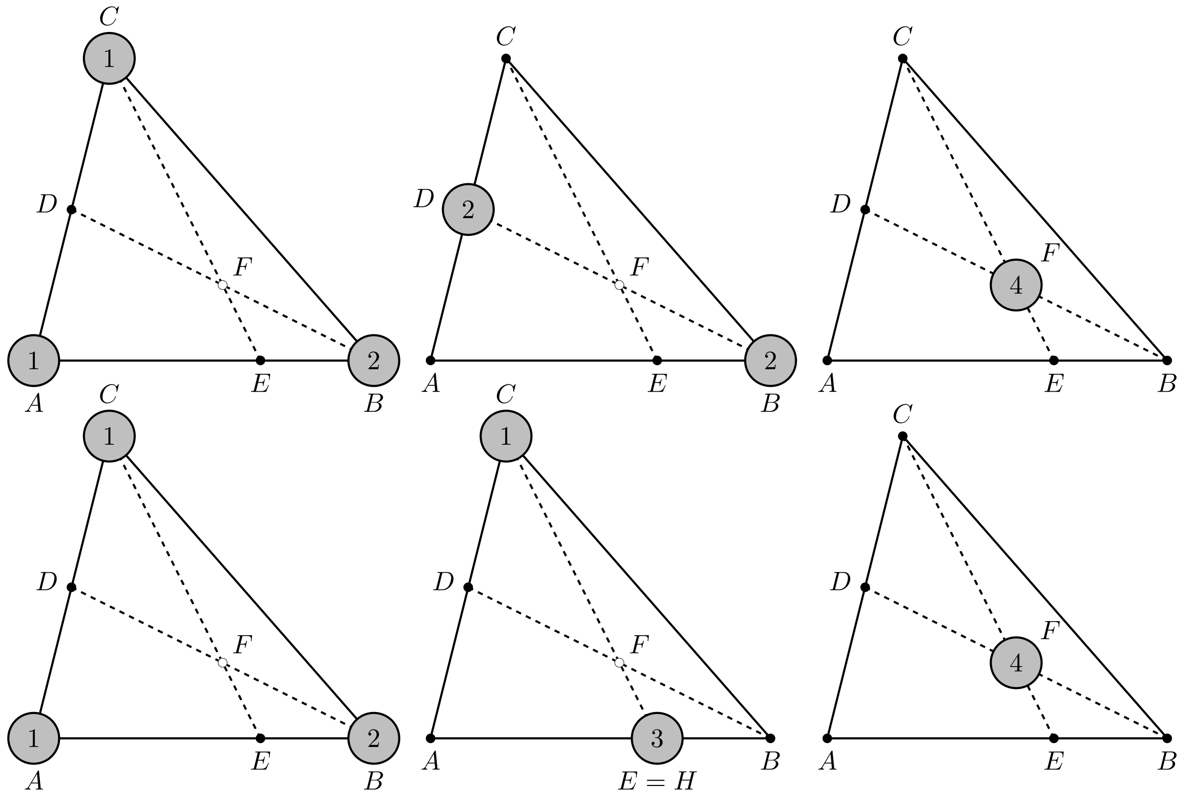
FELADATOK

1. feladat Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?



Megoldás

Tekintsük az $(A^1; C^1; B^2)$ tömegpontrendszert! Mivel $(A^1; C^1) \equiv D^2$ és $(D^2; B^2) \equiv F^4$, így vizsgált rendszerünk tömegközéppontja F. Másrészt $(A^1; B^2) \equiv H^3$, ahol H az AB oldal B-felőli harmadolópontja. Így $(H^3; C^1) = F^4$, azaz F illeszkedik a CH egyenesre, azaz H is a CF egyenesre, tehát $H = E$. A kérdezett arány: $AE/EB = 2/1$.



2. feladat *Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 2007*

Az ABC háromszög belsejében felveszünk egy P pontot, majd összekötjük a három csúccsal. Az AP egyenes messe a szemközti (BC) oldalt az A_1 pontban. Hasonlóan legyenek B_1, C_1 a BM, CM egyenesek és a megfelelő csúcsokkal szemközti oldalak metszéspontjai. Tudjuk, hogy P felezi az AA_1 szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = 1!$$

Megoldás

Azt szeretnénk elérni, hogy az a háromszög csúcsaiba helyezett tömegekből álló rendszer tömegközéppontja a P pont legyen. Legyen $BA_1/A_1C = \gamma/\beta$. Ha a B pontba β, a C pontba γ kg tömeget teszünk, akkor ezt a rendszert az A_1 pontba helyezett $(\beta+\gamma)$ tömegű tömegpont helyettesítheti. Rakjunk az A pontba egy $(\beta+\gamma)$ kg-os tömeget! Így a három tömegpontból – $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ – álló rendszer tömegközéppontja P lesz.

Alkalmazzuk az I. alapelvet, számoljuk ki másképp a tömegközéppontot! A két pontból álló $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$ rendszer tömegközéppontja az AB oldalnak az a C' pontja, amelyre $AC'/C'B = \beta/(\beta+\gamma)$. Mivel a teljes rendszer P tömegközéppontja a 2. alapelv szerint a $C'C$ szakaszon kell legyen, így a C' pont megegyezik a C_1 ponttal. Hasonló összefüggésre juthatunk az AC oldalon is. Így tehát:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \qquad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = 1.$$

3. feladat

Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja F, a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja E, az EF egyenes az AC átlót a P, a BD átló meghosszabbítását a Q pontban metszi. Határozzuk meg az

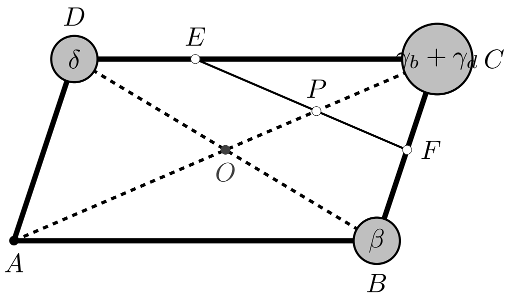
$$EP/PF, \qquad AP/PC, \qquad EQ/QF, \qquad DQ/QB$$

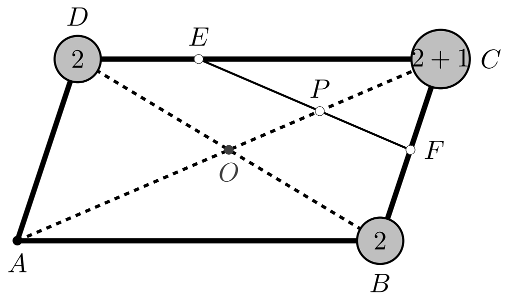
arányok értékét!

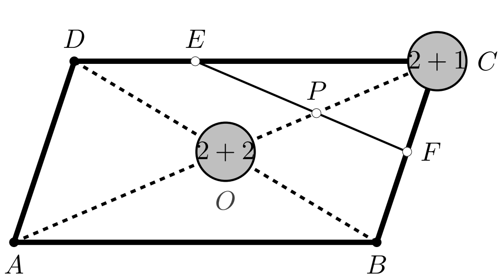
Megoldás

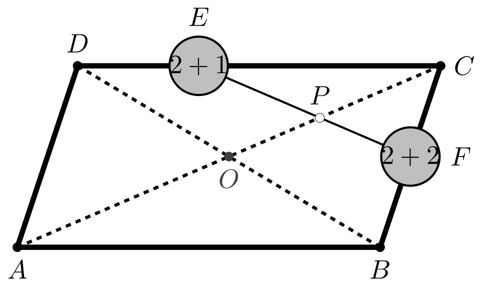
Először a P ponttal foglalkozunk, súlyokat helyezünk a B, C, D pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja a P pontban legyen. Jelölje ezeket a tömegeket rendre β, γ és δ! A B, D csúcsokba egyenlő tömegeket helyezünk ($\beta = \delta$), hogy tömegközéppontjuk a paralelogramma O középpontjában legyen és így a teljes rendszer tömegközéppontja az OC átlóra essen. A C csúcsba helyezett tömeg két részből áll: $\gamma = \gamma_b + \gamma_d$. Az egyik rész (γ_b)egyenlő a B-be helyezett súllyal (β), így ezek tömegközéppntja F lesz, a másik rész (γ_d) fele akkora súlyú, mint a D-be helyezett tömeg (δ), hogy tömegközéppontjuk E legyen. A kívánt $\beta = \delta = \gamma_b = 2\gamma_d$ feltételnek tehát megfelel a (B^2, C^3, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^2, C^3, D^2) \equiv P^7.$$





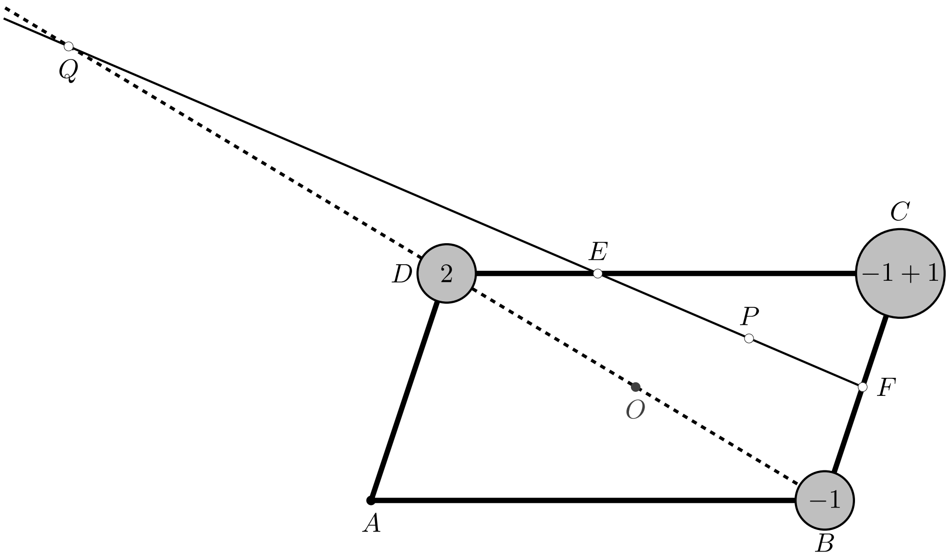


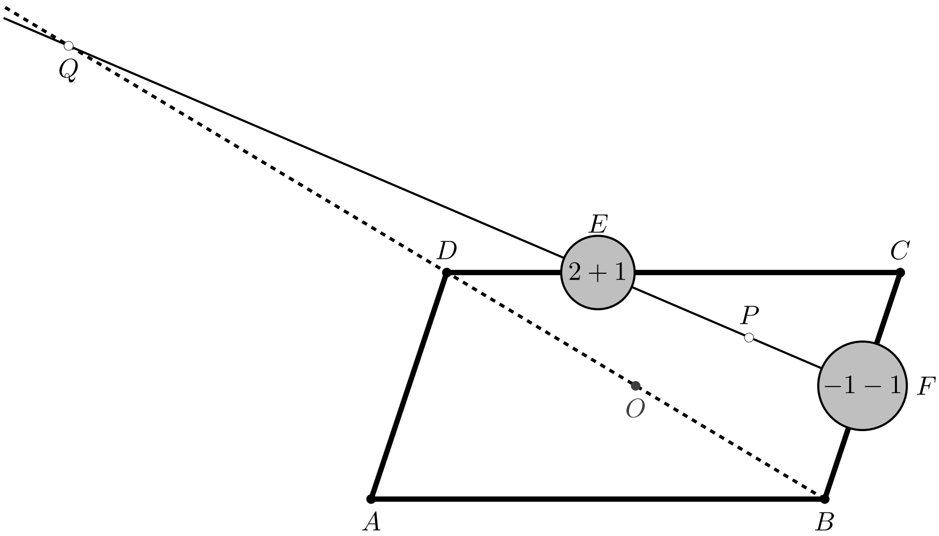


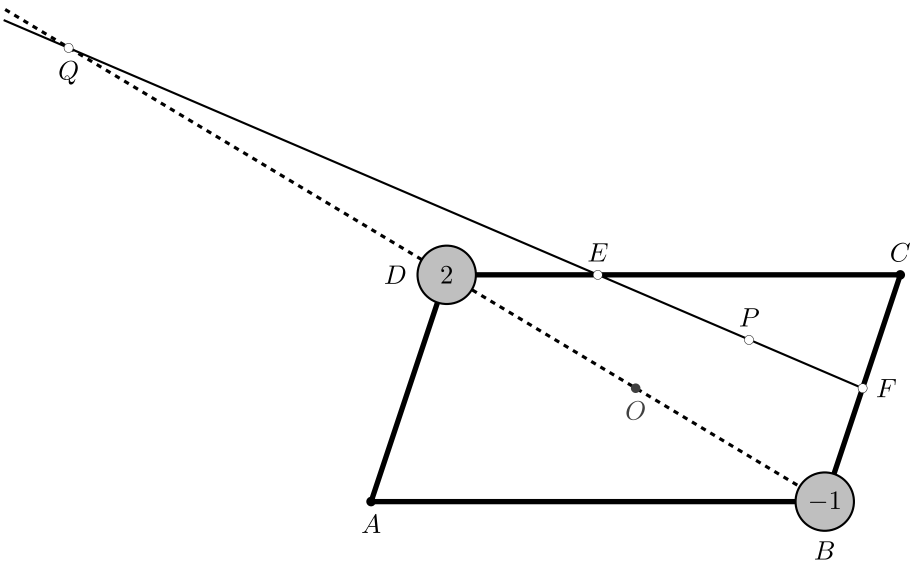
Mivel $(B^2, C^2) \equiv F^4$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $EP/PF = \frac{4}{3}$. Másrészt $(B^2, D^2) \equiv O^4 \equiv (A^2, C^2)$, így $P^7 \equiv (B^2, C^3, D^2) \equiv (A^2, C^5)$, azaz $AP/PC = 5/2$.

Most vizsgáljuk Q-t! Szeretnénk, hogy Q legyen a $(B^\beta, C^{\gamma_b+\gamma_d}, D^\delta)$ rendszer tömegközéppontja. Szeretnénk, hogy a tömegközéppont az EF egyenesen legyen, azaz $(B^\beta, C^{\gamma_b}) \equiv F^{\beta+\gamma_b}$ $(D^\delta, C^{\gamma_d}) \equiv E^{\delta+\gamma_d})$, tehát az ezekkel analóg $\beta = \gamma_b$, $\delta = 2\gamma_d$ feltételeket továbbra is meg akarjuk tartani. Most még azt szeretnénk, hogy a tömegközéppont az BD átlóra is illeszkedjék, azaz C-ben összesen nulla súly legyen $(\gamma_b = -\gamma_d)$. Megfelelő lesz a (B^{-1}, C^0, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^{-1}, C^0, D^2) \equiv Q^1.$$







Mivel $(B^{-1}, C^{-1}) \equiv F^{-2}$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $(F^{-2}, E^3) \equiv Q^1$, tehát $EQ/QF = -\frac{2}{3}$, ahol az előjel azt fejezi ki, hogy az $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{PF}$ vektorok ellenkező irányításúak. Másrészt $(B^{-1}, D^2) \equiv Q^1$, így $DQ/QB = -\frac{1}{2}$ az előzőhöz hasonló értelmű előjellel.

4. feladat Adott az ABC háromszög és a P pont. Az AP, BC egyenesek metszéspontja A_1 és ehhez hasonlóan $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$. Ismeretes, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Határozzuk meg a $\frac{BC_1}{C_1A}$ arányt!

Megoldás

Feltehetjük, hogy $AB_1 = b_1$,$B_1C = b_2$, $CA_1 = a_1$, $A_1B = a_2$ és legyen $BC_1 = c_1$, $C_1A = c_2$. Szeretnénk súlyokat helyezni a háromszög csúcsaiba úgy, hogy az $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$ rednszer tömegközéppontja P legyen. Ha az A-ba és C-be helyezett súlyokat úgy választjuk meg, hogy arányuk

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{b_2}{b_1} \tag{2}$$

legyen, akkor tömegközéppontjuk B_1 lesz, így a teljes rendszer tömegközéppontja a BB_1 egyenesen lesz. Ha még azt is elérjük, hogy a C-be és A-ba kerülő tömegek aránya

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_2}{a_1} \tag{3}$$

legyen, akkor e kettő tömegközéppontja A_1-ben lesz, így a teljes rendszeré az AA_1 egyenesen, az előzőeket is figyelembe véve tehát P-ben.

A (2), (3) arányoknak egyszerre felelnek meg az

$$\alpha = b_2a_2, \qquad \beta = b_1a_1, \qquad \gamma = b_1a_2 \tag{4}$$

súlyok.

Kezdjük most a tömegközéppont szerkesztését az A, B csúcsokba helyezett tömegekkel. Ezek tömegközéppontja az AB egyenes azon C_0 pontjában lesz, amelyre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c_2}{c_1}, \tag{5}$$

azaz

$$\frac{b_1a_1}{b_2a_2} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{6}$$

A teljes rendszer tömegközéppontja, azaz P a CC_0 egyenesre illeszkedik, ami csak úgy lehetséges, hogy $C_0 = C_1$, azaz a keresett aráyn értéke

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_2a_2}{b_1a_1}. \tag{7}$$

A (6), (7) összefüggések az $a_1b_1c_1 = a_2b_2b_2$ alakba írhatók át. A feladat megoldása során lényegében bizonyítottuk az alábbi nevezetes összefüggést:

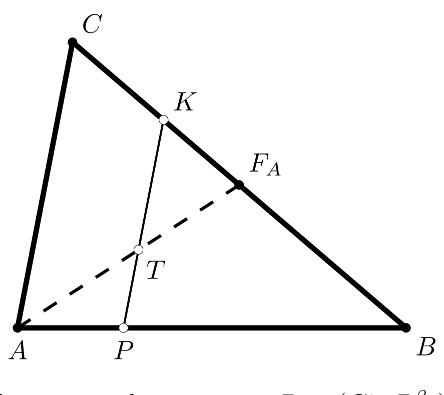
Ceva tétel Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesének tetszőleges pontjai, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek akkor és csakis akkor mennek át egy ponton, ha

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

5. feladat Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AF_A súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$!

Megoldás

Helyezzünk az A, B, C csúcsokba α, $\beta = \beta_a + \beta_c$, γ tömegeket úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja T-ben legyen!



Ha elérjük, hogy az (A^α, B^{β_a}) alrendszer tömegközéppontja P, a (C^γ, B^{β_c}) alrendszer tömegközéppontja pedig K legyen, akkor a teljes rendszer tömegközéppontja a PK egyenesre kerül. Mivel $PK \| AC$, így valamely x valós számra

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BK}{KC} = x, \tag{8}$$

azaz $\alpha = x\beta_a$, $\gamma = x\beta_c$. Szükséges még, hogy a tömegközéppont az A-ból induló súlyvonalra kerüljön, aminek $\gamma = \beta$, azaz $\beta_a + \beta_c = x\beta_c$, röviden

$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = x - 1 \tag{9}$$

az algebrai feltétele. Így

$$(A^\alpha, B^{\beta_a}, C^\gamma) \equiv (P^{\beta_a(1+x)}, K^{\beta_c(1+x)}),$$

tehát a $\frac{KT}{TP} = \frac{5}{3}$ feltétel megfelelője a

$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = \frac{5}{3} \tag{10}$$

reláció. A (9) összefüggést figyelembe véve kapjuk, hogy $x = \frac{8}{3}$, azaz az ACB, PKB háromszögek hasonlóságából (8) alapján

$$AC = \frac{AB}{PB}KP = KP\frac{AP+PB}{PB} = KP \cdot \left(1 + \frac{AP+PB}{PB}\right) = KP\left(1+\frac{1}{x}\right) = 8\left(1+\frac{3}{8}\right) = 11.$$

A teljes megoldáshoz szükséges annak igazolása, hogy a megadott konfiguráció létezik. Ha $AC = 11$ és B tetszőleges, az AC egyenesre nem illeszkedő pont a síkon, és P az AB, K a CB oldalt osztja fel $3:8$ arányban, akkor a PK szakasz hossza 8 és a fenti súlyozás mutatja, hogy az AF_A súlyvonal $3:5$ arányban, tehát 3 és 5 egység hosszúságú részekre osztja fel.

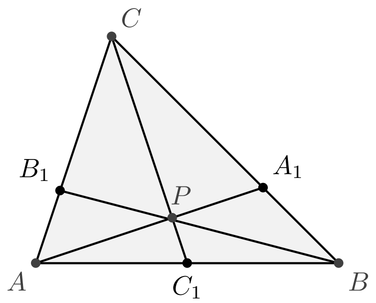
6. feladat (*Kömal*)
Adott az ABC háromszög. A háromszög belsejébe elhelyezkedő tetszőleges P pont esetén képezhetjük az

$$AP \cap BC = A_1, \qquad BP \cap CA = B_1, \qquad CP \cap BA = C_1$$

pontokat. Mely P pontra lesz az

$$\frac{A_1P}{A_1A} + \frac{B_1P}{B_1B} + \frac{C_1P}{C_1C}$$

összeg értéke maximális?



Megoldás
Ha P az $\left(A^\alpha; B^\beta; C^\gamma\right)$ súlyozott pontrendszer tömegközéppontja, akkor $\left(A^\alpha; B^\beta\right) \equiv C_1^{\alpha+\beta}$, így $\frac{A_1P}{AP} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, így

$$\frac{A_1P}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{B_1P}{BB_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \frac{C_1P}{CC_1} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

amiből azonnal következik, hogy a vizsgált arány értéke konstans, mindig 1.

7. feladat Mutassuk meg, hogy a súlyozás területekkel is megadható! Nevezetesen, ha $A^\alpha B^\beta C^\gamma = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$\alpha : \beta : \gamma = T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB}.$$

(Ahogy a súlyok is kaphatnak különböző előjelet, úgy a háromszögek területe is a háromszög körüljárásának megfelelő előjellel értendő.)

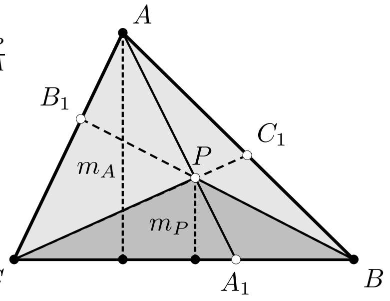
Megoldás
Ha $AP \cap BC = A_1$, akkor

$$\frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} = \frac{A_1P}{A_1A} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

így

$$T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB} = \frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} : \frac{T_{CPA}}{T_{CBA}} : \frac{T_{APB}}{T_{ACB}} = \alpha : \beta : \gamma.$$

$$\frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} = \frac{m_P}{m_A} = \frac{A_1P}{A_1A}$$



Megjegyezzük, hogy az A_1 pont mindig létrejön, ha $\beta+\gamma \neq 0$, ellenben ha $\beta+\gamma \neq 0$, akkor nem jöhet létre, AP párhuzamos a BC egyenessel. Ha pedig $\alpha+\beta+\gamma = 0$ – és csak ekkor – a P pont nem lesz valódi pont, az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek ilyenkor párhuzamosak.

8. feladat A háromszög AB, BC, CA oldalain úgy helyezkednek el a C_1, A_1, B_1 pontok, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös P ponton mennek át. Adott az AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 háromszögek területe: T_A, T_B, T_C. Határozzuk meg az $A_1B_1C_1$ háromszög t területét!

Megoldás

Ha P, az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ tömegpontrendszer súlypontja és T az ABC háromszög területe, akkor a 7. feladat eredménye szerint az APB, BPC, CPA háromszögek területe rendre

$$\gamma\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \alpha\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \beta\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Vizsgáljuk az A_1PB_1, B_1PC_1, C_1PA_1 háromszögek t_C, t_A, t_B területét is!

$$\frac{t_C}{T_{APB}} = \frac{PA_1 \cdot PB_1}{PA \cdot PB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)},$$

tehát

$$t_C = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

és ehhez hasonlóan

$$t_B = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$t_A = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Vegyük észre, hogy $t = t_a + t_b + t_c$, azaz közös nevezőre hozás és egyszerűsítés után

$$t = 2T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\gamma+\beta)(\beta+\alpha)}. \tag{11}$$

Másrészt

$$\frac{T_C}{T} = \frac{CB_1 \cdot CA_1}{CA \cdot CB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)},$$

és ehhez hasonlóan adódik $\frac{T_B}{T}$ valamint $\frac{T_A}{T}$, tehát

$$T_AT_BT_C = T^3\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\right)^2. \tag{12}$$

A (11), (12) egyenletek összevetéséből

$$t^2T = 4T_AT_BT_C. \tag{13}$$

Mivel $T = t + T_A + T_B + T_C$, így (13)-ből

$$t^2(t + T_A + T_B + T_C) = 4T_AT_BT_C,$$

azaz

$$t^3 + t^2(T_A + T_B + T_C) - 4T_AT_BT_C = 0. \tag{14}$$

Ha például T_A, T_B, T_C pozitív mennyiségek, akkor (14) gyökeinek szorzata – a $4T_AT_BT_C$ mennyiség – pozitív, így a gyökök közül egy vagy három pozitív. Másrészt a gyökök kéttényezős szorzatainak összege (14)-ben zérus, tehát nem lehet három pozitív gyök. Ezek szerint (14) egyetlen pozitív gyöke megadja az egyetlen lehetséges eredményt t-re.

9. feladat Adott egy háromszög és egy egyenes. Hogyan súlyozzuk a háromszög csúcsait, hogy tömegközéppontjuk az egyenesre essen?

Megoldás

Egy súlyozáshoz tartozó tömegközéppont pontosan akkor esik az adott egyenesre, ha a súlyozott pontrendszernek az adott egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka zérus. Ennek számbavételéhez jelöljük ki az egyenes egyik normálvektorát (elég egy az egyenesre merőleges irányítás rögzítése is) és jelölje d_A, d_B és d_C a háromszög egyes csúcsainak az adott egyenestől mért irányított távolságait! Az $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozás akkor és csakis akkor megfelelő, ha

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0. \tag{15}$$

Megjegyzés

Fordítsuk meg a kérdést! Adott az ABC háromszög és legyenek d_A, d_B, d_C tetszőleges valós számok, amelyek között van zérustól különböző. Igaz-e, hogy a (15) összefüggést kielégítő $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozásokhoz tartozó tömegközéppontok egy egyenesen vannak?

A válasz igenlő, itt nem indokoljuk. Azonban abban a speciális esetben, amikor $d_A = d_B = d_C$, akkor mégsem valódi egyenest, hanem a sík „idális egyenesét” kapjuk. Ez a pontok tekintetében éppen az $\alpha + \beta + \gamma = 0$ esetnek felel meg, ekkor ugyanis az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ rendszer súlypontja nem valódi pont, hanem az egymással párhuzamos AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek közös ideális pontja.

10. feladat *Menelaosz tétel*

Az ABC háromszög AB, BC, CA oildalegyenesein adott egy-egy pont: C_1, A_1 és B_1. Fejezzük ki az

$$AB_1, \qquad B_1C, \qquad CA_1, \qquad A_1B, \qquad BC_1, \qquad C_1A,$$

hosszakkal annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre esnek.

Megoldás

Feltesszük, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egymástól különbözők és rendre az

$$(A^0, B^{\alpha_1}, C^{\alpha_2}), \qquad (A^{\beta_2}, B^0, C^{\beta_1}), \qquad (A^{\gamma_1}, B^{\gamma_2}, C^0)$$

súlyozáshoz tartozó tömegközéppontok.

Vizsgáljuk azt az esetet, hogy a pontok egy egyenesen vannak, melynek egyenlete:

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0, \tag{16}$$

tehát

$$\begin{array}{ccccccccc}
d_A \cdot 0 & + & d_B \cdot \alpha_1 & + & d_C \cdot \alpha_2 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{d_B}{d_C}; \\
d_A \cdot \beta_2 & + & d_B \cdot 0 & + & d_C \cdot \beta_1 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{d_C}{d_A}; \\
d_A \cdot \gamma_1 & + & d_B \cdot \gamma_2 & + & d_C \cdot 0 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{d_A}{d_B}.
\end{array}$$

Mivel

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{AB_1}{B_1C}, \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{CA_1}{A_1B}, \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{BC_1}{C_1A},$$

így a fenti három jobb oldali összefüggés szorzata:

$$\left(-\frac{d_C}{d_A}\right) \cdot \left(-\frac{d_B}{d_C}\right) \cdot \left(-\frac{d_A}{d_B}\right) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

azaz

$$-1 = \frac{AB_1}{B_1C} \frac{CA_1}{A_1B} \frac{BC_1}{C_1A}. \tag{17}$$

A (17) feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre essenek. Az Olvasóra hagyjuk annak igazolását, hogy elégséges is.

11. feladat Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alapja az $ABCD$ négyzet. Egy sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi el a gúla EA, EB, EC, ED oldaléleit. Határozzuk meg az ED_1/D_1D arányt, ha

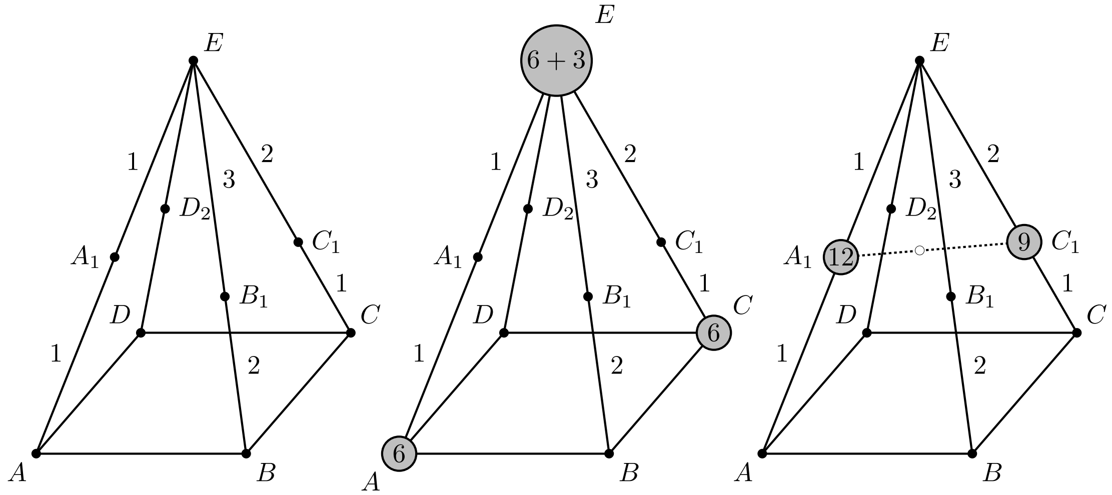
$$\frac{EA_1}{A_1A} = 1, \qquad \frac{EB_1}{B_1B} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{EC_1}{C_1C} = \frac{2}{1}.$$

Megoldás Tekintsük az $(A^6; C^6; E^9)$ tömegpontrendszert! Mivel

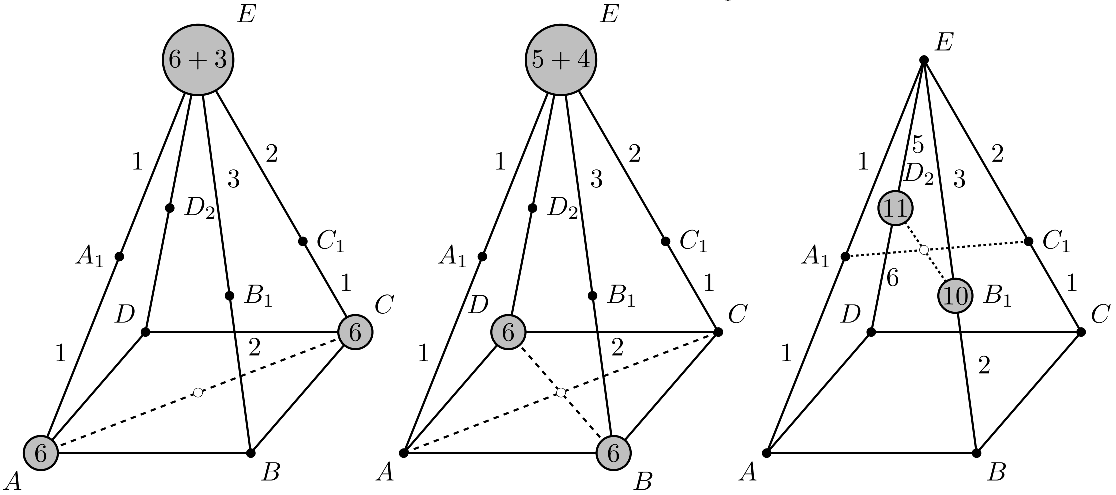
$$(A^6; E^6) \equiv A_1^{12} \quad \text{és} \quad (C^6; E^3) \equiv C_1^9,$$

így $(A^6; C^6, E^9)$ tömegközéppontja az A_1C_1 szakaszon van. Másrészt

$$(A^6; C^6) \equiv (B^6; D^6), \quad \text{így} \quad (A^6; C^6, E^9) \equiv (B^6; D^6; E^9).$$



A $(B^6; D^6, E^9)$ pontrendszert szétbontjuk a $(B^6; E^4)$, $(D^6; E^5)$ tömegpontrendszerekre. Tudjuk, hogy $(B^6; E^4) \equiv B_1^{10}$. Tekintsük azt a D_2 pontot, amelyre $(D^6; E^5) \equiv D_2^{11}$. Az eredeti tömegpontrendszer súlypontja a B_1D_2 szakaszra is illeszkedik, tehát a B_1D_2, A_1C_1 szakaszok metszők, azaz D_2 az $A_1B_1C_1$ pontokon átmenő síknak és az ED egyenesnek is pontja, tehát $D_2 = D_1$. A D_2 pont definíciója szerint $\frac{ED_1}{D_1D} = \frac{6}{5}$.

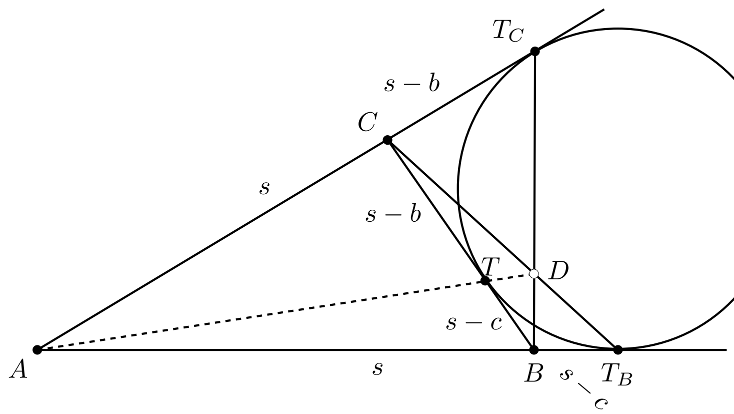


12. feladat (*M. B. Balk, V. G. Boltyánszkij: Geometria massz, Bibliotyecska Kvant, 61. kötet*)
Jelölje az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt körnek az AB oldal meghosszabbítására, a BC oldalra illetve az AC oldal meghosszabbítására eső érintési pontját rendre T_B, T és T_C. Mutassuk meg, hogy a BT_C, CT_B egyenesek D metszéspontja illeszkedik az AT egyenesre!

I. megoldás
Felhasználjuk az alábbi összefüggéseket:

$$AT_B = AT_C = s, \qquad BT_B = BT = s - c, \qquad CT_C = CT = s - b,$$

ahol s a háromszög félkerületét jelöli.



Helyezzünk rendre

$$-(s-b)(s-c), \qquad s(s-b), \qquad s(s-c)$$

előjeles súlyokat az A, B, C pontokba! Az így kapott súlyozott pontrendszer D tömegközéppontja az AT egyenesen van, hiszen

$$\left(B^{s(s-b)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T^{as}.$$

Másrészt

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; B^{s(s-b)}\right) \equiv T_B^{c(s-b)},$$

azaz D illeszkedik a CT_B egyenesre és

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T_C^{b(s-c)}$$

miatt a BT_C egyenesre is. Az AT, CT_B, BT_C egyenesek tehát egy pontban metszik egymást, épp ezt kellett igazolnunk.

II. megoldás

Azt kell igazolni, hogy az AT, BT_C, CT_B egyenesek egy ponton mennek át. A Ceva-tétel pont erről a szituációról szól, csak kissé szokatlan, hogy a P pont a háromszögön kívül helyezkedik el. Mivel

$$\frac{AT_B}{T_BB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CT_C}{T_CA} = \frac{s}{-(s-c)} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-b}{-s} = 1,$$

így a Ceva-tétel szerint valóban egy ponton megy át az említett három egyenes.

III. megoldás

Egy körről és érintőiről szól a feladat. Alkalmazzuk az alábbi nevezetes tételt!

Brianchon tétel *Ha egy hatszögbe kúpszelet írható, akkor a hatszög szemköztes csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át.*

Mostani hatszögünk kissé elfajult. Oldalegyenesei:

$$AC, \quad AC, \quad CB, \quad CB, \quad BA, \quad BA.$$

Ha egy érintő hatszög két szomszédos oldala egybeesik, akkor metszéspontjuknak azaz közös csúcsuknak az érintési pont tekintendő, ugyanis ha kissé elmozdítjuk az egyik érítőt, hogy egy közeli pontban érintsen, akkor a létrejövő metszéspont az érintési pontok közelében lesz. Így a csúcsok:

$$AC \cap AC = T_C, \quad AC \cap CB = C, \quad CB \cap CB = T, \quad CB \cap AB = B, \quad AB \cap AB = T_B, \quad AB \cap AC = A,$$

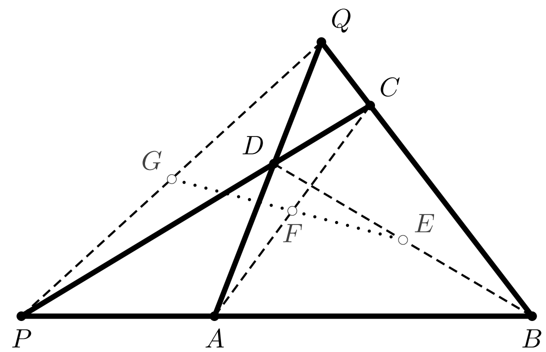
a szemköztes csúcsokat összekötő egyenesek pedig:

$$T_CB, \qquad CT_B, \qquad TA,$$

amelyek tehát ígía tétel értelmében egy ponton mennek át.

13. feladat

Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög AB, CD oldalegyenesei a P, a BC, DA oldalegyenesei a Q pontban metszik egymást, akkor a PQ szakasz felezőpontja illeszkedik az AC, BD átlók felezőpontjait összekötő egyenesre!



Megoldás

Először helyezzünk tömegeket a P, B, Q pontokba úgy, hogy tömegközéppontjuk D-ben legyen! Ha $BA = \alpha_1$, $AP = \alpha_2$, $BC = \gamma_1$, $CQ = \gamma_2$, akkor a

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \tag{18}$$

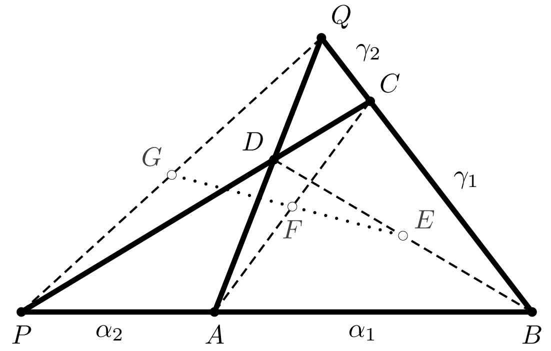
tömegpontrendszer megfelelő, hiszen

$$\frac{BA}{AP} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy A-ra helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja az AQ egyenesen lesz, míg

$$\frac{BC}{CQ} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(Q^{\gamma_1\alpha_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy C-re helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja egyúttal a CP egyenesen is rajta lesz.



Ha át akarjuk helyezni a rendszer tömegközéppontját a BD átló E felezőpontjába, akkor a B csúcsba még ugyanannyi tömeget teszünk, mint eddig összesen:

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{2\alpha_2\gamma_2+\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \equiv E^x. \tag{19}$$

Most súlyozzuk úgy a P, B, Q pontokat, hogy tömegközéppontjuk az AC szakasz F felezőpontjára essen! A

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \tag{20}$$

súlyozás megfelelő, hiszen

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)}\right) \equiv A^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

míg

$$\left(Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}, B^{\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv C^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

így

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv F^y.$$

Ha most a (19) tömegpontrendszerben minden csúcsnál levesszük az ottani súlyból a (20) tömegpontrendszerben feltüntetett súlyt, akkor az (E^x, F^{-y}) súlyozással ekvivalens súlyozáshoz jutok, amelynek tömegközéppontja az EF egyenesen van. Ez a súlyozás konkrétan

$$\left(P^{\alpha_1\gamma_1}, B^0, Q^{\gamma_1\alpha_1}\right), \tag{21}$$

tehát tömegközéppontja a PQ szakasz G felezőpontja. Ezzel beláttuk, hogy E, F és G egy egyenesen vannak.

14. feladat Fejezzük ki a háromszög körülírt és beírt köreinek sugaraival (R és r) a két kör középpontjának távolságát (d-t)!

Megoldás Jelölje az ABC háromszög AB, BC, CA oldalainak hosszát szokásosan c, a és b! Tekintsük az (A^a, B^b, C^c) tömegpontrendszert! A szögfelező tétel szerint ennek a pontrendszernek a tömegközéppontja a háromszög beírt körének I középpontja! A tömegpontrendszernek a saját súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_I = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + csb^2) = abc, \tag{22}$$

míg a körülírt kör O középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_O = a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2 = (a+b+c)R^2. \tag{23}$$

Steiner tétele alapján a két tehetetlenségi nyomaték között az

$$\Theta_O = \Theta_I + (a+b+c)OI^2 \tag{24}$$

összefüggés áll fenn. Mivel $OI = d$, $abc = 2Rab\sin\gamma = 4RT$ és $(a+b+c) = 2T/r$, ahol T az ABC háromszög területe, így (22)-et és (23)-at (24)-ba írva kapjuk, hogy

$$(a+b+c)R^2 = abc + (a+b+c)d^2,$$

azaz

$$R^2 = \frac{abc}{(a+b+c)} + d^2,$$

így
$$R^2 - 2Rr = d^2. \tag{25}$$

15. feladat
Fejezzük ki a háromszög súlyvonalának hosszát az oldalakkal!

Megoldás
Tegyünk a háromszög mindhárom csúcsába egységnyi tömeget és számoljuk ki a rendszer súlypontra, majd az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
A VI. alapelv szerint
$$\Theta_S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$
míg a IV. alapelv szerint
$$\Theta_F = FC^2 + FA^2 + FB^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$
a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig
$$\Theta_F = \Theta_S + 3FS^2 = \Theta_S + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
azaz
$$s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
és ebből
$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

16. feladat (*Stewart tétel*)
Jelölje a háromszög AB oldalát $\frac{p}{q}$ arányban osztó pontját F – azaz
$$\frac{AF}{FQ} = \frac{p}{q}.$$
Fejezzük ki az FC szakasz hosszát a háromszög oldalaival és a p, q mennyiségekkel!

Megoldás
Tekintsük az
$$\left(A^q, B^p, C^{p+q}\right)$$
súlyozott pontrendszert. Mivel a II. alapelv miatt $(A^q, B^p) = F^{p+q}$, így az I. alapelv miatt $(A^q, B^p, C^{p+q}) = S^{2p+2q}$, ahol S az FC szakasz felezőpontja.
Számoljuk ki a rendszer saját súlypontjára, majd az F pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
A VI. alapelv szerint
$$\Theta_S = \frac{p(p+q)a^2 + q(p+q)b^2 + pqc^2}{2(p+q)} = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2,$$
míg a IV. alapelv szerint
$$\Theta_F = (p+q)FC^2 + qFA^2 + pFB^2 = (p+q)FC^2 + q\left(\frac{pc}{p+q}\right)^2 + p\left(\frac{qc}{p+q}\right)^2 =$$
$$= (p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2,$$
a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig
$$\Theta_F = \Theta_S + 2(p+q)FS^2 = \Theta_S + 2(p+q)\left(\frac{FC}{2}\right)^2 = \Theta_S + \frac{p+q}{2}FC^2,$$
azaz
$$(p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2 = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2 + \frac{p+q}{2}FC^2,$$
és ebből
$$FC^2 = \frac{p}{p+q}a^2 + \frac{q}{p+q}b^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}c^2.$$

Megjegyzés A feladat megoldható az AFC, BFC háromszögek AC, BC oldalaira felírt koszinusz-tételekkel is, felhasználva, hogy $\cos AFC\angle + \cos BFC\angle = 0$.

17. feladat (*Németh Gergely diák javaslata*)

Messe az ABC nem egyenlő szárú háromszög A-nál illetve B-nél fekvő belső szögének szögfelező egyenese a szemköztes – BC, ill AC – oldalt az A_1, ill. B_1 pontban.

a) Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög C csúcshoz tartozó külső szögfelezője és az A_1B_1 egyenes az AB oldalegyenesen metszik egymást!

b) Messe az A, B, C csúcshoz tartozó külső szögfelező a háromszög szemköztes oldalegyenesét – tehát rendre a BC, CA, AB egyenest – az A_2, B_2, C_2 pontban. Mutassuk meg, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak!

Megoldás

a) Legyen $C_2 = A_1B_1 \cap AB$. Helyezzünk súlyokat az A, B, C pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja C_2-ben legyen! Mivel $C_2 \in AB$, így a C csúcsra összességében nulla tömeget kell tenni. A szögfelező tétel szerint $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, míg $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$, így $A^aC^c = B_1^{a+c}$ és $B^bC^c = A_1^{b+c}$. Ennek alapján megfelelő lesz a A^aB^{-b} tömegpontrendszer, hiszen

$$A^aB^{-b} = A^aB^{-b}C^{c-c} = A^aC^cB^{-b}C^{-c} = B_1^{a+c}A_1^{-b-c},$$

és így a tömegközéppont valóban az AB, A_1B_1 egyenesek C_2 metszéspontjában lesz.

Tekintsük még az A pontnak a C-ből induló külső szögfelezőre vonatkozó tükörképét, az A_3 pontot, valamint az AA_3 szakasz A_F felezőpontját, amely az említett külső szögfelezőre esik. Mivel $A_3C = b$ és $CB = a$, így

$$A^aB^{-b} = A^aA_3^{a-a}B^{-b} = A^aA_3^aB^{-b}A_3^{-a} = A_F^{2a}C^{-b-a},$$

tehát a pontrendszer C_2 tömegközéppontja valóban illeszkedik a C csúcshoz tartozó külső szögfelezőre.

b) Általánosan kezeljük a kérdést. Az is igaz, hogy ha AA_1, BB_1, CC_1 tetszőleges Ceva szakaszok – azaz $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ és AA_1, BB_1, CC_1 egy közös P pontban metszik egymást – és

$$C_2 = A_1B_1 \cap AB, \qquad B_2 = C_1A_1 \cap CA, \qquad A_2 = B_1C_1 \cap BC,$$

akkor A_2, B_2 és C_2 egy egyenesen vannak.

Ha $A^\alpha B^\beta C^\gamma = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$A^\alpha B^\beta = C_1^{\alpha+\beta}, \qquad B^\beta C^\gamma = A_1^{\beta+\gamma}, \qquad C^\gamma A^\alpha = B_1^{\alpha+\gamma},$$

és így

$$A^\alpha B^{-\beta} = A^\alpha B^{-\beta}C^0 = A^\alpha C^\gamma B^{-\beta}C^{-\gamma} = B_1^{\alpha+\gamma}A_1^{-\beta-\gamma},$$

tehát a tömegközéppont az $AB \cap A_1B_1 = C_2$ pont: $A^\alpha B^{-\beta} = C_2^{\alpha-\beta}$. Ehhez hasonlóan juthatunk el a B_2, A_2 pontokhoz, az alábbi táblázat mutatja, hová mennyi súlyt tegyünk:

	A	B	C
A_2:	0	β	$-\gamma$
B_2:	$-\alpha$	0	γ
C_2:	α	$-\beta$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\beta}y + \frac{1}{\gamma}z = 0 \tag{26}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^xB^yC^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a (26) reláció.

Megjegyzés *Machó Bónis*

Ha csak azt akarjuk igazolni, hogy a külső szögfelezőknek a velük szemközti oldalegyenessel való metszéspontjaik egy egyenesen vannak, akkor a hivatkozhatunk arra, hogy három kör páronkénti külső hasonlósági pontjai egy egyenesen vannak. Valóban, az AC oldalhoz hozzáírt körnek és az AB oldalhoz hozzáírt körnek a külső hasonlósági pontja a közös érintőjük – a BC oldalegyenes – és a centrálisuk – az A-nál fekvő szög külső szögfelezője – metszéspontja.

Megjegyzés A b) feladatrész elején említett általános összefüggés a Desargues nevezetes tételéből is következik. Az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek ugyanis pontra nézve – a P pontra nézve – perspektívek, így egyenesre nézve is azok, és ez épp a bizonyítandó állítást jelenti.

18. feladat

Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. A háromszöghöz rögzített $(x_A; x_B; x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az ℓ egyenes egyenlete

$$\xi_A x_A + \xi_B x_B + \xi_C x_C = 0. \tag{27}$$

Honnan ismerhető fel, hogy ez az egyenes érinti a háromszög beírt körét? Írjunk fel egy olyan

$$P(\xi_A; \xi_B; \xi_C) = 0 \tag{28}$$

összefüggést, amely pontosan akkor teljesül, ha az (27) egyenes érinti a beírt kört!

Megoldás

A k beírt kört érintő egyenes olyan háromszögeket alkot az eredeti háromszög két-két oldalával, amelynek beírt vagy hozzáírt köre a k kör. Ezért többször is szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma Az ABC háromszöghöz rögzített $(x_A; x_B; x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az $I(i_A; i_B; i_C)$ pont akkor és csakis akkor beírt vagy hozzáírt köre az ABC háromszögnek, ha

$$\frac{i_A^2}{i_B^2} = \frac{BC^2}{CA^2}, \qquad \frac{i_B^2}{i_C^2} = \frac{CA^2}{AB^2}, \qquad \frac{i_C^2}{i_A^2} = \frac{AB^2}{BC^2}. \tag{29}$$

Valóban, a beírt kör középpontjának koordinátái a szokásos jelölésekkel $(a; b; c)$, míg a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök középpontjai rendre

$$(-a; b; c), \qquad (a; -b; c), \qquad (a; b; -c),$$

és pont az ezekkel arányos számhármasok elégítik ki a (29) összefüggést.

Messe az ℓ egyenes a háromszög AC oldalegyenesét a $B_2(a; 0; c_a)$, a BC oldalegyenest az $A_2(0; b; c_b)$ pontban, ahol (27)-nek megfelelően

$$\xi_a a + \xi_c c_a = 0, \qquad \xi_b b + \xi_c c_b = 0. \tag{30}$$

Mivel

$$I^{a+b+c} = A^a B^b C^c = B_2^{a+c_a} A_2^{b+c_b} C^{c-c_a-c_b}, \tag{31}$$

így a Lemma szerint csak azt kell ellenőrizni, hogy

$$\frac{(a+c_a)^2}{(b+c_b)^2} = \frac{A_2C^2}{CB_2^2}, \qquad \frac{(b+c_b)^2}{(c-c_a-c_b)^2} = \frac{CB_2^2}{B_2A_2^2}, \qquad \frac{(c-c_a-c_b)^2}{(a+c_a)^2} = \frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}. \tag{32}$$

Mivel

$$\frac{CB_2}{CA} = \frac{a}{c_a+a}, \qquad \frac{CA_2}{CB} = \frac{b}{c_b+b},$$

így

$$CB_2 = \frac{ab}{c_a+a}, \qquad CA_2 = \frac{ab}{c_b+b}, \tag{33}$$

tehát (32) első egyenlete teljesül.

Az ABC háromszögre vonatkozó koszinusz tételből az $ACB\angle = \gamma$ szögre

$$2\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}, \tag{34}$$

és így az A_2B_2C háromszögre vonatkozó

$$A_2B_2^2 = CB_2^2 + CA_2^2 - 2CB_2CA_2\cos\gamma$$

koszinusztételből

$$\left(\frac{(c_a+a)(c_b+b)}{ab}\right)^2 A_2B_2^2 = (c_b+b)^2 + (c_a+a)^2 - (c_b+b)(c_a+a)\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}. \tag{35}$$

A (32) egyenletek szorzata azonosan teljesül, így elég közülük kettőt ellenőrizni. Mivel az elsőt igazoltuk, alább csak a harmadikra, a

$$(c-c_a-c_b)^2 = \frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}(a+c_a)^2$$

relációra koncentrálunk. A (33) (35) összefüggéseket felhasználva a

$$(c-c_a-c_b)^2 = (c_b+b)^2 + (c_a+a)^2 - (c_b+b)(c_a+a)\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$$

összefüggéshez jutunk. Ebben felbontjuk a zárójelek és átrendezzük a c_a, c_b változók polinomjaként és leosztunk a mindenütt megjelenő $(a+b+c)$ tényezővel:

$$c_ac_b(a+b-c) - c_ab(a-b+c) - c_ba(-a+b+c) = 0. \tag{36}$$

A (30) relációk segítenek, hogy megkapjuk az ℓ egyenes együtthatóira vonatkozó összefüggést:

$$ab(a+b-c)\frac{\xi_a\xi_b}{\xi_c^2} + ab(a-b+c)\frac{\xi_a}{\xi_c} + ab(-a+b+c)\frac{\xi_b}{\xi_c} = 0,$$

azaz

$$(s-c)\xi_a\xi_b + (s-b)\xi_a\xi_c + (s-a)\xi_b\xi_c = 0, \tag{37}$$

vagy a kívánt összefüggés még egyszerűbben:

$$\frac{s-c}{\xi_c}+\frac{s-b}{\xi_b}+\frac{s-a}{\xi_a}=0. \tag{38}$$

19. feladat (*Kömal, A. 568., 2012. szeptember*)
Adott az ABC háromszög, és a beírt körének középpontján átmenő ℓ egyenes. Jelölje A_1, B_1, illetve C_1 az A, a B, illetve a C pont ℓ-re vonatkozó tükörképét. Legyen az A_1, B_1 és C_1 pontokon át ℓ-lel húzott párhuzamosok metszéspontja a BC, CA és AB egyenesekkel rendre A_2, B_2, illetve C_2. Bizonyítsuk be, hogy
a) az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak, és
b) ez az egyenes érinti a beírt kört!

Megoldás
Jelölje az ℓ egyenes előjeles távolságát az A, B, C pontoktól rendre α, β és γ, azaz legyen ℓ egyenlete az A, B, C pontokhoz rögzített baricentrikus koordinátarendszerben

$$\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C=0. \tag{39}$$

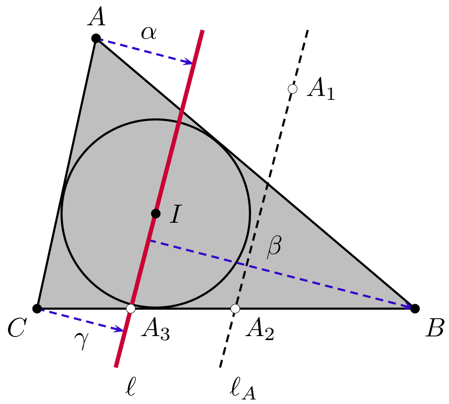
Tehát a (39) egyenes pontjai azok a pontok, amelyek olyan $A^{x_A}B^{x_B}C^{x_C}$ súlyozással adhatók meg, amely súlyokra teljesül a (39) reláció. A beírt kör I középpontja is illeszkedik ℓ-re, és I az $A^aB^bC^c$ tömegpontrendszer súlypontja, így

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0. \tag{40}$$

I-ből kiindulva most cseréljük ki az A^a tömegpontot az A_1^{-a} tömegpontra! A tömegpontrendszernek az ℓ egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka nem változott, tehát továbbra is zérus, az új tömegközéppont is ℓ-en van.

Cseréljük ki most az A_1^{-a} tömegpontot az A_2^{-a} tömegpontra! Ezzel sem változtattunk a ℓ-re vonatkozó forgatónyomatékon, de most már mindegyik tömegpontunk az AB egyenesen van, tehát a tömegközéppont az $A_3=\ell\cap AB$ pont,

$$A_2^{-a}B^bC^c=A_3^{-a+b+c} \tag{41}$$



Szeretnénk kitalálni, hogy az A_2 pont hol helyezkedik el a BC egyenesen, tehát szeretnénk súlyokat tenni a B, C pontokra, hogy tömegközéppontjuk A_3 legyen. Először tegyünk úgy súlyokat B-re és C-re, hogy a tömegközéppont A_3-ban legyen és az össztömeg annyi legyen, mint az előbb: $(-a+b+c)$! A (39) egyenletből ismertek a B, C pontokból az ℓ tengelyhez tartozó erőkarok arányai $\frac{-\beta}{\gamma}=\frac{BA_3}{A_3C}$, így

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)}C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)}=A_3^{-a+b+c} \tag{42}$$

A (41), (42) tömegpontrendszerek összevetéséből kapjuk, hogy

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-b}C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-c}=A_2^{-a} \tag{43}$$

A $(\gamma-\beta)$ mennyiséggel átszorozva, a (40) összefüggést felhasználva, egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$B^{-\alpha-\gamma}C^{\alpha+\beta}=A_2^{\beta-\gamma} \tag{44}$$

Ehhez hasonlóan kaphatjuk az A, B, C pontok azon súlyozásait, amelyek tömegközéppontja a B_2 illetve a C_2 pont. Az eredményeket táblázatba foglaljuk össze:

	A	B	C
A_2:	0	$-\alpha-\gamma$	$\alpha+\beta$
B_2:	$\beta+\gamma$	0	$-\beta-\alpha$
C_2:	$-\gamma-\beta$	$\gamma+\alpha$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\beta+\gamma}x+\frac{1}{\gamma+\alpha}y+\frac{1}{\alpha+\beta}z=0 \tag{45}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^xB^yC^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a (45) reláció.

b) A (45) egyenesről a 18. feladat eredménye, a (38) reláció alapján eldönthető, hogy érinti-e a beírt kört.

$$(s-a)(\beta+\gamma)+(s-b)(\gamma+\alpha)+(s-c)(\alpha+\beta)=\alpha(s-b+s-c)+\beta(s-c+s-a)+\gamma(s-a+s-b)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

tehát a (40) összefüggés szerint az egyenes tényleg érinti a beírt kört.

Megjegyzés Érdemes elolvasni a fenti Kömal A. 568. feladat Brianchon tételt használó frappáns megoldását a Kömal honlapján:

http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A568&l=hu

20. feladat (*Kvant, M1062. feladat, 1988/1., 25-26.o*)
a) Az ABC háromszög AB, AC oldalain adottak a B_1, C_1 pontok. A BC_1, CB_1 egyenesek az M pontban metszik egymást, míg az AM egyenes a BC, B_1C_1 szakaszokat rendre a P, P_1 pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PP_1}{P_1A}=2\frac{PM}{MA}.$$

b) Az $ABCD$ tetraéder AB, AC, AD élein vettük fel a B_1, C_1, D_1 pontokat. A BCD_1, CDB_1, CAB_1 síkok az M pontban metszik egymást, míg az AM egyenes a BCD, $B_1C_1D_1$ síkokat rendre a P, P_1 pontokban metszi. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PP_1}{P_1A}=3\frac{PM}{MA}.$$

21. feladat (*Csan Kuang: Ha a tömegek területet jelölnek, Kvant, 1984/8, 35-38. o.*)
a) Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszög oldalai $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, körülírt körének középpontja O, sugara r, akkor a sík tetszőleges P pontjára teljesül az

$$r^2-OP^2=\frac{t_at_bc^2+t_bt_ca^2+t_ct_ab^2}{t^2}$$

összefüggés, ahol t_a, t_b, t_c és t rendre a PBC, PCA, PAB, ABC háromszög *előjeles* területét jelöli!
b) *Ptolameiosz tétele*
Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, akkor $AC\cdot BD=AB\cdot CD+DA\cdot BC$.

Megoldás
a) Számítsuk ki a $A^{t_a}B^{t_b}C^{t_c}\equiv P^t$ tömegpont tehetetlenségi nyomatékát az O ponton átmenő az ABC síkra merőleges tengelyre vonatkozólag. (Alkalmazzuk az V., VI., alapelveket!)

b) Alkalmazzuk az a) feladatrész eredményét a $D=P$ pontra! Mivel $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}=\frac{c}{sin\gamma}=2r$, így az ABD, BCD, CDA háromszögek területének abszolút értéke rendre $\frac{c}{4r}DA\cdot DB$, $\frac{a}{4r}DB\cdot DC$, $\frac{b}{4r}DC\cdot DA$, amiből a területek előjelét is figyelembe véve adódik az állítás.

22. feladat (*Csan Kuang: Ha a tömegek területet jelölnek, Kvant, 1984/8, 35-38. o.*)
a) Jelölje az ABC háromszög előjeles területét t, körülírt körének középpontját O, sugarát r, a sík tetszőleges P pontjának a háromszög AB, BC, CA oldalegyeneseire való merőleges vetületét rendre P_c, P_a és P_b. Mutassuk meg, hogy a $P_aP_bP_c$ általános talpponti háromszög előjeles területe

$$t_P=\frac{t}{4}\left(1-\frac{OP^2}{r^2}\right).$$

b) Mutassuk meg, hogy a sík P pontjának az ABC háromszög oldalegyeneseire vonatkozó merőleges vetületei akkor és csakis akkor illeszkednek egy egyenesre, ha P illeszkedik a háromszög körülírt körére!

Megoldás Alkalmazzuk a 21. a) feladat állítását!

23. feladat (*Csan Kuang: Ha a tömegek területet jelölnek, Kvant, 1984/8, 35-38. o.*)
Az P_1, P_2 pontok baricentrikus koordinátái az ABC háromszög csúcsaira vonatkozólag $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ illetve $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$, ahol

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=1.$$

Fejezzük ki az P_1P_2 szakasz hosszát a baricentrikus koordináták és az ABC alapháromszög $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ oldalainak hossza segítségével!

Eredmény:

$$P_1P_2^2 = -\left((\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)a^2 + (\gamma_1-\gamma_2)(\alpha_1-\alpha_2)b^2 + (\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2\right).$$

Ajánlott és egyben felhasznált irodalom

Reiman Istán: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft, 1999.

M. B. Balk, V. G. Boltyánszkij: *Geometria massz*, Bibliotyecska Kvant, 61. kötet

Orosz Gyula: *A súlypontszerkesztési tétel*, Tanári Kincsestár – Matematika, 2007. december, Raabe,

Orosz Gyula: *A súlypontszerkesztési tétel alkalmazásai*, Tanári Kincsestár – Matematika, 2008. március, Raabe,

Csan Kuang: *Ecli masszü zamenyity na plósagyi* (Ha a tömegek területet jelölnek), Kvant, 1984/8, 35-38. o.

A jelen dokumentum legfrissebb változatának elérhetősége:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/termtud2011/