Buék 2013

Az alábbi példasort a 11-12-es tagozatos diákoknak ajánlom újévi vetélkedőnek. Az osztályok nagyon különbözőek, ez a sor nagyon nehéznek is bizonyulhat, érdemes lehet könnyíteni rajta.

Kavics Kupa típusú vetélkedőnek gondoltam, tehát 2-4 fős csapatok versenyére. 60-90 perc az ajánlott ráfordítási idő. A kihozott megoldást a tanár nem kommentálja, csak megmondja, hogy jó-e a végeredmény – és beírja érte a pontszámot – vagy megmondja, hogy rossz az eredmény és (-5) pontot ír be. Mínusz 5 pontot többször is lehet kapni ugyanazért a feladatért és ezek nem törlődnek ki a jó megoldás után, amiért a pontot csak egyszer kaphatja meg a csapat.

A levezető tanárnak mellékeltem a végeredmény-lapot és egy pontozólapot is.

Aki hibát talál az írjon emailt a hraskoa@fazekas.hu címemre.

BUÉK!

Hraskó András

Minden feladatra egy-egy nemnegatív egész szám a válasz. Rossz megoldásért minden alkalommal (-5) pont jár, akár többször is ugyanazért a feladatért. Ugyanarra a feladatra többször is kihozható megoldás, de csak egyszer kapható meg érte a megajánlott pontszám. Számológép használható.

1. Ha felírjuk 2013^3-t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **15 pont**

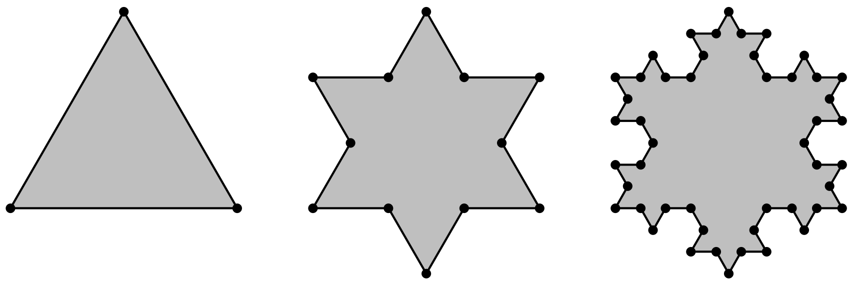
2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013? **20 pont**

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013-adik elemét! **20 pont**

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számhármas van, amelyben $x + y + z = 2013$? **20 pont**

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm^2-ben? **25 pont**

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópelyhet. Az n-edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$-edik hópelyhet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.



Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél? **25 pont**

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **25 pont**

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

25 pont

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}, \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét! **30 pont**

10. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **30 pont**

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét! **35 pont**

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egy-egy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **35 pont**

13. Milyen értékhez tart az n-edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **40 pont**

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **40 pont**

Feladatok és válaszok

1. Ha felírjuk 2013^3-t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **Válasz: 4050157**

2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013? **Válasz: 7**

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013-adik elemét! **Válasz: 2012**

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számhármas van, amelyben $x + y + z = 2013$? **Válasz: 2023066**

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm^2-ben? **Válasz: 52169**

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópelyhet. Az n-edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$-edik hópelyhet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.

Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél? **Válasz: 24**

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **Eredmény: 0**

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

Válasz: 16

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x + 7}{x + 3}, \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét! **Válasz: 2012**

10. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **Válasz: 3**

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét!

Válasz: 740

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egy-egy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **Válasz: 79**

13. Milyen értékhez tart az n-edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **Válasz: 160**

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **Válasz: 169092**

Feladatok, válaszok, indoklás

1. Ha felírjuk 2013^3-t 2013 db egymást követő páratlan szám összegeként, akkor melyik összeadandó lesz a legkisebb? **15 pont**

Válasz: 4050157

Indoklás: $2013^2 - 2 \cdot \frac{2013-1}{2} = 4050157$

2. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló legalább háromelemű számtani sorozat van, amelynek első eleme a 0, utolsó eleme a 2013? **20 pont**

Válasz: 7

Indoklás: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, így 2013 önmagánál kisebb pozitív osztóinak száma 7.

3. Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ kezdőelemekkel, $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurzióval definiált sorozat 2013-adik elemét! **20 pont**

Válasz: 2012

Indoklás: A sorozat hatos periódusú, a 2013-adik elem a harmadik elemmel egyezik meg.

4. Hány olyan pozitív egészekből álló $(x; y; z)$ rendezett számhármas van, amelyben $x + y + z = 2013$? **20 pont**

Válasz: 2023066

Indoklás: Osszunk fel egy 2013 egység hosszú szakaszt három részre! A három rész balról jobbra: x, y, z. Az osztópontok 1-nél, 2-nél, ...2012-nél lehetnek, tehát $\binom{2012}{2} = 1006 \cdot 2011 = 2023066$ lehetőség van.

5. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 2013 cm, testátlója 2000 cm. Mekkora a felszíne cm^2-ben? **25 pont**

Válasz: 52169

Indoklás: $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2013^2 - 2000^2 = 52169$.

6. Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk az ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópelyhet. Az n-edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$-edik hópelyhet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.

Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél? **25 pont**

Válasz: 24

Indoklás: az n-edik hópehely kerülete: $k_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, így a kérdezett érték $\frac{\ln \frac{2013}{3}}{\ln \frac{4}{3}} + 1$ felső egész része.

7. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $k^2 + n^2 = 2013$? **25 pont**

Eredmény: 0

Indoklás: $a^2 \equiv 0$ vagy $1 \pmod 3$, míg $2013 \equiv 0 \pmod 3$, így $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$, de $2013 \not\equiv 0 \pmod 9$.

8. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van amelyre

$$2x + y + 2xy = 2012?$$

25 pont

Válasz: 16

Indoklás: $(2x + 1)(y + 1) = 2013$ és 2013-nak 16 egész osztója van, mind páratlan.

9. Legyen

$$f_1(x) = -\frac{2x + 7}{x + 3}, \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)).$$

Határozzuk meg $f_{2013}(2012)$ értékét! **30 pont**

Válasz: 2012

Indoklás: $f_3(x) = x$, sőt $f_{3n}(x) = x$, így $f_{2013}(x) = x$.

10. Hány olyan nemnegatív egész számokból álló (k, n) rendezett pár van, amelyre $\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{2012}$? **30 pont**

Eredmény: 3

Indoklás: $\sqrt{k} = 2\sqrt{503} - \sqrt{n}$, ahol 503 prím. Négyzetreemelve $4\sqrt{503n} = 2012 + n - k \in \mathbb{N}$, azaz $503n$ négyzetszám, tehát $n = 503\nu^2$ és ugyanígy $k = 503\chi^2$, ahol az eredeti egyenletbe visszaírva $\sqrt{503}$-mal osztva $\nu + \chi = 2$ adódik.

11. Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét! **35 pont**

Eredmény: 740

Indoklás:

$$\frac{B}{A} = \frac{2012}{\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}} = \frac{2012}{\left(1 + \frac{1}{2012}\right)^{2012}} \approx \frac{2012}{e} \approx 740,$$

ahol amúgy a $\left(1 + \frac{1}{2012}\right)^{2012}$ kifejezés értéke számológéppel is meghatározható.

12. Határozzuk meg $N = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012}$ tizedesvesszővel szomszédos egy-egy jegyét, tehát adjuk meg a $10N$ egészrészének utolsó két jegyét! **35 pont**

Válasz: 79

Indoklás: Az $M = (\sqrt{20} + \sqrt{13})^{2012} + (\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012}$ szám egész szám, hiszen

$$M = 2 \cdot 20^{2006} + 2\binom{2012}{2} \cdot 20^{2005} \cdot 13 + \ldots$$

$$\ldots + 2\binom{2012}{4} \cdot 20^2 \cdot 13^{2004} + 2\binom{2012}{2} \cdot 20 \cdot 13^{2005} + 2 \cdot 13^{2006}.$$

Először meghatározzuk M utolsó jegyét.

M-ben a $2\binom{2012}{2} \cdot 20 \cdot 13^{2005}$ tag 0-ra végződik, a 20-ban magasabb fokú tagok pedig már legalább két nullára végződnek. Így M utolsó jegye megegyezik $2 \cdot 3^{2006}$ utolsó jegyével, ami 8-as.

Másrészt az $N' = (\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012}$ szám rendkívül piciny. Valóban, $(\sqrt{20} - \sqrt{13}) < 0,9$, $(\sqrt{20} - \sqrt{13})^{22} < 0,9^{22} < 0,1$, így $(\sqrt{20} - \sqrt{13})^{2012} < 0,1$.

$N = M - N'$, tehát N egy 8-ra végződő számnál egy századnál kevesebbel kisebb, tehát $N = \ldots 7,9\ldots$

13. Milyen értékhez tart az n-edik és az első hópehely (lásd a 6. feladatot) területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez? Adjuk meg a határérték 100-szorosának egészrészét! **40 pont**

Válasz: 160

Indoklás: Ha T_n jelöli az n-edik hópehely területét és $T_1 = 1$, akkor

$$T_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad T_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\frac{1}{3}, \quad T_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \frac{1}{3}, \quad \ldots$$

hiszen lépésenként 4-szer annyi oldalszakaszdarab lesz, mint korábban és mindegyiken egy 9-ed akkora terület, mint korábban.

$$\lim_{n \mapsto \infty} T_n = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}.$$

13+1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely éppen 2013-szor akkora, mint prímosztóinak összege? **40 pont**

Válasz: 169092

Indoklás: A keresett n szám osztható 2013 prímosztóival, tehát a 3, 11, 61 számokkal. Ha további prímosztói $p_1, p_2, \ldots, p_k$, akkor

$$(3 + 11 + 61 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k) \cdot 2013 = n.$$

Szükséges, hogy $1 \leq i \leq k$ esetén fennálljon a $p_i \mid (75 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$ reláció és ez az összeg a lehető legkisebb legyen. $k = 2$-re $p_1 = 2$, $p_2 = 7$-tel megfelelő számot kapunk, hiszen $75 + 2 + 7 = 84$ osztható 2-vel és 7-tel és nincs a $\{2, 3, 7, 11, 61\}$ halmazba nem tartozó prímosztója. 75-től 83-ig nem kapunk megoldást, így a legkisebb megfelelő szám $84 \cdot 2013 = 169092$.

Specmat 11-12. évfolyam

Csapattagok	**1. fel.**	**2. fel.**	**3. fel.**	**4. fel.**	**5. fel.**	**6. fel.**	**7. fel.**	**8. fel.**	**9. fel.**	**10. fel.**	**11. fel.**	**12. fel.**	**13. fel.**	**14. fel.**	**Össz.**
	15	20	20	20	25	25	25	25	30	30	35	35	40	40	
1.															
2.															
3.															
4.															
5.															
6.															
7.															