Lexikon

Paulin Dániel 9.C

Logika

Állítás: Egy állítás értelmességét mindig egy közösség dönti el. Az állítások vagy igazak, vagy hamisak. Minden állítás megfordítható, azaz tagadható.

A és B állítás *kizárja* egymást, ha egyszerre nem lehetnek igazak.

Az A állítás *tagadása* olyan B állítás, amivel soha nem teljesülnek együtt, de valamelyik mindig igaz.

Logikai művelet: olyan művelet, melynek változói állítások, és egy állítást rendel hozzájuk. 1 vagy 2 változós logikai műveletek:

1. azonosan igaz (i)
    - kommutatív
    - asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	I
H	I	I

2. azonosan hamis (h)
    - kommutatív
    - asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	H
H	H	H

3. A
    - nem kommutatív
    - asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	H
H	I	H

4. $\overline{A}$

- nem kommutatív, mert tükrözve a főátlóra nem megy önmagába
- nem asszociatív, mert $(A, B), C = A \neq A, (B, C) = \overline{A}$

B \ A	**I**	**H**
I	H	I
H	H	I

5. B

- nem kommutatív
- asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	I
H	H	H

6. $\overline{B}$

- nem kommutatív
- nem asszociatív, mert $A, (B, C) = C \neq (A, B), C = \overline{C}$

B \ A	**I**	**H**
I	H	H
H	I	I

7. $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

- kommutatív
- asszociatív, hiszen $(A \vee B) \vee C$ és $A \vee (B \vee C)$ pontosan akkor igaz, ha A, B és C közül legalább az egyik igaz

B \ A	**I**	**H**
I	I	I
H	I	H

8. $\overline{A} \vee B = \overline{A \wedge \overline{B}}$ $\qquad (A \Rightarrow B)$

- nem kommutatív
- nem asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	I
H	H	I

9. $A \vee \overline{B} = \overline{\overline{A} \wedge B}$

- nem kommutatív
- asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	H
H	I	I

10. $\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \wedge B}$ $\qquad (A \setminus B)$ $\qquad$ Scheffer - művelet

- kommutatív
- nem asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	I
H	I	I

11. $A \wedge B$
    - kommutatív
    - asszociatív, mert $(A \wedge B) \wedge C$ és $A \wedge (B \vee C)$ csak akkor igaz, ha A, B és C is igaz

B \ A	**I**	**H**
I	I	H
H	H	H

12. $A \wedge \overline{B}$
    - nem kommutatív
    - nem asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	H
H	I	H

13. $\overline{A} \wedge B$
    - nem kommutatív
    - nem asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	I
H	H	H

14. $A \downarrow B = \overline{A} \wedge \overline{B}$ Webb - művelet
    - kommutatív
    - nem asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	H
H	H	I

15. $A \oplus B = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$
    - kommutatív
    - asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	H	I
H	I	H

16. $A \Longleftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = \overline{(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)}$
    - kommutatív
    - asszociatív

B \ A	**I**	**H**
I	I	H
H	H	I

kommutatív művelet: $A \circ B = B \circ A$, a logikai táblázat szimmetrikus a főátlóra
asszociatív művelet: $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$

De Morgan - szabály

$$\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \overline{A_3} \vee \ldots \vee \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n} = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}$$

Ez alapján minden művelet felírható éssel és tagadással illetve vaggyal és tagadással. Van 2 olyan művelet, amivel minden más felírható. Ezek:
Scheffer - művelet: $A \setminus B = \overline{A} \wedge \overline{B}$
Webb művelet: $A \oplus B$

Bizonyítás: Ha $A \downarrow B$ - vel ki tudjuk fejezni a tagadást és a $\wedge$ - t, akkor mindent.

$$A \downarrow A = \overline{A} \wedge \overline{A} = \overline{A} \qquad \text{(tagadás)}$$

$$(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) = \overline{A} \downarrow \overline{B} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}} = A \wedge B \qquad \text{(és)}$$

Ha $A \setminus B$ - vel ki tudjuk fejezni a tagadást és a $\vee$ - ot, akkor mindent.

$$A \setminus A = \overline{A} \vee \overline{A} = \overline{A} \qquad \text{(tagadás)}$$

$$(A \setminus A) \setminus (B \setminus B) = \overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}} = A \vee B \qquad \text{(vagy)}$$

Diszributivitás:
Két művelet disztributív, ha

$$(A \circ B) \boxdot C = (A \boxdot B) \circ (B \boxdot C)$$

Példák:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ (A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \oplus B) \wedge C &= (A \wedge C) \oplus (B \wedge C) \end{aligned}$$

Az $x \to ax^2 + bx + c$ függvény

A függvény ábrázolása

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$a \neq 0$$

Lépések:

- az $x \to x^2$ függvény megrajzolása.

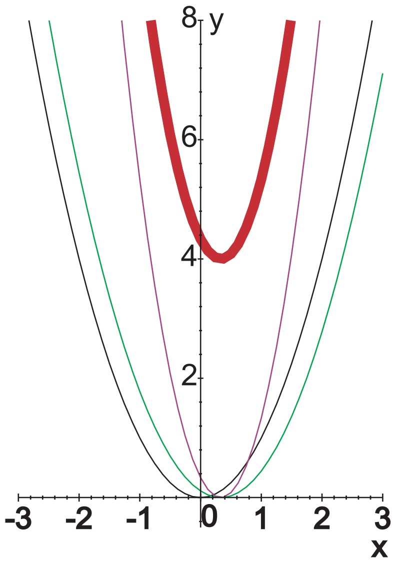
- $-\dfrac{b}{2a}$ - val eltoljuk az x tengely irányában
  - ha $\dfrac{b}{2a} > 0$ negatív irányba toljuk el
  - ha $\dfrac{b}{2a} < 0$ pozitív irányba toljuk el
- y tengely menti a - szoros tengelyes affinitás
  - ha $a > 0$ a parabola felfelé nyíló
  - ha $a < 0$ a parabola lefelé nyíló
  - ha $a = 0$ a függvény $x \to bx + c$ egyenes lesz.
- a függvényt az y tengely irányában $c - \dfrac{b^2}{4a}$ - val eltoljuk

A függvény szélsőértékhelyei:

- ha $a > 0$
  - nincs maximum, hiszen x növelésével a függvény értéke a végtelenhez tart
  - a minimumhely ott van, ahol $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ - nek, azaz ahol $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ - nek van a minimuma, ez $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ esetén van, azaz $x = -\dfrac{b}{2a}$
  - ekkor a minimum értéke: $c - \dfrac{b^2}{4a}$
- ha $a < 0$
  - nincs minimum, a parabola lefelé nyíló, szárai a $-\infty$ - hez tartanak x növelésével ill. csökkentésével
  - a maximumhely ott van, ahol az $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ - nek $(a < 0)$, azaz $x = -\dfrac{b}{2a}$ esetében.
  - a minimum érték: $c - \dfrac{b^2}{4a}$

Példa: ábrázoljuk az $x \rightarrow 3x^2 - 2x + 4$ függvényt!

$$3x^2 - 2x + \frac{11}{3} = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right) =$$
$$3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{9}\right] = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4$$



Az $ax^2 + bx + c = 0$ $\quad (a \neq 0)$ másodfokú egyenlet

Megoldóképlet

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & \quad / : a \quad a \neq 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

A bal oldal mindig pozitív vagy 0, ezért csak akkor van megoldás, ha $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$, azaz $b^2 - 4ac \geq 0$. A $b^2 - 4ac$ - t diszkriminánsnak nevezzük, és D - vel jelöljük. $D = b^2 - 4ac$ Ha $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor $\sqrt{b^2 - 4ac}$ pozitív valós szám lesz, így ha

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \quad / - \frac{b}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásainak száma:

- nincs megoldás, ha $D < 0$
- pontosan 1 (két egybeeső) megoldás van, ha $D = 0$
- 2 (különböző) megoldás van, ha $D > 0$

Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A gyökök és az egyenlet együtthatói között igazak a következő összefüggések:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} + -b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Tehát $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Ezek a **Vièta - formulák**.

Másodfokú kifejezés szorzat - alakja

Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést szeretnénk elsőfokú kifejezések szorzatára bontani. Korábbi levezetésünk szerint:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Ha $D = b^2 - 4ac \geq 0$, akkor a jobb oldal így is írható:

$$a(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \cdot (x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}),$$

azaz $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ha $D = b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke, így nem lehet elsőfokúak szorzatává alakítani. Ha ugyanis lehetne, akkor az elsőfokú tényezőkből le lehetne olvasni valós gyököt.

A Vièta formulákat így is beláthatjuk:

$$\begin{aligned} a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) &= 0 \\ a\left(x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2\right) &= 0 \\ ax^2 - \left(x_1 + x_2\right) ax + a x_1 x_2 &= 0 \\ -\left(x_1 + x_2\right) a = b \Rightarrow x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ a x_1 x_2 = c \Rightarrow x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Polinomok

1. Tétel. *Ha egy n - ed fokú polinomnak gyöke a t szám, akkor az $(x-t)$ tényező kiemelhető belőle.*

I. bizonyítás Legyen a polinom $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$. t megoldás, így $p(t) = 0$, azaz $a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1t + a_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
&p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-t)[(a_nx^{n-1} + ta_nx^{n-2} + \\
&+ t^2a_nx^{n-3} + \ldots + t^{n-2}a_nx + t^{n-1}a_n) + (a_{n-1}x^{n-2} + ta_{n-1}x^{n-3} + \\
&+ t^2a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + t^{n-1}a_{n-3}x + t^{n-2}a_{n-1}) + \ldots + (a_1)] + t^na_n + \\
&+ t^{n-1}a_{n-1} + t^{n-2}a_{n-2} + \ldots + ta_1 + a_0 = (x-t)[(a_nx^{n-1} + ta_nx^{n-2} + \\
&+ t^2a_nx^{n-3} + \ldots + t^{n-2}a_nx + t^{n-1}a_n) + \ldots] + \underbrace{p(t)}_{0} = (x-t)q(x), \text{ ahol} \\
&q(x) = (a_nx^{n-1} + ta_nx^{n-2} + t^2a_nx^{n-3} + \ldots + t^{n-2}a_nx + t^{n-1}a_n) + \ldots + (a_1)
\end{aligned}
$$

Így a kiemelés tényleg végrehajtható.

II. bizonyítás

$$
\begin{array}{rrcl}
 & p(x) & = & a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 \\
- & p(t) & = & a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1t + a_0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) - p(t) &= a_n(x^n - t^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - t^{n-1}) + \ldots + a_1(x-t) \\
p(t) = 0, \text{ így } p(x) &= a_n(x^n - t^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - t^{n-1}) + \ldots + a_1(x-t)
\end{aligned}
$$

így az $(x-t)$ - t kiemeltük, hiszen

$$x^k - t^k = (x-t)\underbrace{\left(x^{k-1} + x^{k-2}t + \ldots + xt^{k-2} + t^{k-1}\right)}_{q_k(x)}$$

2. Tétel. *Egy n - edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy több, mint n gyöke van, ekkor a $p(x_1)$, $p(x_1)$, $p(x_1)$, $\ldots$, $p(x_k)$ értéke 0, ahol $n < k$, így az $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, $(x-x_3)$, $\ldots$, $(x-x_k)$ kiemelhető a polinomból.

Így az egyenlet:

$$c(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k) = 0,$$

ahol c egy polinom. A k - tényezős szorzat elvégzése után a legmagasabb fokú tag legalább k - adfokú lesz, ami ellentmondás, mivel $n < k$.

Ellentmondásra jutottunk, így legfeljebb n db gyöke lehet egy n - edfokú egyenletnek.

A Vièta - formulák általánosan

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Tegyük fel, hogy van n megoldása: x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n, ekkor az alábbi módon írható fel az egyenlet:

$$\begin{gathered}
a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=0\\
a_n[x^n+(-x_1-x_2-x_3-\ldots-x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+\\
+x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}+\ldots+(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n]=0\\
a_nx^n+a_n(-x_1-x_2-x_3-\ldots-x_n)x^{n-1}+a_n(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+\\
+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n)x_{n-2}+\ldots+a_n(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n=0\\
\text{Így } a_n(-x_1-x_2-x_3-\ldots-x_n)=a_{n-1}\\
x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\
x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\
\vdots\\
x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}
\end{gathered}$$

Azaz a gyökök k - adrendű kombinációiban szereplő szorzatok összege:

$$(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

3. Tétel. *Ha két polinom minden x - re megegyező értéket vesz fel, akkor az együtthatóik is megegyeznek.*

I. bizonyítás Legyen a két polinom:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ és}\\
q(x) &= b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \text{ ahol } n \geq k
\end{aligned}$$

$p(x) = q(x)$ $\forall x$ - re, így

$$p(x)-q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - b_k x^k - b_{k-1}x^{k-1} - \ldots - b_1 x - b_0$$

Így minden x - re $0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^{k-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$. Ez egy x - re nézve legfeljebb n - edfokú egyenlet, amelynek legfeljebb n gyöke lehetne, de ennek végtelen sok van, így a polinom konstans 0, azaz $n = k$, és

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 0 & \qquad a_n &= b_n \\ a_{n-1} - b_{n-1} &= 0 & a_{n-1} &= b_{n-1} \\ a_{n-2} - b_{n-2} &= 0 & a_{n-2} &= b_{n-2} \\ &\vdots \\ a_0 - b_0 &= 0 & a_0 &= b_0, \end{aligned}$$

és ez az, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés: A bizonyításban csak azt használtuk ki, hogy a különbség-polinomnak n - nél több gyöke van, így ez a bizonyítás azt is megmutatja, hogy 2 legfeljebb n - edfokú különböző polinom nem adhatja $n+1$ helyen ugyan azt az értéket.

II. bizonyítás Ha $n > k$, akkor $b_n = 0, b_{n-1} = 0, b_{n-2} = 0, \ldots, b_{k+1} = 0s$. Így tekinthetjük $q(x)$ - et is n - edfokúnak. Mivel minden x - re megegyező értéket adnak, ugyanazt adják x - re $p(x) = q(x)$ és $x+1$ - re $p(x+1) = q(x+1)$, azaz $p(x+1) = q(x+1)$:

$$\begin{array}{rl} & a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \ldots + a_1(x+1) + a_0 = b_n(x+1)^n + \\ & +b_{n-1}(x+1)^{n-1} + \ldots + b_1(x+1) + b_0 \\ - & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n(x+1)^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \\ \hline & a_n\left[(x+1)^n - x^n\right] + a_{n-1}\left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right] + \ldots + a_1(x+1-x) = \\ & b_n\left[(x+1)^n - x^n\right] + b_{n-1}\left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right] + \ldots + b_1(x+1-x) \end{array}$$

$$a_n(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + 1) + a_{n-1}\left((n-1)x^{n-2} + \binom{n-1}{2}x^{n-3} + \ldots + 1\right) +$$
$$\ldots + a_1 = b_n(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + 1) + b_{n-1}\left((n-1)x^{n-2} + \binom{n-1}{2}x^{n-3} + \ldots\right.$$
$$\left.+1\right) + \ldots + b_1$$

$$a_n n x^{n-1} + \underbrace{\ldots}_{\text{max. } n-2 \text{ - edfokú tagok}} = b_n n x^{n-1} + \underbrace{\ldots}_{\text{max. } n-2 \text{ - edfokú tagok}}$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük: a konstans (0 - adfokú) függvényre nyilván igaz, így tegyük fel, hogy $n-1$ - re is igaz, következik - e ebből, hogy n - re is igaz?
Ha $n-1$ - re igaz: $a_n n x^{n-1} = b_n n x^{n-1}$ és ha $x \neq 0$, akkor $a_n = b_n$, így az állítás igaz.

4. Tétel. *Egy n - edfokú polinom-függvény egyértelműen meghatározható $n+1$ pontjából.*

Bizonyítás:

Egyértelműség: Ezt már beláttuk a 3. Tétel 1. bizonyításának megjegyzésében.

Meghatározás:

I. Newton - féle interpolációs polinomokkal

Legyen a meghatározandó polinom a q(x), ennek értékét $n+1$ helyen ismerjük, e helyek legyenek az x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_{n+1}, az ezen helyeken felvett értékük pedig legyen rendre y_1, y_2, y_3, $\ldots$, y_{n+1}. Ha a keresett polinom k - adfokú, akkor legyen q_k (tehát pl. ha egy 0 - adfokú polinomot keresünk,akkor q_0). A 0 - adfokú nyilván egyszerűen meghatározható: $q_0 = y_1$, hiszen a konstans polinom csak így mehet át az (x_1, y_1) ponton. Tehát $q_0 = y_1$, most nézzük q_1 - et.

$$q_1(x) = q_0(x) + (x - x_1) \cdot \frac{y_2 - q_0(x_2)}{x_2 - x_1}$$

Ez azért lesz megfelelő, mert x_1 esetén $q_0(x_1) + (x_1 - x_1) \cdot \dfrac{y_2 - q_0(x_2)}{x_2 - x_1} = q_0(x_1)$ - et, vagyis y_1 - et ad, x_2 esetén viszont $q_0(x_2) + (x_2 - x_1) \cdot \dfrac{y_2 - q_0(x_2)}{x_2 - x_1} = q_0(x_2) + y_2 - q_0(x_2) = y_2$ - t ad, ami megfelelő.

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Legyen $q_n(x)$ egy olyan n - edfokú polinom, amely x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_{n+1} - re megfelelő értéket ad. Ekkor $q_{n+1}(x)$ egy olyan n+1 - edfokú polinom, amely az x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} helyeken ugyanolyan értéket ad, mint a q_n, és az x_{n+2} helyen y_{n+2} - t ad.

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) + (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+1}) \cdot$$
$$\cdot \frac{y_{n+2} - q_n(x_{n+2})}{(x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n+2} - x_{n+1})},$$

ez x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} - re a 2. tag 0 lesz, így a kifejezés értéke $q_n(x)$ lesz, ami megfelelő. x_{n+2} esetén viszont a nevező és a tört előtt álló szorzat megegyezik, így a kifejezés értéke $q_n(x_{n+2}) + y_{n+2} - q_n(x_{n+2}) = y_{n+2}$ lesz, és ez megfelelő. Így teljes indukcióval megkaphatjuk a megfelelő polinomot, amely áthalad a megadott pontokon.

II. Lagrange - féle interpolációs polinomokkal

Olyan polinomokat alkotunk, amelyek n megadott pont helyén 0 - t adnak, az $n+1$. helyen pedig a megfelelő értéket, legyenek ezek a H_i polinomok. Ekkor

$$H_{n+1} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) \cdot \frac{y_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \ldots (x_{n+1} - x_n)}$$

Ez x_1, x_2, $\ldots$, x_n esetén 0 - t ad, x_{n+1} esetén y_{n+1} - et, vagyis éppen annyit, amennyit $q(x)$ - nek kell adnia itt. A nevező sosem lehet 0, hiszen a szorzat tagjai 2 x_i különbségei, de ezek sosem lehetnek egyenlők. Tehát

$$H_i = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)(x - x_{n+1}) \cdot$$
$$\cdot \frac{y_i}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)(x_i - x_{n+1})}$$

A H_i polinomok x_1, x_2, $\ldots$, x_{i-1}, x_{i+1}, $\ldots$, x_{n+1} esetén 0 - t adnak, míg x_i esetén y_i - t, ad, éppen annyit, amennyit a keresett polinomunknak kell adnia. Így a keresett polinom ezek összege, vagyis

$$q = \sum_{i=1}^{n+1} H_i,$$

ez ugyanis minden x_i - re $0 + 0 + \ldots + y_i + \ldots + 0 + \ldots + 0 = y_i$ - t ad értékül.

Egyenletrendszerek megoldása

Kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása

Általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Megoldása:

I. Egyenlő együtthatók módszerével

- ha $a_{11} = a_{12} = 0$, akkor 2 eset van:
  - $b_1 = 0$, ekkor csak 1 egyenletünk van, és 2 ismeretlen, ez nem valódi kétismeretlenes egyenletrendszer
  - $b_1 \neq 0$, ekkor az egyenletrendszer ellentmondásos
- ha $a_{11} = a_{21} = 0$, akkor csak 1 ismeretlenünk van, de 2 egyenletünk. Ekkor vagy ellentmondásos a megmaradt ismeretlenre, vagy pedig x_2 - re egyértelmű, x_1 - re határozatlan.
- ha valamelyik ismeretlen eggyüthatója 0, pl. $a_{11} = 0$, akkor a másikra egyértelmű, majd ezt behelyettesítve a 2. egyenletbe, a másik ismeretlenre is egyértelmű.
- ha $a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} \neq 0$, akkor az 1. egyenlet beszorzása a_{22} - vel és a 2. egyenlet beszorzása a_{12} - vel ekvivalens átalakítás:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 & / \cdot a_{22} \\ a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= b_1a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 & / \cdot a_{12} \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= b_2a_{12} \end{aligned}$$

Az így kapott 2 egyenletet kivonva egymásból kapjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12})x_2 &= b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}\end{aligned}$$

- Ha $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, akkor 2 eset van:
  - ha $b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$, akkor x_1 - re nézve nem egyértelmű, végtelen sok megoldás van, minden x_1 - hez egy - egy x_2 tartozik.
  - $b_1a_{22} - b_2a_{12} \neq 0$, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, hiszen a bal oldal 0, míg a jobb oldal nem 0.
- Ha $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, akkor leoszthatunk vele, így

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

ugyanígy

$$x_2 = \frac{b_1a_{21} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Az $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ kifejezést az egyenletrendszer determinánsának nevezzük és $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - vel jelöljük. Ha $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, akkor

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ha $D = 0$, akkor vagy 0 vagy végtelen sok megoldás van, ha $D \neq 0$, akkor 1 megoldás van. Ha $D = 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a21 = 0$, azaz $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \Rightarrow \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, azaz a 2. egyenlet az 1. - nek többszöröse.

II. Behelyettesítő módszer

Az első egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent a másik segítségével, majd a 2. egyenletbe behelyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit megoldhatunk.

III. Grafikus módszer

A két egyenlet x_1 - re és x_2 - re nézve a koordináta - rendszerben egyenest határoz meg (x_1 az x - nek, x_2 az y - nak felel meg, és így az egyenletek $ax + by = c$ alakúak). Az egyenletrendszer megoldása a 2 egyenes metszéspontjának koordinátái.

Két egyenes egymáshoz viszonyítva lehet: párhuzamos, egybeeső és metsző.

- Ha metszik egymást 1 pontban, akkor 1 megoldás van.
- Ha párhuzamosak, akkor nem metszik egymást, így nincs megoldás.
- Ha a 2 egyenes egybeesik, akkor végtelen sok megoldás van.

Ha a két egyenes párhuzamos, az azt jelenti, hogy a meredekségük megegyezik, azaz $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$, átrendezve $D = 0$.

Ahhoz, hogy a 2 egyenes egybeessen, szükséges, hogy $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ is teljesüljön ($b_1 \neq 0$).

Mátrix - módszer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Tekintsük az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot. Az a kérdés, hogy milyen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mátrixszal kell megszorozni (jobbról), hogy a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y \\ a_{21}x & a_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ha sikerülne találni egy ,,inverz" mátrixot, azaz egy olyan mátrixot, amivel az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - et megszorozva az egységmátrixot kapnánk, akkor a bal oldalon csak $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ maradna. Az a kérdés, hogy van - e ilyen inverz mátrix és ha van, akkor mennyi van belőle. Az egységmátrix $I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ha van inverz, akkor csak 1 van, hiszen a mátrix bal oldali és jobb oldali inverze meg kell egyezzen, hiszen ha $A_2A = I$ és $AA_2 = I$, akkor

$$\left.\begin{array}{l} A_1AA_2 = (A_2A)A_2 = A_2 \\ A_1AA_2 = A_1(AA_2) = A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Itt felhasználtuk a mátrixszorzás asszocivitását is. Így ha beszorzunk az inverz mátrixszal:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ ahol } M^{-1}M = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

ahonnan x és y értéke a mátrixok egyenlősége alapján következik.

Háromismeretlenes egyenletrendszer

Általános alakja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{2}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{3}$$

Megoldása (egyenlő együtthatók módszerével): Szorozzuk be az (1) egyenletet a_{21} - gyel, és a (2) egyenletet a_{11} - gyel. Ez után vonjuk ki a (új) (2) egyenletet az (új) (1) - ből, így kapjuk a (4) egyenletet.

$$\begin{array}{rll} & (1)\cdot a_{21} & a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 + a_{13}a_{21}x_3 = b_1a_{21} \\ - & (2)\cdot a_{11} & a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 = b_2a_{11} \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})x_3 = b_1a_{21} - b_2a_{11} \tag{4}$$

Ez után szoruzzuk be az eredeti (1) egyenletet a_31 - gyel, és az eredeti (3) egyenletet a_{11} - gyel. Az így kapott (1) egyenletből vonjuk ki az így kapott (3) egyenletet, és különbségük legyen az (5) egyenlet.

$$\begin{array}{rll} & (1)\cdot a_{31} & a_{11}a_{31}x_1 + a_{12}a_{31}x_2 + a_{13}a_{31}x_3 = b_1a_{31} \\ - & (3)\cdot a_{11} & a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 = b_3a_{11} \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})x_2 + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33})x_3 = b_1a_{31} - b_3a_{11} \tag{5}$$

Így a (4) és az (5) egy kétismeretlenes egyenleternszert alkot. Oldjuk meg ezt a 2 ismeretlenes egyenletrendszert! $x_2 = \frac{\text{Sz}}{N}$, ahol

$$\text{Sz} = \begin{vmatrix} b_1a_{21} - b_2a_{11} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ b_1a_{31} - b_3a_{11} & a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= \underline{a_{13}a_{31}a_{21}b_1} - a_{13}a_{31}a_{11}b_2 - a_{11}a_{33}a_{21}b_1 + a_{11}a_{33}a_{11}b_2 \underline{- a_{13}a_{31}a_{21}b_1} +$$
$$a_{13}a_{21}a_{11}b_3 + a_{11}a_{23}a_{31}b_1 - a_{11}a_{23}a_{11}b_3 =$$
$$\text{és } N = \begin{vmatrix} a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$a_{12}a_{21}a_{13}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{12}a_{31} +$$
$$a_{11}a_{23}a_{12}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{11}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{11}a_{32} = a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

A zárójelben szereplő kifejezést a következőképpen jelöljük: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, így felismerhető, hogy

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Látható, hogy akkor van 0 vagy esetleg végtelen sok megoldás, ha a nevező 0. Ha a számláló is 0, akkor végtelen sok, ha nem 0, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

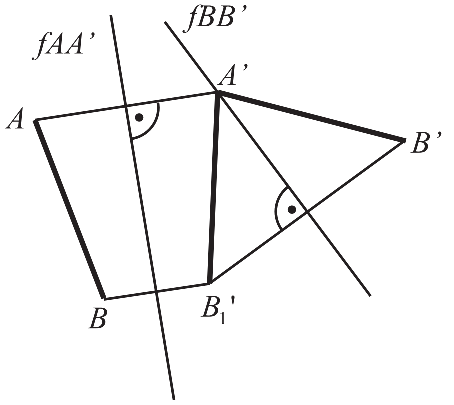
Geometria

Transzformációk

Tetszőleges körüljárástartó egybevágóság felírható két tengelyes tükrözéssel

Az egybevágóság $\overline{AB}$ - t olyan $\overline{A'B'}$ - be viszi, ahol AB hossza és és A'B' hossza megegyezik.

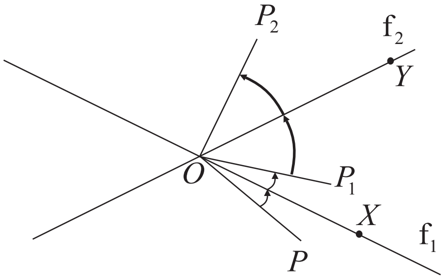
Vegyük fel az A és B pontokat a síkban, illetve az A' - t és a B' - t (az A és B pontok képét). 2 pont és a képe meghatározza a transzformációt.



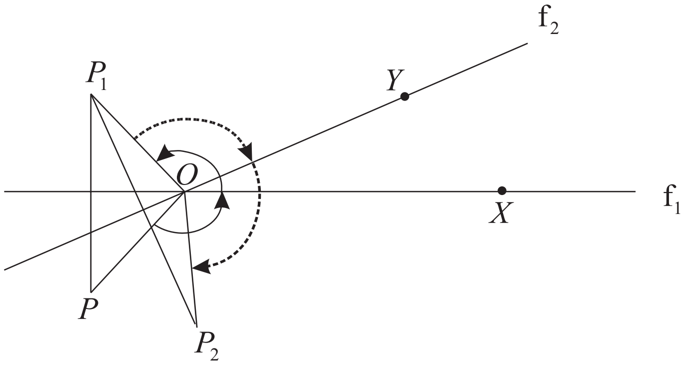
Az $f_{AA'}$ tengelyes tükrözés A - t A' - be és B -t B_1' - be viszi. Ha B_1' egybeesik B' - vel, akkor már nincs szükségünk több transzformációra. Ha nem, akkor egy olyan tengelyt kell találnunk, amely A' - t helyben hagyja, míg B_1' - t B' - be viszi. Ez a tengely csak a $B_1'B'$ felezőmerőlegese lehet, hiszen csak ez viszi B_1' - t B' - be. De valyon ez átmegy A' - n? Igen, mivel $AB = A'B_1' = A'B'$, és így az $A'B'B_1'$ háromszög egyenlőszárú, ezért a felezőmerőleges átmegy A' - n.

Nézzük meg, hogy egy tetszőleges C pontból is ugyanaz csinálja - e a 2 tükrözés, mint az eredeti transzformáció? $\forall C$ - re igaz, hogy $AC = A'C'$, és $BC = B'C'$, hiszen a tükrözés távolságtartó. A tükrözés körüljárásváltó, így 2 tükrözés nem. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágók, hiszen oldalaik megegyeznek. Azonban C' így is 2 helyen lehetne, a körüljárásnak megfelelően. De a mi transzformációnk és az eredeti traszformáció sem változtatja meg a körüljárást, tehát a megfelelő C' pontot kapjuk.

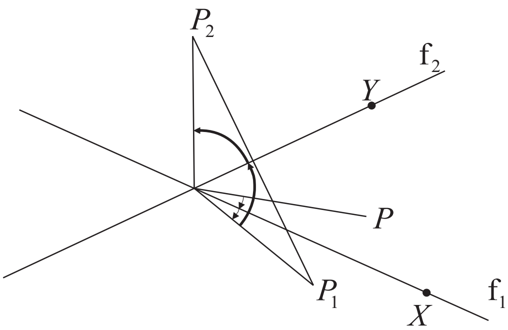
Ha a 2 tengely (f_1, f_2) az O pontban metszik egymást, akkor $POP_2\measuredangle = 2 \cdot \alpha$, ahol α az f_1 és f_2 tengelyek által bezárt (írányított) szög.



Legyen az eredeti pont a P, ennek f_1 tengelyre tükrözött tükörképe P_1. A P_1 f_2 - re vett tükörképe P_2. Ekkor $POX\measuredangle = XOP_1\measuredangle$, a tükrözés miatt, továbbá $P_1OY\measuredangle = P_2OY\measuredangle$, ismét a tükrözés szögtartósága miatt. Így viszont $POP_2\measuredangle = 2 \cdot POX\measuredangle + 2 \cdot YOP_2\measuredangle = 2(POX\measuredangle + YOP_2\measuredangle) = 2 \cdot YOX\measuredangle = 2\alpha$.



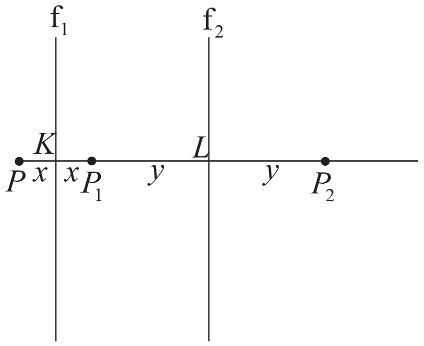
$POX\measuredangle = XOP_1\measuredangle$, és $P_1OY\measuredangle = YOP_2\measuredangle$, a tükrözés szögtartósága miatt. Ekkor $XOY\measuredangle = \alpha = XOP_1\measuredangle - YOP_1\measuredangle$. Viszont az is igaz, hogy $POP_2\measuredangle = POX\measuredangle - P_2OY\measuredangle + XOY\measuredangle = \alpha + \alpha = 2\alpha$, tehát $POP_2\measuredangle$ ebben az esetben is 2 - szerese az $XOY\measuredangle$ - nek.



$POX\measuredangle = XOP_1\measuredangle$ és $P_1OX\measuredangle = YOP_2\measuredangle$, a tükrözés szögtartósága miatt. Az $XOY\measuredangle = \alpha = P_1OY\measuredangle - XOP_1\measuredangle$. Így viszont a $POP_2\measuredangle = P_1OP_2\measuredangle - P_1OP\measuredangle = 2 \cdot P_1OY\measuredangle - 2 \cdot P_1OX\measuredangle = 2(P_1OY\measuredangle - P_1OX\measuredangle) = 2\alpha$.

Minden lehetséges esetet végignéztünk, így 2 metsző tengelyre történő tükrözés megegyezik a metszéspontjuk körüli, $f_1 \to f_2$ körüljárású, 2α szögű forgatással, ahol α a 2 tengely szöge.

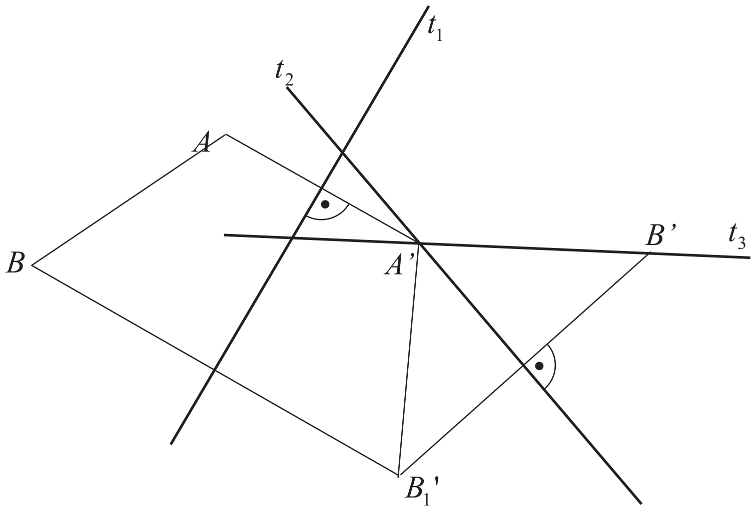
Ha párhuzamos a 2 tengely, akkor a transzformáció egyetlen $f_1 \to f_2$ irányú, $2 \cdot \overline{f_1 f_2}$ nagyságú eltolással is megkapható.



Az f_1 P - t a P_1 - be viszi, így P és P_1 is egyenlő távolságra van f_1 - től. Ugyanígy P_1 és P_2 ugyan olyan távol van f_2 - től. Így viszont $PP_2 = 2x + 2y = 2(x + y) = 2LK = 2 \cdot \overline{f_1 f_2}$, és épp ezt akartuk bizonyítani. Abban az esetben, ha az ábra nem pont így néz ki, is hasonlóan elvégezhető a bizonyítás.

A körüljárásváltó egybevágósági transzformációk felírhatók 3 tengelyes tükrözés szorzataként

Egy egybevágósági transzformációt egyértelműen meghatároz 2 pont és a képe, valamint a körüljárás iránya.



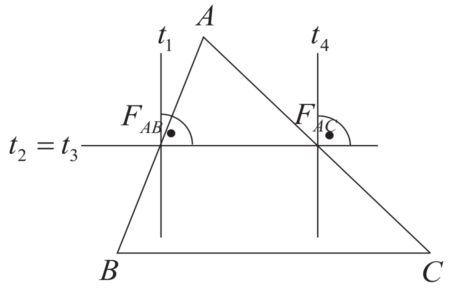
Tükrözzünk először az AA' felezőmerőlegesére, legyen ez a t_1. Ez vigye B - t a B_1' - be. Ez után tükrözzünk a $B_1'B$ felezőmerőlegesére. Ez A' - t helyben hagyja, lévén hogy áthalad rajta, mivel $AB = A'B_1' = A'B'$, és így a $B_1'B'A'$ háromszög egyenlőszárú. A harmadik tükrözésre már csak a körüljárásváltóság miatt van szükség, ennek a tengelye természetesen az $A'B'$ egyenese.

A sík egybevágósági transzformációi a sík minden pontját transzformálják, ahol a P pont képe a P' pont. Egybevágósági transzformációról beszélünk, ha egy transzformáció távolságtartó, vagyis

$PQ = P'Q'$. Annak is teljesülnie kell, hogy különböző pontok képe különböző pont lesz, és minden pont előáll képként.

Középvonaltétel

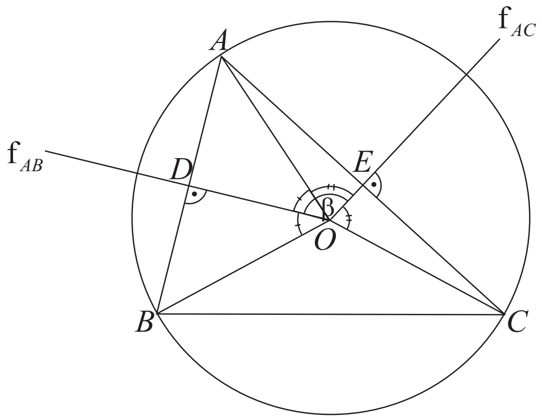
Állítás: Az $ABC_\triangle$ a oldalhoz tartozó középvonala párhuzamos a - val és feleakkora, mint a. Ugyan ez igaz a b és c oldalakhoz tartozó középvonalakra is.



Bizonyítás: Tükrözzük a B - t az F_{AB} - re, ekkor az A - t kapjuk. Ha ez után az A - t az F_{AC} - re tükrözzük, akkor a C - t kapjuk. Tehát a B - t az F_{AB} - re, majd a kapott pontot az F_{AC} - re tükrözve kapjuk a C - t. Csakhogy egy középpontos tükrözés (tulajdonképpen egy 180°-os forgatás) felírható 2 egymásra merőleges, egymást a középpontban metsző tengelyre való tükrözéssel. Az első (F_{AB} - re történő) tükrözést a t_1 és t_2 tengelyekre való tükrözéssel írjuk fel (a t_1 tengely az $F_{AB}F_{AC}$ - re F_{AB} - ben állított merőleges, a t_2 tengely pedig maga az $F_{AB}F_{AC}$ egyenes. Az F_{AC} - re tükrözést pedig a t_3 - ra és t_4 - re vett tükrözéssel helyettesítjük (t_3 az $F_{AB}F_{AC}$ egyenese, t_4 pedig az $F_{AB}F_{AC}$ - re F_{AC} - ben állított merőleges). Így a $t_1t_2t_3t_4$ transzformáció B - t a C - be viszi. Csakhogy t_2 és t_3 megegyezik, így a t_1t_4 transzformáció ugyanezt csinálja. t_1 és t_4 párhuzamosak, így ez a transzformáció megegyezik egy t_1 - re merőleges, $t_1 \to t_4$ irányba történő, $2 \cdot F_{AB}F_{AC}$ nagyságú transzformációval ($F_{AB}F_{AC}$ merőleges t_1 - re és t_4 - re is, így hossza megegyezik a 2 párhuzamos távolságával). Tehát $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{F_{AB}F_{AC}}$, és épp ezt akartuk belátni.

Kerületi és középponti szögek tétele

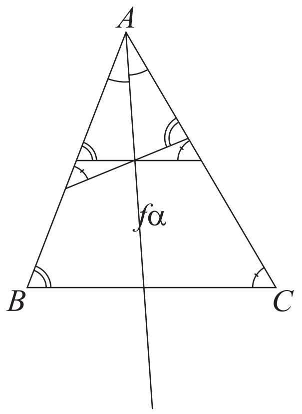
Állítás: Az $ABC_\triangle$ kerületi szöge feleakkora, mint a középponti szöge.
Bizonyítás:



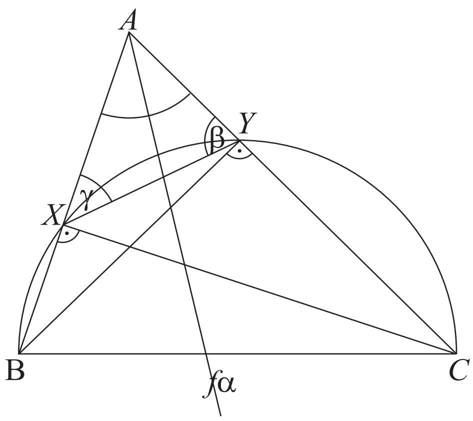
f_AB az AB felezőmerőlegese, f_AC az AC felezőmerőlegese. $f_AB\colon B \to A$, $f_AC\colon A \to C$, így $f_ABf_AC\colon B \to C$. A tükrözések miatt $BOD\measuredangle = AOD\measuredangle$ és $AOE\measuredangle = COE\measuredangle$. Az $ADOE$ négyszög 2 szöge 90° - os, így $\alpha + \beta = 180°$, tehát $\beta = 180° - \alpha$. Így viszont a $BOC\measuredangle$ - et 360° - ra kiegészítő szög $2\beta = 2(180° - \alpha) = 360° - 2\alpha$, ezért $BOC\measuredangle = 2\alpha$.

Antiparalell

Antiparallelnek nevezzük azt a szakaszt, amelyet adott $ABC_\triangle$ szögfelezőjére tükrözve párhuzamost kapunk a megfelelő alappal.



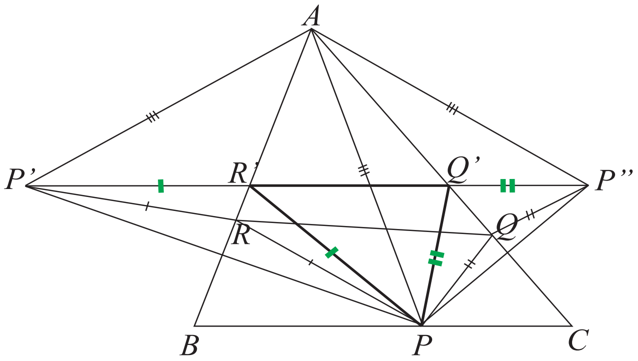
Tehát BC - vel azok a szakaszok antiparalellek, amelyeket az f_α - ra tükrözve párhuzamost kapunk BC - vel. Így viszont az ábrán láthatóan az antiparallel és a BC húrnégyszöget határoz meg.



Az $ABC_\triangle$ - ben X és Y az B - ból illetve a C - ből húzott magasságvonalak talppontjai, f_α az $BAC\measuredangle$ szögfelezője. Az $BXC\measuredangle$ és az $BYC\measuredangle$ 90° - os, így B, X, Y és C rajta van az BC szakasz Thálész - körén. Ezért a $BCYX$ négyszög húrnégyszög, így $AXY\measuredangle = 180° - (180° - \gamma) = \gamma$ és az $AYX\measuredangle = 180° - (180° - \beta) = \beta$. Így viszont a szögfelezőre tükrözve XY - t BC - vel párhuzamos szakaszt kapunk, ezért antiparalellek.

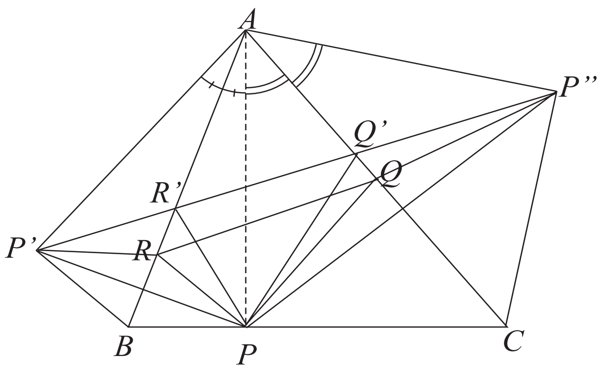
Fagnano feladat

Feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögben keressük meg a legkisebb kerületű belé írható háromszöget (olyan háromszöget, amelynek csúcsai az ABC háromszög oldalain helyezkednek el), és bizonyítsuk be, hogy csak 1 ilyen háromszög van.
Megoldás:



Vegyünk egy a háromszögbe írt háromszöget, a PQR - t. Tegyük fel, hogy ennek a legkisebb a kerülete. P' - t úgy kapjuk, hogy P - t tükrözzük AB - re, P'' - t pedig úgy, hogy P - t AC - re tükrözzük. A tükrözések miatt $P'R = RP$ és $PQ = QP''$. Ugyan így, a tükrözések miatt $P'R' = R'P$ és $P'Q' = Q'P''$, továbbá $P'A = AP = AP''$. Így viszont $k_{PR'Q'} = P'P''$ és $k_{PQR} = P'R + RP''$. Ez pedig azt jelenti, hogy $k_{PR'Q'} > k_{PQR}$, hiszen $P'R + RP'' > P'P''$, a háromszög - egyenlőtlenség miatt.

Most pedig nézzük a szögeket! $AP' = AP = AP''$, így a tükrözés miatt $P'AB\measuredangle = BAP\measuredangle$ és $PAC\measuredangle = CAP''\measuredangle$. Így viszont $P'AP''\measuredangle = 2 \cdot BAC\measuredangle = 2\alpha$. Tehát a $P'AP''\measuredangle$ állandó, nem függ P - től. A $P'AP''_{\triangle}$ minden P esetén hasonló lesz, hiszen egyenlőszárú is. Így a $P'P'' = k_P R'Q'$ akkor lesz minimális, ha $P'A$ minimális, vagyis ha PA minimális. Ez pedig akkor minimális, ha P az A - ból induló magasság talppontja.



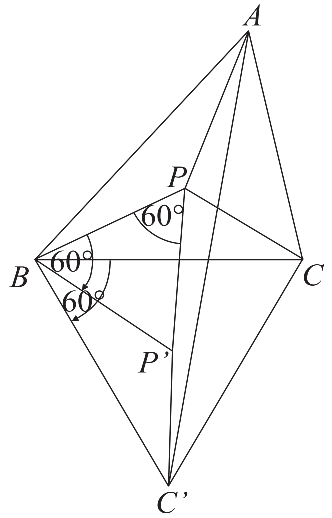
oldalhoz tartozó magasság talppontja lesz. Így a talpponti háromszög a keresett háromszög.

Izogonális pont

Izogonális pontnak nevezzük azt a pontot, amely $ABC_\triangle$ - ben van és a csúcsoktól mért távolságainak összege minimális.

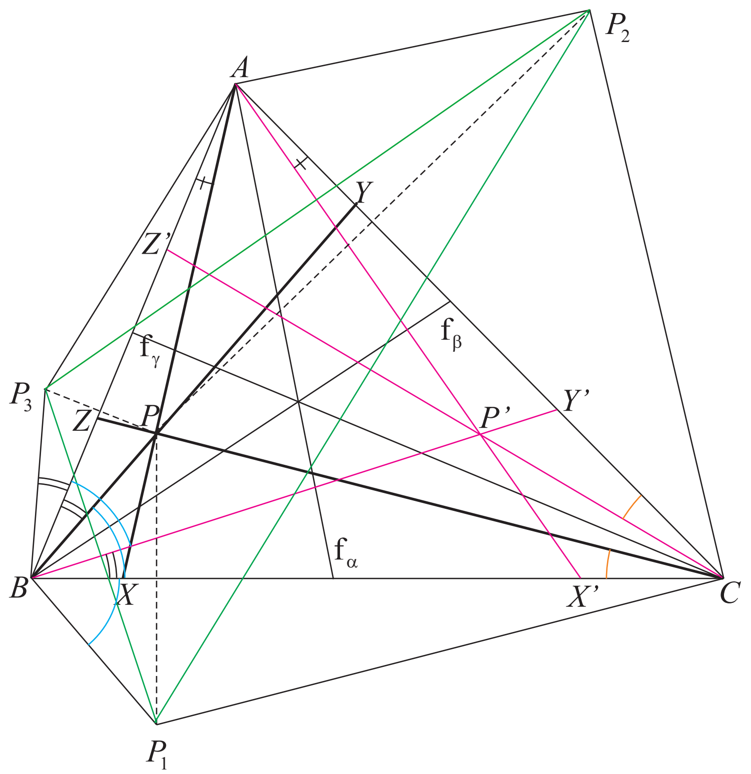
Állítás: Az izogonális pont az a pont, ahonnan minden csúcs $120°$ - ban látszik.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $AP + BP + CP$ minimális. Forgassuk el P - t és C - t $60°$ - kal B körül. BPP' szabályos háromszög, így $BP = BP' = PP'$. Az egyenlőség miatt az AP, PP' és $P'C'$ szakaszok által alkotott töröttvonal pontosan a P pont csúcsoktól mért távolsága. Mivel A és C' állandó, ezért e töröttvonal hossza akkor minimális, ha A, P, P' és C' egy egyenesbe esik. Így $BPA\measuredangle = 120°$, és a forgatás miatt $BP'C'\measuredangle = BPC\measuredangle = 120°$,így az $APC\measuredangle$ is $120°$ - os.



Megjegyzés: Ez a bizonyítás csak akkor igaz, ha a háromszög minden szöge kisebb $120°$ - nál. Ha olyan tompaszögű háromszöget vizsgálunk, aminek ennél nagyobb a tompaszöge, akkor a keresett pont a tompaszögű csúcs.

Az $ABC_\triangle$ - beli transzverzáns egyeneseket a megfelelő szögfelezőkre tükrözve is transzverzánsokat kapunk



Az $ABC_\triangle$ - ben P pont a csúcsokból kiinduló félegyenesek (AX, BY és CZ) egyetlen metszéspontja.

AX - et tükrözzük f_α - ra: X képe X' BY - t tükrözzük f_β - ra: Y képe Y' CZ - t tükrözzük f_γ - ra: Z képe Z' Ekkor

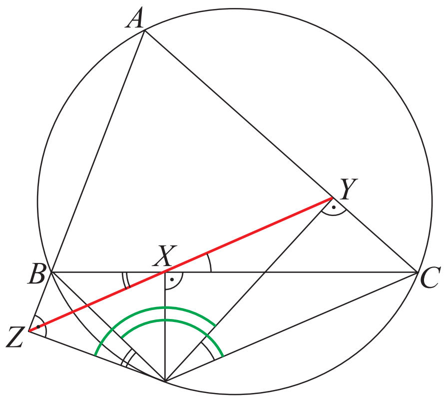
$$\left.\begin{array}{r} BAX\measuredangle = X'AC\measuredangle \\ ABX\measuredangle = Y'BC\measuredangle \\ ZCB\measuredangle = Z'CA\measuredangle \end{array}\right\} \text{a tükrözések miatt}$$

A P_1, P_2 és P_3 pontokat úgy kapjuk meg, hogy a P pontot tükrözzük a háromszög egyes oldalaira. Ekkor $CBP_1\measuredangle = PBC\measuredangle$ a tükrözés miatt és $CBP_1\measuredangle = PBC\measuredangle = Y'BA\measuredangle$. $APY\measuredangle = Y'BC\measuredangle = P_3BA\measuredangle$ a tükrözés miatt. $P_3B = P_1B$ mert $P_3B = PB$ és $P_1B = PB$, így a $BP_1P_{3\triangle}$ egyenlőszárú és $P_3BP'\measuredangle = P'BP_1\measuredangle$. Tehát BY' szögfelező és magasságvonal egyben, vagyis BP' egyenese a P_1P_3 szakasz szakaszfelező - merőlegese.

Ugyanezek elmondhatók az AX' és CZ' szakaszokra is, a megfelelő háromszögekben. A $P_1P_2P_{3\triangle}$ oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, tehát P' is transzverzánsok metszéspontja.

A Simsom - egyenes

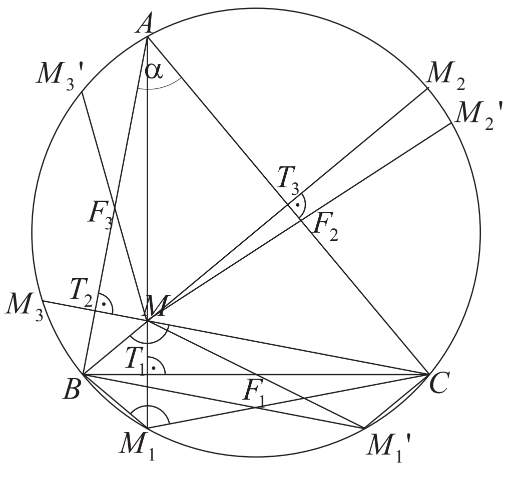
Bizonyítás: Az $ABC_\triangle$ körülírt körének tetszőleges P pontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak ($P \neq A, B, C$)



Az ábrán kialakul 4 húrnégyszög: $BXPZ$, $PXYC$, $AZPY$, és $ABPC$. Az X, Y és Z pontok pontosan akkor esnek egy egyenesbe, ha $BXZ\measuredangle = YXC\measuredangle$. A húrnégyszögek tulajdonságai alapján felírhatjuk néhány szög egyenlőségét: $BXZ\measuredangle = BPZ\measuredangle$ (a $BXPZ$ húrnégyszögben), $YXC\measuredangle = YPC\measuredangle$ (a $PXYC$ húrnégyszögben). $AZPY$ húrnégyszög, így $ZPY\measuredangle = 180° - \alpha$, ugyanígy $ABPC$ húrnégyszög, ezért $BPC\measuredangle = 180° - \alpha$. $BPC\measuredangle = YPZ\measuredangle$, vagyis $BPZ\measuredangle = YPC\measuredangle$, és így $BXZ\measuredangle = YXC\measuredangle$, tehát X, Y és Z egy egyenesbe esik.

Ha a magasságpontot az $ABC_\triangle$ oldalaira, ill. oldalfelezőpontjaira tükrözzük, akkor a kapott pontok rajta lesznek a körülírt körön

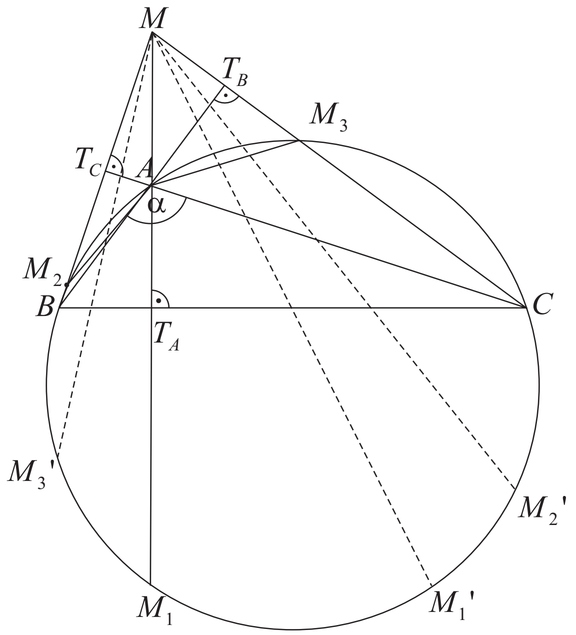
Bizonyítás: Először vizsgáljunk egy hegyesszögű háromszöget



Az AT_2MT_3 négyszög húrnégyszög, így $T_2MT_3\measuredangle = BMC\measuredangle = 180° - \alpha$. $BM_1C\measuredangle = BMC\measuredangle$, a tükrözés miatt, tehát $BM_1C\measuredangle = 180° - \alpha$. Így viszont az ABM_1C húrnégyszög, hiszen 2 szemközti szögének összege 180°. E húrnégyszög köré írt köre az ABC háromszög köré írt kör, így M_1 rajta van a körön. Ugyanez elmondható az M_2 illetve M_3 pontokra is. Még meg kell néznünk, hogy az oldalfelező pontokra tükrözve is ugyanerre az eredményre jutunk - e. Ekkor vizsgáljuk meg, hogy az M_1' pont rajta van - e a körön. Rajta van, mivel a $BM_1'CM$ négyszög paraleogramma (átlói felezik egymást), így $BM_1'C\measuredangle = BMC\measuredangle = 180° - \alpha$, ezért $ABM_1'C$ húrnégyszög.

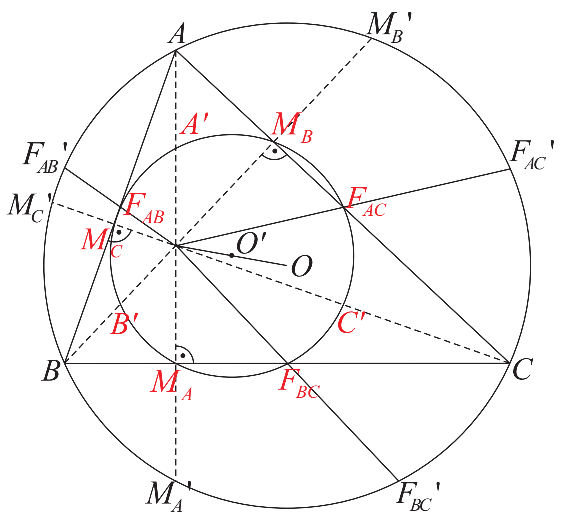
Most pedig nézzük meg egy tompaszögű háromszögre (derékszögűre triviális a bizonyítás):

Az $ABC_\triangle$ A csúcsában tompaszögű. $T_CAT_B\measuredangle = BAC\measuredangle = \alpha$ és az AT_BMT_C négyszög húrnégyszög, így $BMC\measuredangle = 180° - \alpha$. A tükrözés miatt így $T_CM_2C\measuredangle = BMC\measuredangle = 180° - \alpha$. Tehát $BM_2C\measuredangle = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Így viszont M_2 -ből α szögben látszik a BC, ezért rajta van a körön. Ugyan ez elmondható az M_3 -ra is. Most pedig nézzük azt az esetet, ha M - et a BC - re tükrüzzük. Ekkor a tükrözés miatt $BM_1C\measuredangle = BMC\measuredangle = 180° - \alpha$. Így viszont a $BACM_1$ négyszög húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege 180°.



A húrnégyszög köré írt kör megegyezik az ABC háromszög köré írt körével, így M_1 rajta van a körön. Most nézzük az oldalfelezőpontokra való tükrözés esetét. Először vizsgáljuk az M_1' pontot. Az $M_1'CMB$ négyszög paralelogramma, mivel átlói felezik egymást. Ezért szemközti szögei megegyeznek, így $BM_1'C\measuredangle = BMC\measuredangle = 180° - \alpha$. Az $ABM_1'C$ négyszög húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege 180°, így M_1' rajta van a körön. Most pedig vizsgáljuk az M_1' pontot. Az $MAM_2'C$ négyszög paralelogramma, így $AM_2'C\measuredangle = AMC\measuredangle = 180° - \alpha$.

A Feuerbach - kör



Állítás: A Feuerbach - körön (a 9 - pontos körön) a következő pontok vannak rajta:

1. az oldalfelezőpontok (F_{AB}, F_{AC}, F_{BC})
2. a magasságok talppontjai (M_A, M_B, M_C)
3. a csúcsokat a magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjai (A', B', C')

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a háromszög körülírt körén vannak a következő pontok:

1. a magasságpont tükrözve az oldalak felezőpontjaira ($F'_{AB}, M'_{AC}, F'_{BC}$)
2. a magasságpont tükrözve az oldalakra (M'_A, M'_B, M'_C)
3. a háromszög csúcsai

Kicsinyítsük M - ből felére a háromszög köré írt kört, ekkor a rajta lévő pontok is átmennek más pontokba:

1. $F'_{AB} \to F_{AB}, F'_{AC} \to F_{AC}, F'_{BC} \to F_{BC}$
2. $M'_A \to M_A, M'_B \to M_B, M'_C \to M_C$
3. $A \to A', B \to B', C \to C'$

Az eredeti kör középpontja (O) is átmegy egy más pontba, méghozzá az MO szakasz felezőpontjába, O' - be. Így a kapott 9 pont egy O' középpontú, $\frac{R}{2}$ sugarú körön lesznek, ez a Feuerbach - kör (R a háromszög köré írt kör sugara).
Megjegyzés: Van egy híres tétel a Feuerbach - körrel kapcsolatban: a Feuerbach - tétel. Ez azt mondja ki, hogy a Feuerbach - kör érinti a háromszög hozzáírt köreit.

Gráfelmélet

Ha egy feladatban minket csak az érdekel, hogy mely elemek között van kapcsolat, akkor azt egy gráffal szemléltethetjük.

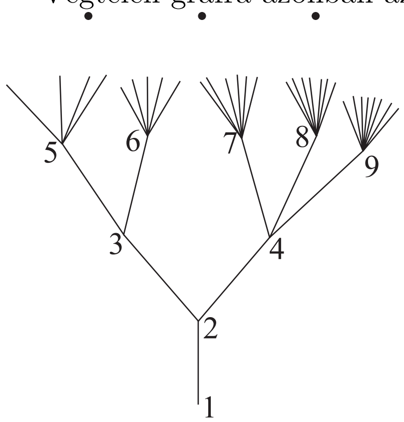
A gráf egy pontrendszer (ahol a pontok az elemek), és az élek jelentik az összeköttetést. Egy él mindig 2 pontot köt össze. Ha az él ugyanabba a pontba megy, ahonnan indul, akkor hurokélnek nevezzük, ha 2 pont között több él is van, az többszörös él. Egy pont fokszáma megmutatja, hogy hány él indul ki a pontból.

egyszerű gráf: olyan gráf, amelyben nincs hurokél vagy többszörös él.

1. Tétel. *n pontú egyszerű gráf pontjai között van 2, amelynek fokszáma megegyezik*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy nincs 2 olyan pont, amelynek megegyezik a fokszáma. Ekkor a lehetséges legnagyobb fokszám $n-1$, a legkisebb pedig 0. Összesen így n lehetséges fokszám van, tehát van olyan pont, amiből 0 él indul ki (semelyik másik pontba nem fut belőle él), és van olyan pont is, ahonnan $n-1$ él indul ki (minden másik pontba fut él). Ez a 2 együtt nem teljesülhet, hiszen e 2 pont között kéne élnek futnia, azonban nem futhat, hiszen az egyikből nem fut él sehova. Így a feltétel hamis.

Végtelen gráfra azonban az állítás nem igaz, egy ellenpélda:



Ebben a végtelen gráfban minden pont foka különböző és nincs benne többszörös él, vagy hurokél.

automorfizmus: egy olyan transzformáció, amely egy gráf pontjait felelteti meg ugyanennek a gráfnak a pontjainak. A transzformáció élt élbe, nem élt nem élbe visz. **séta:** egy olyan összefüggő élsorozat, amin keresztül eljuthatunk A - ból B - be (egy ponton többször is átmehetünk, az ilyen pontot csomópontnak hívjuk). **út:** egy olyan összefüggő élsorozat, amin keresztül eljuthatunk A - ból B - be úgy, hogy egyetlen ponton sem megyünk át 2 - szer.

2. Tétel. *n pontú összefüggő gráfban a leghosszabb út $n-1$ él hosszúságú lehet*

Minden útnak, így a leghosszabbnak is van kezdő és végpontja. E 2 pontból csak 1 - 1 út - él indulhat ki, míg az út többi pontjából 2 - 2 út - él indulhat ki. Igen ám, de egy út - élnek 2 végpontja van, így 2 út - pontból indul ki. Tehát k út - pont esetén legfeljebb $\frac{2+(k-2)2}{2} = k-1$ éle lehet az útnak, így, mivel hogy legfeljebb n útpont lehet, ezért a leghosszabb út legfeljebb $n-1$ él hosszú.

összefüggő gráf: olyan gráf, amelynek bármely pontjából bármely másikba el lehet jutni a gráf élei mentén

3. Tétel. *ha egy n pontú gráfban van egy olyan pont, amiből bármely más pontba el lehet jutni (élek mentén), akkor a gráf összefüggő*

Legyen ez a pont az X. Ekkor egy tetszőleges A pontból eljuthatunk egy tetszőleges B pontba úgy, hogy A - ból eljutunk X - be, majd X - ből B - be. Ez bármely 2 pontra működik, így bármely pontból el lehet jutni bármely másikba, ezért a gráf összefüggő.

4. Tétel. *ha egy n pontú gráfban az A pontból el lehet jutni a B pontba másik pontba sétával, akkor úttal is el lehet jutni*

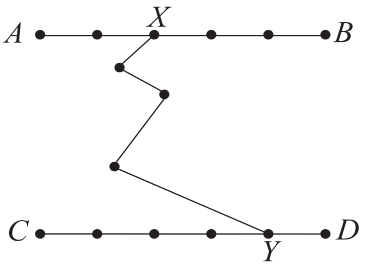
Ha a séta nem út, akkor van a gráfban olyan csúcs, amin 2 - szer is átmegy. Keressük meg a séta által érintett pontok sorában (kezdőpont, 1. pont, ..., végpont) az első olyan pontot, amin többször is átmegy a séta. Ekkor a séta azon részét, amely az ismétlődő pont első és utolsó előfordulása (a pontok sorában) között van, kihagyjuk. Ekkor egy új sétát kapunk (ami még mindig eljut A - ból $B - be$, amire ha felírjuk azt a sorrendet, amilyen sorrendben érinti a gráf pontjait, kevesebb pontot kapunk, mint ezelőtt. Ugyanezt a műveletet addig kell ismételnünk, amíg úthoz nem jutunk. Ez azért fog bekövetkezni, mivel a séta véges, és minden lépésben csökkentjük a pontok számát a ,pontok sorában', így egy idő után elfogynak a pontok, és egy 2 pontú séta út is egyben.

Ezekből a tételből következik az összefüggő gráf 4 ekvivalens definíciója:

1. Ha bármely 2 pont között van séta, akkor a gráf összefüggő.
2. Ha bármely 2 pont között van út, akkor a gráf összefüggő.
3. Ha egy pontból bárhova el lehet jutni sétával, akkor a gráf összefüggő.
4. Ha egy pontból bárhova el lehet jutni úttal, akkor a gráf összefüggő.

5. Tétel. *Összefüggő gráfban a leghosszabb utak metszik egymást*

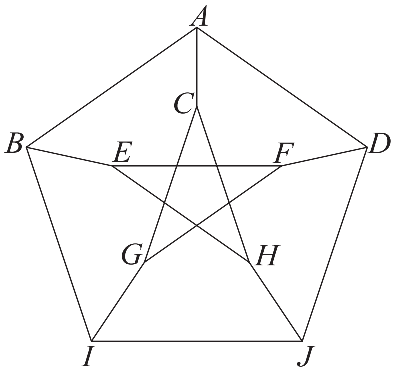
Tegyük fel, hogy AB és CD a leghosszabb utak, és nem metszik egymást.



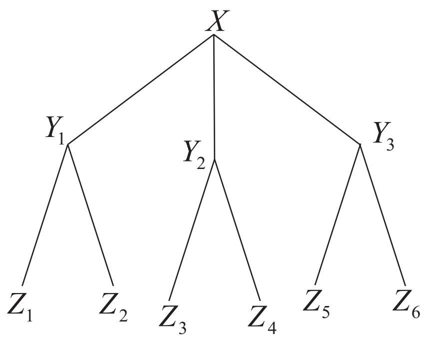
A gráf összefüggő, így el lehet jutni A - ból C - be. Legyen az AC első metszéspontja (közös pontja) CD - vel az Y, és az ez előtti utolsó metszéspontja AB - vel az X (ha nem metszette ezelőtt sehol, akkor ez a metszéspont az A). Ekkor az AC út X és Y közötti részének nincs közös pontja sem AB - vel, sem CD - vel. Most pedig bebizonyítom, hogy így kialakul egy olyan út, amely hosszabb a leghosszabb utaknál. Legyenek a leghosszabb utak n él hosszúak. Ekkor AX és BX közül valamelyik legalább $\frac{n}{2}$ él hosszú (n paritásától függően). Legyen ez a BX. Ugyan ez igaz a CY ill. DY utakra is, ezek közül a hosszabb legalább $\frac{n}{2}$ él hosszú. Legyen ez a DY. XY is legalább 1 él hosszú, így a $BXYD$ út legalább $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 = n + 1$ egység hosszú, vagyis hosszabb a leghosszabb utaknál. Ellentmondásra jutottunk, így a leghosszabb utak metszik egymást.

Megjegyzés: Ugyan így bebizonyíthatjuk, hogyha nincs 2 ugyan olyan hosszú leghosszabb út, hanem a 2 leghosszabb út n és k ($k < n$) hosszúságú, akkor ezek metszik egymást, mivel azonos jelölésekkel a $BXYD$ út legalább $\frac{n}{2} + \frac{k}{2} + 1$ él hosszú lesz, és ez nagyobb a második leghosszabb út hosszánál, k - nál, ami ellentmond annak, hogy nincs metszéspont.

A Petersen - gráf

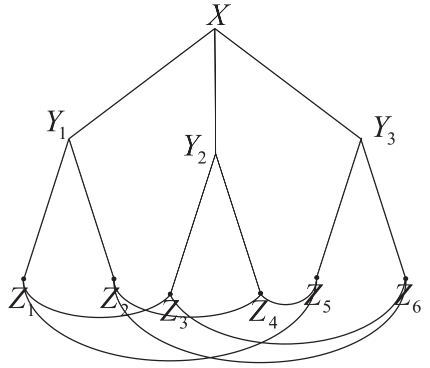


Állítás: A Petersen - gráf az egyetlen 10 pontú, 3 reguláris (minden pontjából 3 él indul ki), 2 átmérőjű (minden pontból minden pontba el lehet jutni az élek mentén legfeljebb 2 él hosszú sétával) gráf. **Bizonyítás:** Legyenek az X pont (tetszőleges) szomszédai Y_1, Y_2 és Y_3 (ezek X által meghatározottak). Maradt 6 pont. Ezek közül bármelyik elérhető X - ből 2 hosszú úttal. Y_1 - ből, Y_2 - ből és Y_3 - ból pontosan 2 él indul (1 már X - be fut belőlük).



$$\left.\begin{array}{l} y_1 \rightarrow z_1 \wedge z_2 \\ y_2 \rightarrow z_3 \wedge z_4 \\ y_3 \rightarrow z_5 \wedge z_6 \end{array}\right\} \text{már csak } z_i \text{ között mehet él} \Rightarrow$$

nincs X - et tartalmazó háromszög vagy négyszög, de, mivel X tetszőleges, ezért az egész gráfban nincs háromszög vagy négyszög. Most pedig nézzük meg, hogy hogyan köthetjük össze a Z_i pontokat. Z_1Z_2, Z_3Z_4 és Z_5Z_6 nem él, mert ekkor háromszög alakulna ki. Z_1 - ből nem mehet él egyszerre Z_3 - ba és Z_4 - be, illetve Z_5 - be és Z_6 - ba, hiszen ekkor háromszög alakulna ki. De a pár egyik elemébe kell élnek futnia, hiszen Z_1 - ből és Z_2 - ből is 2 él fut Z_i - be. Fusson Z_1 - ből Z_3 - ba és Z_5 - be él. Ekkor Z_2 - ből nem futhat él sem Z_3 - ba, sem Z_5 - be, hiszen ekkor egy négyszög alakulna ki. Tehát Z_2 - ből Z_4 - be és Z_6 - ba fut él. Ekkor Z_1 - ből és Z_2 - ből már 2 - 2 él indul ki, meg kell vizsgálnunk a többi Z pontot. Z_3 - ból nem mehet él Z_5 - be, hiszen ekkor a $Z_1Z_3Z_5$ háromszög alakulna ki. Így Z_3 - ból Z_6 - ba fut él, és Z_4 - ből Z_5 - be. Ebben a gráfban nincs sem háromszög, sem négyszög. Ez az egyetlen gráf, a számozás tetszőleges.



A gráf tényleg 3 reguláris és 10 pontú. De valyon 2 átmérőjű? Igen, egy táblázatban összefoglalom ezt.

$X \to Y_1 \begin{matrix}\nearrow Z_1 \\ \searrow Z_2\end{matrix}, Y_2 \begin{matrix}\nearrow Z_3 \\ \searrow Z_4\end{matrix}, Y_3 \begin{matrix}\nearrow Z_5 \\ \searrow Z_6\end{matrix}$
$Y_1 \to X \begin{matrix}\nearrow Y_2 \\ \searrow Y_3\end{matrix}, Z_1 \begin{matrix}\nearrow Z_3 \\ \searrow Z_5\end{matrix}, Z_2 \begin{matrix}\nearrow Z_4 \\ \searrow Z_6\end{matrix}$
$Y_2 \to X \begin{matrix}\nearrow Y_1 \\ \searrow Y_3\end{matrix}, Z_3 \begin{matrix}\nearrow Z_1 \\ \searrow Z_6\end{matrix}, Z_4 \begin{matrix}\nearrow Z_2 \\ \searrow Z_5\end{matrix}$
$Y_3 \to X \begin{matrix}\nearrow Y_1 \\ \searrow Y_2\end{matrix}, Z_5 \begin{matrix}\nearrow Z_1 \\ \searrow Z_4\end{matrix}, Z_6 \begin{matrix}\nearrow Z_2 \\ \searrow Z_3\end{matrix}$

Látható, hogy X - ből, illetve Y_i - ből el lehet jutni 2 élen át a gráf bármely pontjába. Már csak a Z_i - k maradtak. Az eljutás oda - vissza igaz, így ezekből már biztosan el lehet jutni 2 él mentén X - be és Y_i - be. Tehát már csak a Z_i - k közötti eljutást kell bizonyítanunk. Ezt úgy bizonyítom be, hogy ‚láncokra' fűzöm a pontokat.

$$\begin{gathered}
Z_1 \to Z_3 \to Z_6, Z_1 \to Z_5 \to Z_4, Z_1 \to Y_1 \to Z_2 \\
Z_2 \to Z_4 \to Z_5, Z_2 \to Z_6 \to Z_3, Z_2 \to Y_1 \to Z_1 \\
Z_3 \to Z_1 \to Z_5, Z_3 \to Z_6 \to Z_2, Z_3 \to Y_2 \to Z_4 \\
Z_4 \to Z_2 \to Z_6, Z_4 \to Z_5 \to Z_1, Z_4 \to Y_2 \to Z_3 \\
Z_5 \to Z_1 \to Z_3, Z_5 \to Z_4 \to Z_2, Z_5 \to Y_3 \to Z_6 \\
Z_6 \to Z_2 \to Z_4, Z_6 \to Z_3 \to Z_1, Z_6 \to Y_3 \to Z_5
\end{gathered}$$

Ezzel bebizonyítottuk a Petersen - gráf tulajdonságait.

n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van (A algoritmus).

Tegyük fel, hogy az x_1, x_2, x_3, …, x_k pontok között van $k-1$ él. Ekkor ha $n = k$, akkor igaz az állítás. Ha $k < n$, akkor a gráfot 2 részre bontjuk: az x_1, x_2, …, x_k pontok (1. rész), és a többi pont (2.rész) . A 2 csoport között futnia kell élnek, különben nem lenne összefüggő a gráf. Válasszunk ki egy ilyen ‘összekötő' élet. Azt a pontot a 2. részből, amelybe fut ez az él, nevezzük

x_{k+1} - nek, és vegyük be az 1. részbe. Ekkor az 1. részre teljesül a feltétel, így a bizonyítást befejezhetjük teljes indukcióval, mindig hozzávéve 1 pontot az 1. részhez.

n pontú 2 reguláris összefüggő egyszerű gráf kör

Vegyünk fel egy pontot, legyen ez az x. x - ből 2 él indul ki, fussanak ezek az Y_1 és Y_2 pontokba. Az Y_1 és Y_2 pontokból 1 - 1 él indul ki, a Z_1 és Z_3 pontokba, vagy létrejön az Y_1Y_2 él, és így egy kör keletkezik, vagy mindkét pontból egy közös, K pontba vezet az él, és egy kör keletkezik. Ha létrejön egy kör, akkor nem tudunk új pontot hozzáadni a gráfhoz, hiszen ekkor nem maradna összefüggő. Ha mem jön létre kör, akkor mindig 2 új pontot kapcsolunk az eddigi utolsó 2 ponthoz. A gráf véges, így egy idő után véget kell érnie, és ez csak úgy lehet, ha kör.

A fa definíciója

Adott egy n pontú gráf.

1. $n - 1$ éle van
2. összefüggő
3. körmentes

E három tulajdonság közül bármelyik kettőből következik a harmadik.

I. 1, 2 $\Rightarrow$ 3 Tegyük fel, hogy van a gráfban egy k él hosszú kör. Ennek k éle van. Ezt bővíthetjük az A algoritmus szerint a többi ponttal, minden ponthoz kell egy új él, így legalább $k + (n - k) = n$ éle van a gráfnak. Tudjuk, hogy $n - 1$ éle van, így ellentmondásra jutottunk, és az állítás igaz.

II. 2, 3 $\Rightarrow$ 1 Ha a gráf összefüggő, akkor legalább $n-1$ éle van. Tegyük fel, hogy van egy olyan összefüggő és körmentes gráfunk, amelynek legalább n éle van. Egy összefüggő gráf akkor körmentes, ha minden pontból minden más pontba csak 1 féleképpen lehet eljutni. Ha egy pontból egy másikba 2 - féleképpen is el lehet jutni, akkor kialakul egy kör. Minden gráfból ki lehet választani egy $n - 1$ élű részgráfot úgy, hogy továbbra is összefüggő maradjon, az A algoritmus szerint. Ez a gráf körmentes, hiszen ha az A algoritmust egy ponttal kezdjük, akkor eredetileg nincs kör, és egy - egy új él behúzásával sem keletkezhet, hiszen ez nem zárhatja be a kört. Tehát ebben a részgráfban bármely pontból bárhova csak 1 - féleképpen lehet eljutni. Azonban a gráf nem csak ebből az $n - 1$ élű részgráfból áll, hanem van más éle is. Ha behúzunk egy új élet a részgráfban, akkor kialakul egy kör, hiszen az él 2 végpontjából nem csak 1 - féleképpen lehet eljutni egymásba. Így ha egy n pontú gráf körmentes és összefüggő, akkor $n - 1$ éle van.

III. 1, 3 $\Rightarrow$ 2 Tegyük fel, hogy nem összefüggő a gráf, hanem k db komponensre esik szét. A komponensek összefüggők, és körmentesek, így a II. miatt eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk.

Legyen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a komponensek csúcsainak száma, ekkor tudjuk, hogy $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Eggyel kevesebb élük van, mint csúcsuk, így $n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n - k$ éle van az egész gráfnak. Tudjuk, hogy a gráfnak $n-1$ éle van, így $n - k = n - 1$, vagyis $k = 1$, és így a gráf összefüggő. Ellentmondásra jutottunk, így a bizonyítandó állítás igaz.

független pontok halmaza: Azon pontok halmaza, amelyek által meg- határozott gráf üres, azaz nem fut köztük él (a halmazon kívüli pontokba futhat él e pontokból).

páros gráf: olyan gráf, amelyben a pontok 2 halmazra bonthatók úgy, hogy minden él a 2 halmaz között megy (a halmazokon belül nem futnak élek). Másképpen fogalmazva: a gráf pontjai kiszínezhetők 2 színnel úgy, hogy azonos színű pontok között nem fut él. Egy páros (élszámú) kör mindig páros gráf is, egy páratlan (élszámú) kör azonban sosem lehet páros gráf.

Adott gráfban favázat kereső algoritmusok

Szélességi keresés

1. Megadjuk az összes pont szomszédsági listáját. Kiválasztunk egy szabad (eddig nem szereplő) pontot a gráfból és a szomszédsági lista alapján behúzzuk az összes élet, ami kifut belőle. Így ezzel a pontunkkal (X - szel) már nem kell foglalkoznunk. Azok a pontok, amik bekerültek a gráfba, de eddig még nem vizsgáltuk őket (vagyis egy vizsgált pont szomszédai), a -1 - es számot kapják.

2. Kiválasztjuk a legrégebbi -1 - est és ez lesz most X. Bevesszük a gráfba X összes szomszédját, ami eddig nem szerepelt a gráfban és ezek a -1 - es sorszámot kapják. Ezután visszaugrunk a 2 - es lépés elejére. Ha nincs több -1 - es, azt azt jelenti, hogy nincs több szomszédja semely eddig vizsgált pontnak, azaz pefejeződik a keresés, hiszen a komponens végére értünk. Ekkor visszaugrunk az 1 - es lépésre, és úgy komponenst vizsgálunk. Ha pedig már nincs több komponens, akkor befejeződik a keresés.

A szélességi keresés néhány tulajdonsága:

- minden 1 - 2 - 1 ciklus fát talál.
- a komponens minden pontját sorra veszi, mert a vizsgált pontok minden szomszédját is megvizsgáltuk.
- az algoritmus a gráf összes pontját megvizsgálja
- a keresés ugyanannyi komponensből álló feszítőerdőt talál, mint ahány komponensből áll a gráf
- a gráf minden éle (nem csak az erdő minden éle) vagy azonos szinten lévő pontok között, vagy egymás utáni szinteken lévő pontok között fut.
- teljes gráfban ez a keresés egy csillagot talál

Mélységi keresés

1. Kiválasztunk egy tetszőleges pontot a gráfban, ez lesz X. X szabad pont, nem szerepelt még a fában (erdőben), X mostmár vizsgált (vagyis nem szabad) pont.
2. A szomszédsági listájából kiválasztunk egy szabad pontot. Ha van ilyen, akkor ez az új X. X mostmár vizsgált, és kezdjük elölről a 2. lépést.

   Ha nincs, akkor visszamegyünk a pont őséhez, és kezdjük a 2. lépést elölről. Ha nincs őse, akkor a komponens favázát már megtaláltuk, és visszamegyünk az 1. lépés elejére.

A mélységi keresés tulajdonságai:

- minden 1 - 2 - 1 ciklus fát talál
- a komponens minden pontját sorra veszi a keresés, mert a vizsgált pontok szomszédait is vizsgáltuk.
- az algoritmus a gráf összes pontját megvizsgálja, így minden ponton végigmegy.
- a keresés ugyanannyi komponensből álló feszítőerdőt talál mint ahány komponense van a gráfnak.
- a gráf minden éle (nemcsak az erdő élei) előd és utód között megy
- a keresés teljes gráfban Hamilton - kört talál.

Az adatokat verem struktúrában tárolhatjuk.

Hasonlóság

Két alakzat egybevágó, ha egy egybevágósági transzformációval az egyik átvihető a másikba (ha az egyik átvihető a másikba és a másik is átvihető az egyikbe). Az egybevágósági transzformáció olyan transzformáció, ami távolságtartó ($\Rightarrow$ egy - egy értelmű, szakasz - tartó, szögtartó, egyenestartó).

Háromszög egybevágóságának alapesetei

1. a megfelelő oldalak hossza megegyezik
2. két megfelelő oldal hossza és a közbezárt szög megegyezik
3. egy oldal hossza és a rajta fekvő 2 szög megyegyezik.
4. két megfelelő oldal hossza és a nagyobbikkal szemközti szög megegyezik

Megjegyzés: Ha egy oldal, és bármely 2 szög (amelyek a 2 háromszögben az oldalhoz képest ugyan úgy helyezkednek el) megegyezik, akkor a 2 háromszög egybevágó (az Euklidészi geometriában).

Ha az A alakzat átvihető a B alakzatba egybevágósági transzformációval, akkor a B is átvihető az A - ba egybevágósági transzformációval, hiszen az egybevágósági transzformáció felírható tükrözések szorzataként, és ha fordított sorrendben írjuk fel a tükrözéseket, akkor B - ből A - t kapjuk.

A hasonlóság definíciója:

A T alakzat akkor hasonló a T' alakzathoz, ha T átvihető T' - be egy egybevágósági transzformációval és egy középpontos hasonlósággal (ha T hasonló T' - höz, akkor T' is hasonló T - hez).

Egy középpontos hasonlóságot 2 adattal jellemezhetjük: az O középponttal és az $\lambda \neq 0$ valós számmal. Minden P ponthoz hozzárendeljük azt a P' pontot, amelyre igaz, hogy $\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = \lambda$, vagyis $\overrightarrow{OP}\lambda = \overrightarrow{OP'}$ (P képe mindenképpen rajta van az OP egyenesen.

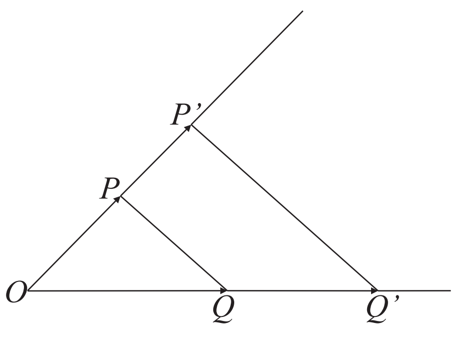
A transzformáció fix pontja $\lambda = 1$ esenén minden P pont (és az O pont), különben csak az O pont. A transzformáció fix egyenese $\lambda = 1$ esetén minden egyenes, különben az O - n átmenő egyenesek.

A hasonlóság alaptétele:

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{\alpha} + \lambda\underline{\beta} \qquad (*)$$

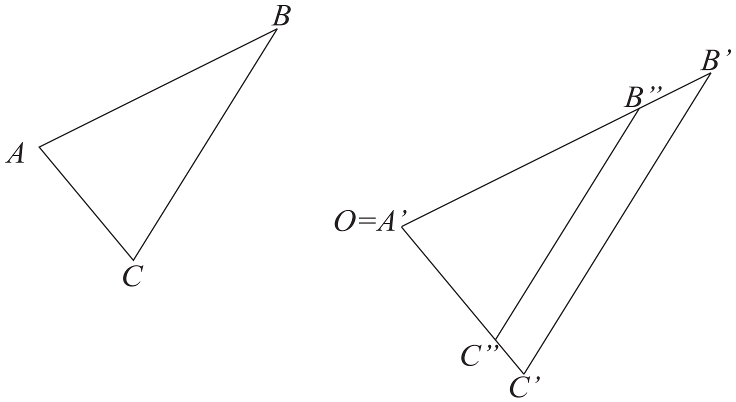
Ez (lényegében) a párhuzamos szelők tétele.

$$\lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$$
$$\lambda(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})) = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \lambda\overrightarrow{OQ'} - \lambda\overrightarrow{OP}$$
$$PQ||P'Q'$$



Háromszög hasonlóságának alapesetei

1. Ha a megfelelő oldalak hosszának aránya megegyezik $\iff$ a két háromszög hasonló. Ha az $ABC_\triangle$ - ből egy $A'B'C'_\triangle$ - et egy egybevágósági transzformációval és egy középpontos hasonlósággal kaptuk, akkor a két háromszög hasonló, mert az egybevágósági transzformáció megtartja az oldalak hosszát, a középpontos hasonlóság pedig az arányát.



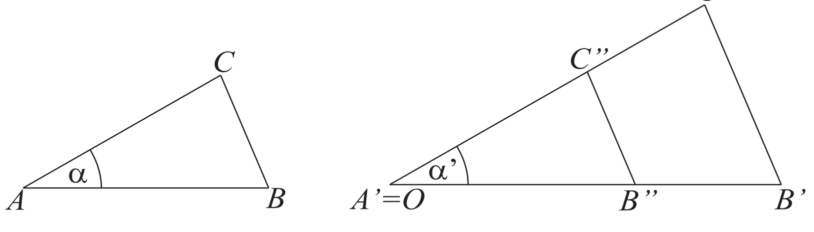
Állítás: Ha $A' = 0$ és $\lambda = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, akkor $ABC_\triangle \cong A''B''C''_\triangle$.
Az A', λ hasonlóság a következőt csinálja:

$$\begin{gathered} A' \to A', B' \to B'', C' \to C'' \\ A'B'' = AB \\ A'C'' = AC \\ \lambda B'C' = B''C'' = BC \qquad (*) \end{gathered}$$

$\Rightarrow ABC_\triangle$ és $A'B''C''_\triangle$ tényleg egybevágó.

Az $ABC_\triangle$ átvihető az $A'B''C''_\triangle$ - be 2 vagy 3 tengelyes tükrözéssel (illetve $A'B''C''_\triangle$ átvihető $A'B'C'_\triangle$ - be egy $\dfrac{1}{\lambda}$ arányú A' középpontú középpontos hasonlósággal).

2. Ha két megfelelő oldal aránya és az általuk közbezárt szög megegyezik, akkor hasonló a 2 háromszög. Ha az $ABC_\triangle$ átvihető az $A'B'C'_\triangle$ - be egy egybevágósági transzformációval és egy középpontos hasonlósággal, akkor az állítás teljesül, mert mindkét transzformáció szögtartó, az egybevágóság távolságtartó a középpontos hasonlóság pedig aránytartó.



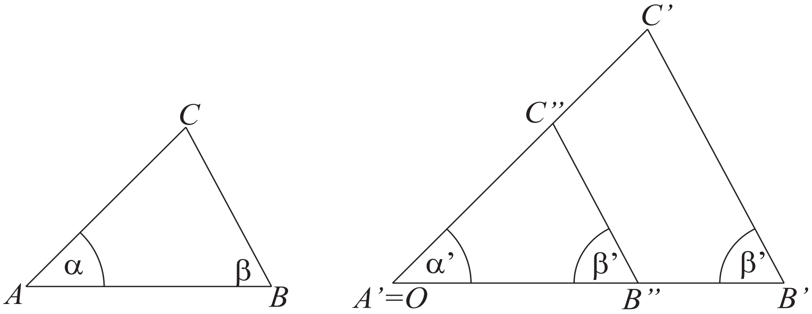
$$\alpha = \alpha' \qquad AC : AB = A'C' : A'B'$$

Állítás: ha $A' = 0$ és $\lambda = \dfrac{AC}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, akkor $A'B''C''_{\triangle} \cong ABC_{\triangle}$. Az A', λ hasonlóság a következőt csinálja:

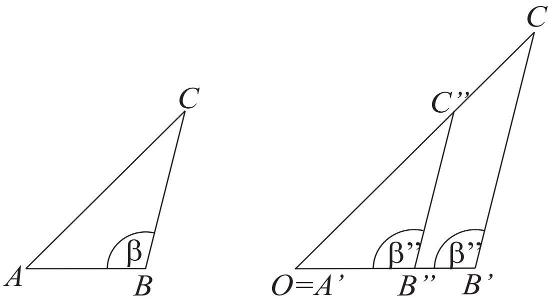
$$A' \to A', B' \to B'', C' \to C''$$

$$\left.\begin{array}{l} A'B'' = AB \\ A'C'' = AC \\ \text{és } \alpha = \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Az egybevágóság 2. esete} \\ \text{miatt } ABC_{\triangle} \cong A'B''C''_{\triangle}\end{array}$$

3. Ha az $ABC_{\triangle}$ - ben és az $A'B'C'_{\triangle}$ - ben a szögek megegyeznek, akkor a 2 háromszög hasonló. Ha az $ABC_{\triangle}$ - ből az $A'B'C'_{\triangle}$ - et egy egybevágósági transzformációval és egy középpontos hasonlósággal kaptuk, akkor a szögeik megegyeznek, mert mindkét transzformáció szögtartó.



4. Ha az $ABC_{\triangle}$ - ben és az $A'B'C'_{\triangle}$ - ben két oldal aránya és a nagyobbikkal szemközti szög megegyezik, akkor a 2 háromszög hasonló. Ha az $ABC_{\triangle}$ - re egy egybevágósági transzformációt és egy középpontos hasonlóságot alkalmazunk, akkor egy olyan $A'B'C'_{\triangle}$ - et kapunk, ahol két oldal aránya és a nagyobbikkal szemközti szög megegyezik.



$\beta = \beta'$ $\quad AC : AB = A'C' : A'B'$

Állítás: ha $A' = O$ és $\lambda = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, akkor $ABC_{\triangle} \cong A'B''C''_{\triangle}$.

Az A', λ hasonlóság a következőt csinálja:

$$A' \to A', B' \to B'', C' \to C''$$
$$A'B'' = AB$$
$$A'C'' = AC$$
$$\lambda B'C' = B''C'' \quad (*) \Rightarrow B''C''||B'C' \Rightarrow \beta'' = \beta'$$

A háromszög egybevágóság 4. esete miatt $ABC_{\triangle} \cong A'B''C''_{\triangle}$.

* **Bizonyítása:**

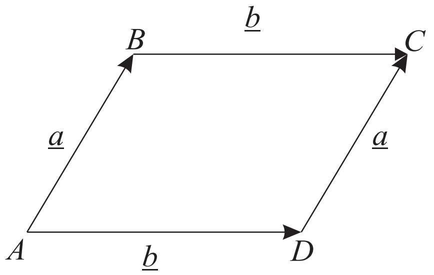
Állítás: $\lambda(\underline{a}+\underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$
Bizonyítás:

1. ha λ pozitív egész, akkor legyen $n = \lambda$. Ekkor az állítás:

$$n(\underline{a}+\underline{b}) = n\underline{a} + n\underline{b}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(\underline{a}+\underline{b}) + (\underline{a}+\underline{b}) + \ldots + (\underline{a}+\underline{b})}_{n \text{ db - szor}} &= n\underline{a} + n\underline{b} \\
\underbrace{(\underline{a}+\underline{a}+\ldots+\underline{a})}_{n \text{ db - szor}} + \underbrace{(\underline{b}+\underline{b}+\ldots+\underline{b})}_{n \text{ db - szor}} &= n\underline{a} + n\underline{b}
\end{aligned}$$

Ehhez csak azt használtuk, hogy a vektor - összeadás kommutatív és asszociatív. $\underline{a}+\underline{b}$ kommutativitása a paraleogramma szabály:



2. $\lambda =$ negatív egészekre hasonló módon megy a bizonyítás:

$$-n(\underline{a}+\underline{b}) = (-n\underline{a}) + (-n\underline{b})$$

3. $\lambda = \dfrac{1}{n}$ - re, ahol n pozitív egész:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}(\underline{a}+\underline{b}) &= \frac{1}{n}\underline{a} + \frac{1}{n}\underline{b} \qquad / \cdot n \\
\underline{a}+\underline{b} = n(\frac{1}{n}\underline{a} + \frac{1}{n}\underline{b}) &= n\cdot\frac{1}{n}\underline{a} + n\cdot\frac{1}{n}\underline{b}
\end{aligned}$$

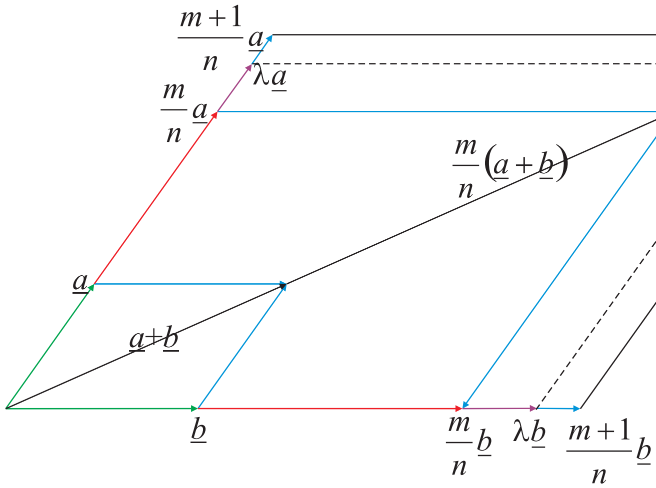
Két vektor pontosan akkor egyezik meg, ha $n \neq 0$ - szeresük is megegyezik.

4. $\dfrac{m}{n}(\underline{a}+\underline{b}) = \dfrac{m}{n}\underline{a} + \dfrac{a}{b}\underline{b}$, ahol m és n egészek.

$$m\cdot\frac{1}{n}(\underline{a}+\underline{b}) = m\frac{1}{n}\underline{a} + m\frac{1}{n}\underline{b}$$

Ez következik az 1 - esből és a 3 - masból.

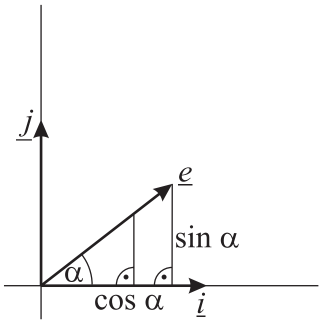
5. $\lambda \notin Q$, vagyis nincs olyan egész m és $n \neq 0$, ahol $\lambda = \dfrac{m}{n}$. Ekkor veszünk egy n pozitív egész számot, és rögzítjük. n - hez keresünk egy olyan m pozitív egészet, ahol: $\dfrac{m}{n} < \lambda < \dfrac{m+1}{n}$(az egyenlőségjelet azért nem kell kitennünk a kifejezésben, mivel kikötöttük, hogy λ irracionális), ez a szám $[n\lambda]$.



Trigonometria

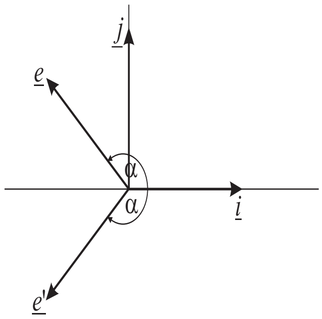
Szögfüggvények definíciója:

Vegyük a síkbeli $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorokat, melyek 90° - ot zárnak be egymással. Ekkor $\underline{i}$ minden elforgatásához hozzárendelhetünk egy pozitív vagy negatív szögértéket. Egy $\underline{e}$ egységvektor irányszögének azt az α forgásszöget nevezzük, amelyet $\underline{i}$ ír le, ha $\underline{e}$ - be megy át. Egy irányszög megadása $\underline{e}$ - t egyértelműen meghatározza, $\underline{e}$ viszont nem határozza meg egyértelműen az irányszöget, hiszen bármely $\alpha + k \cdot 360°$ (ahol k egész) forgásszög tartozhat $\underline{e}$ - hez.



Ekkor fejezzük ki $\underline{e}$ - t $\underline{i}$ és $\underline{j}$ összegével (egyértelműen, pontosan 1 - féleképpen lehet kifejezni). $\underline{e} = e_1\underline{i} + e_2\underline{j}$, ahol e_1 - et α koszinuszának, e_2 - t pedig α szinuszának nevezzük, vagyis $e_1 = \cos\alpha$ és $e_2 = \sin\alpha$.

Ha α hegyesszög, $\cos\alpha$ és $sin\alpha$ definíciójából következik, hogy van olyan derékszögű háromszög, melynek átfogója egységnyi, egyik hegyesszöge α, az α melletti, ill. α - val szemközti befogói pedig $\cos\alpha$ ill. $\sin\alpha$. Ebből nagyítással vagy kicsinyítéssel minden olyan derékszögű háromszög megkapható, amelynek egyik hegyesszöge α, ezért minden α hegyesszögű derékszögű háromszögben az α melletti befogónak ill. az α - val szemközti befogónak az aránya $\cos\alpha$, ill. $\sin\alpha$.



$\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ meghatározásából közvetlenül következik, hogy ha $\underline{e}$ irányszöge α és $\underline{e}'$ irányszöge $-\alpha$, akkor $\underline{e}$ - nek és $\underline{e}'$ - nek $\underline{i}$ - vel párhuzamos összetevője megegyezik, a $\underline{j}$ - vel párhuzamos összetevője pedig éppen ellentett, ezért

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Minden olyan α szögre, melynek koszinusza nem 0 (tehát $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$, ahol k tetszőleges egész szám), definiáljuk az α szög tangensét:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

és ha $\alpha \neq k \cdot 180°$, tehát $sin\alpha \neq 0$, akkor α kotangense:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

A cos, sin, tg, ctg függvényeket *szögfüggvényeknek* vagy *trigonometrikus függvényeknek* nevezzük. A szögfüggvények meghatározó jellegű tulajdonsága az α és β helyeken felvett és az $\alpha+\beta$ helyeken felvett értékeik közötti összefüggés, ezt a kapcsolatot fejezik ki az *összegezési képletek*.

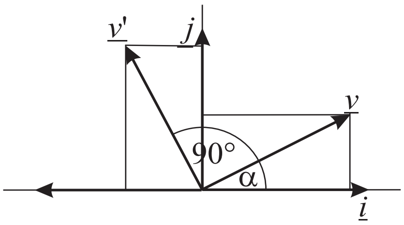
Ezek levezetéséhez jegyezzük meg, hogy ha egy $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ koordináta - rendszert elforgatunk egy $\underline{e}$ vektorral együtt, az $\underline{e}$ elforgatottjainak koordinátái az elforgatott részben is ugyanazok lesznek, mint eredetileg voltak, hiszen egy vektor koordinátái csak a vektornak az alapvektorokhoz való viszonyától függenek.

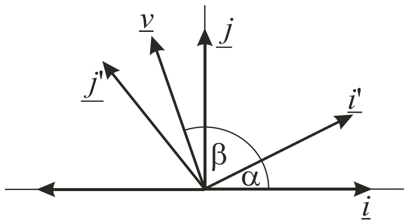
Ebből következik, hogy ha egy $\underline{v}$ egységvektor irányszöge α, és ha elforgatjuk $90°$ - kal egy $\underline{v}'$ helyzetbe, akkor $\underline{v}'$ irányszöge $90° + \alpha$, és $\underline{v}'$ koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}$ rendszer $90°$ - os elforgatásával nyert $\underline{j}, -\underline{i}$ rendszerben ugyanazok lesznek, mint $\underline{v}$ - ben eredetileg voltak, tehát

$$\underline{v}' = \cos\alpha\underline{j} + \sin\alpha(-\underline{i}) = -\sin\alpha\underline{i} + \cos\alpha\underline{j},$$

ami viszont azt jelenti, hogy $\underline{v}'$ koordinátái az $\underline{i}, \underline{j}$ rendszerben $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$, tehát a koordináták egyértelműségéből következik, hogy

$$\cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha) \quad \text{és} \quad \sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha$$





Forgassuk most el az $\underline{i}, \underline{j}$ vektorokat α szöggel $\underline{i}'$ ill. $\underline{j}'$ helyzetbe. $\underline{i}'$ irányszöge α, $\underline{j}'$ irányszöge $\alpha + 90°$ lesz, tehát előző megjegyzésünk szerint

$$\begin{aligned} \underline{i}' &= \cos\alpha \underline{i} + \sin\alpha \underline{j} \\ \underline{j}' &= -\sin\alpha \underline{i} + \cos\alpha \underline{j} \end{aligned} \tag{1}$$

$\underline{i}'$ - t most β szöggel elforgatva olyan $\underline{v}$ - t kapunk, amelynek irányszöge az {i,j} rendszerben β, tehát

$$\underline{v} = \cos\beta \underline{i}' + \sin\beta \underline{j}', \tag{2}$$

viszont $\underline{v}$ irányszöge az $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ rendszerben $\alpha + \beta$, ezért

$$\underline{v} = \cos(\alpha + \beta)\underline{i} + \sin(\alpha + \beta)\underline{j}. \tag{3}$$

Helyettesítsük most a (2) - be az (1) - beli értékeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underline{v} = \cos\beta(\cos\alpha \underline{i} + \sin\alpha \underline{j}) + \sin\beta(-\sin\alpha \underline{i}) \quad &= \\ = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\underline{i} \quad &+ \quad (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\underline{j} \end{aligned}$$

Mivel ez az előállítás megegyezik a (3) - mal, következik, hogy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{5}$$

Ebből a 2 alaptételből levezethető a trigonometrikus függvények minden lényeges összefüggése. Ha β helyett $-\beta$ - t írunk, akkor az előzőek alapján kapjuk:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{6}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{7}$$

Mivel $\cos 0° = 1$, a (6) - ból $\beta = \alpha$ helyettesítéssel következik, hogy

$$cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{8}$$

A (4) - ből és az (5) - ből $\beta \to \alpha$ helyettesítéssel a kétszeres szögek függvényeit kapjuk:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

$\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ kiszámítása $\mathrm{tg}\,\alpha$ segítségével.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, így

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

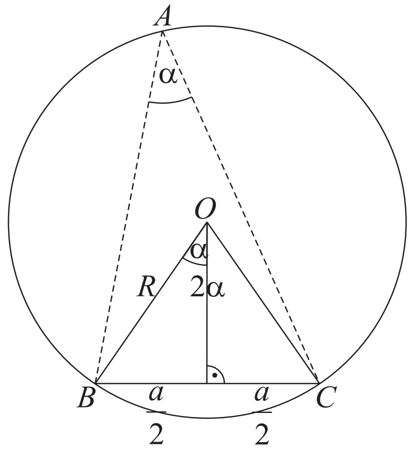
$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}}$$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, így $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}$, tehát

$$\sin^2\alpha = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}}$$

$ABC_\triangle$ - ben a körülírt kör sugarának meghatározása a oldal és a vele szemben fekvő α szög ismeretében

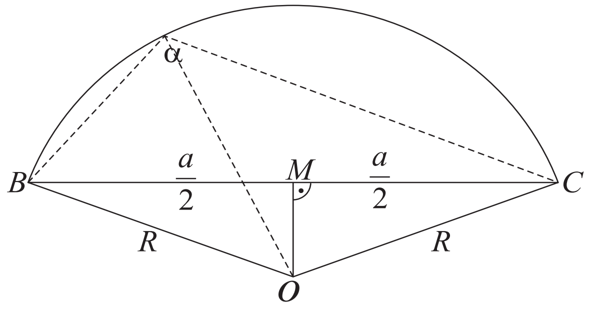
a.) ha a háromszög hegyesszögű



$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

b.) ha a háromszög tompaszögű



$$BOC\measuredangle = 360^\circ - 2\alpha$$

$$BOM\measuredangle = MOC\measuredangle = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R}$$

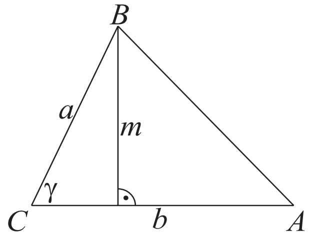
$$R = \frac{a}{2\sin(180^\circ - \alpha)}$$

c.) ha a háromszög derékszögű ($\alpha = 90°$)

A Thalesz - tételt alkalmazva: $R = \dfrac{a}{2}$

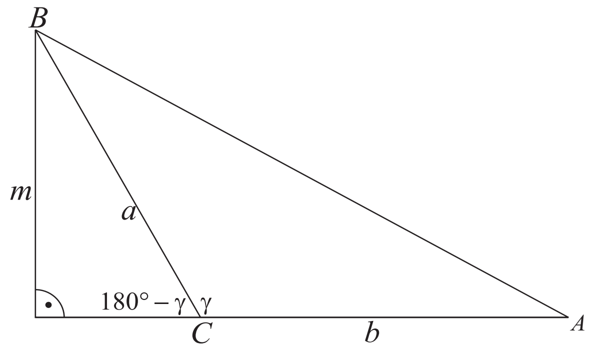
Az $ABC_\triangle$ területének kiszámítása két oldal, és az általuk közbezárt $\gamma\measuredangle$ ismeretében.

a.) Ha a háromszög hegyesszögű



$$\sin\gamma = \frac{m}{a}$$
$$\sin\gamma a = m$$
$$T_{ABC_\triangle} = \frac{\sin\gamma ab}{2}$$

b.) ha a háromszög tompaszögű



$$\sin(180° - \gamma) = \frac{m}{a}$$
$$\sin(180° - \gamma)a = m$$
$$T_{ABC_\triangle} = \frac{\sin(180° - \gamma)ab}{2}$$

c.) ha a háromszög derékszögű

$$T_{ABC_\triangle} = \frac{ab}{2}$$

Szinusztétel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$,

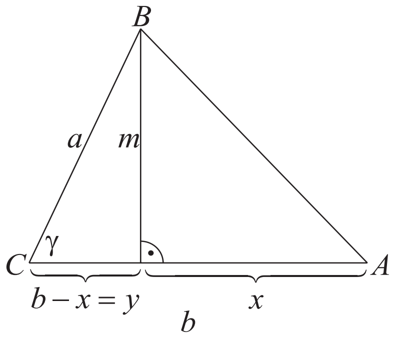
amelyet egy másik alakban: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ is felírhatunk.

Nagy szinusztétel: $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Cosinustétel

ABC tetszőleges háromszög. Ismert a és b oldala, és az általuk közbezárt γ szög.

a.) Az $ABC_\triangle$ hegyesszögű

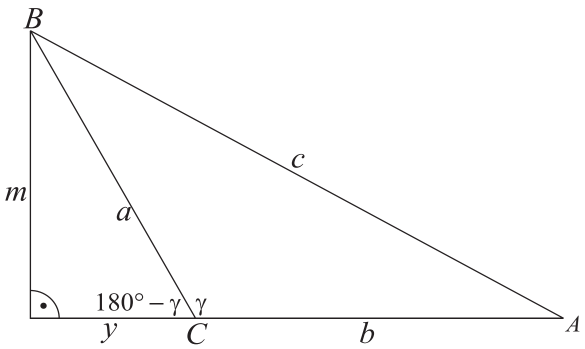


$$\begin{aligned}\frac{m}{a} &= \sin\gamma\\ m &= a\sin\gamma\\ \cos\gamma &= \frac{b-x}{a}\\ y=b-x &= \cos\gamma a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= -\cos\gamma a+b\\ c^2 &= (b-\cos\gamma a)^2+(\sin\gamma a)^2=\\ &= b^2-2ab\cos\gamma+\cos^2\gamma a^2+\sin^2\gamma a^2=\\ &= b^2-2ab\cos\gamma+a^2\underbrace{(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)}_{1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow c^2=b^2-2ab\cos\gamma+a^2$

b.) ha a háromszög tompaszögű



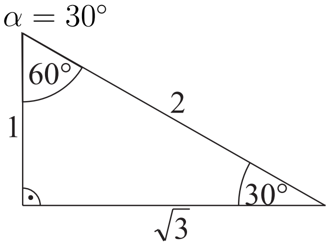
$$\begin{aligned}&\frac{m}{a}=\sin(180^\circ-\gamma)\\ &m=\sin(180^\circ-\gamma)a\\ &\frac{y}{a}=\cos(180^\circ-\gamma)\\ &y=\cos(180^\circ-\gamma)a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^2=m^2+(y+b)^2=\sin^2(180^\circ-\gamma)a^2+(a\cos(180^\circ-\gamma)+b)^2 &=\\ \sin^2(180^\circ-\gamma)a^2+\cos^2(180^\circ-\gamma)a^2+2ab\cos(180^\circ-\gamma)+b^2 &=\\ a^2(\sin^2(180^\circ-\gamma)+\cos^2(180^\circ-\gamma)+b^2+2ab\cos(180^\circ-\gamma)&\end{aligned}$$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+2ab\cos(180^\circ-\gamma)$

Nevezetes szögek sinusai, cosinusai és tangensei

$\alpha = 30°$

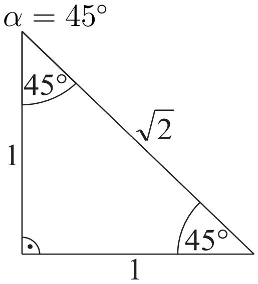


$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

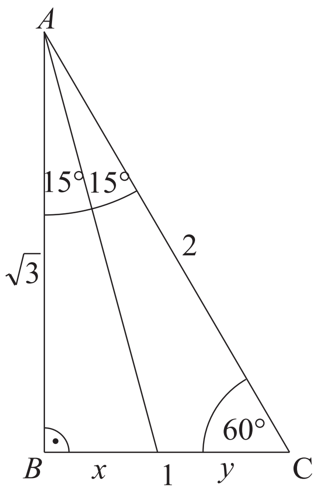
$\alpha = 60°$

Az előző ábrán láthatóan: $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, és $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

$\alpha = 45°$



$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{tg} 45° = 1$$



$x + y = 1$, így $x = 1 - y$. A szögfelező tételből:

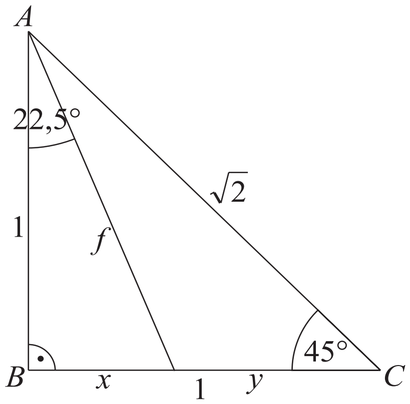
$$\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1-y} = \frac{2}{y}$$
$$\sqrt{3}y = 2 - 2y$$
$$y(\sqrt{3}+2) = 2$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{3}+2}$$
$$x = 1 - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$$
$$\operatorname{tg} 15° = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{24+12\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1}{8+4\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{21+12\sqrt{3}}{24+12\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}}$$

$\alpha = 75°$
Az $\alpha = 15°$ alapján:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \cos(90° - \alpha) = \cos 15° = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}} \\
\cos\alpha &= \sin(90° - \alpha) = \sin 15° = \sqrt{\frac{1}{8+4\sqrt{3}}} \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 15°} = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$\alpha = 22,5°$



$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$$
$$1 : x = \sqrt{2} : y$$
$$\frac{1}{1-y} = \frac{\sqrt{2}}{y}$$
$$y = \sqrt{2} - \sqrt{2}y$$
$$y(2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$
$$f^2 = 1 + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$
$$\sin\alpha = \frac{x}{f} = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

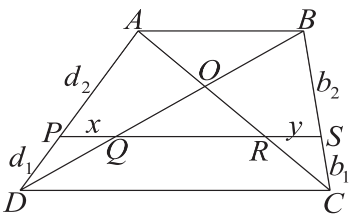
$\alpha = 67,5^\circ$
Az $\alpha = 22,5^\circ$ alapján:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}$$

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 1+\sqrt{2}$$

A trapéz



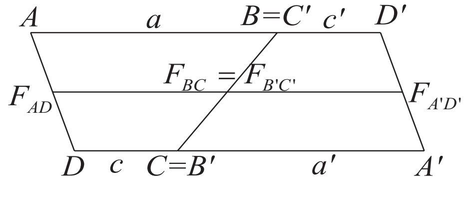
Állítás: ha $AB||PS||DC$, akkor $x = y$.
Bizonyítás: Legyen $\lambda = \dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.
$DPQ_\triangle \sim DAB_\triangle$ (a szögeik egyenlőek), így $\dfrac{d_1}{x} = \dfrac{d_1+d_2}{a}$.

$$x = a\frac{d_1}{d_1+d_2} = a\frac{\dfrac{d_1}{d_2}}{\dfrac{d_1+d_2}{d_2}} = a\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$CSR_\triangle \sim CBA_\triangle$ (a szögeik megegyeznek), így $\dfrac{b_1}{y} = \dfrac{b_1+b_2}{a}$

$$y = a\frac{b_1}{b_1+b_2} = a\frac{\dfrac{b_1}{b_2}}{\dfrac{b_1+b_2}{b_2}} = a\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

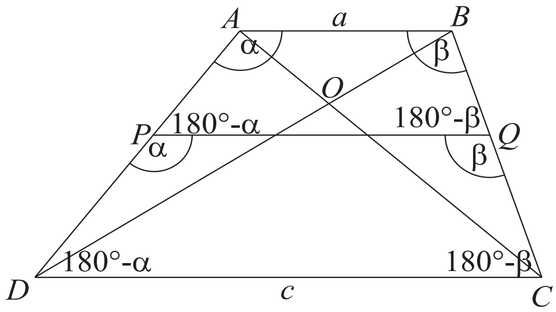
$\Rightarrow y = x = a\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$
Ha $Q = R = O$, akkor $PO = OS$.



A trapéz középvonala a két alap számtani közepe

Állítás: Ha $AB||F_{AD}F_{BC}||DC$ és $F_{AD}F_{BC}$ a középvonal, akkor $F_{AD}F_{DC} = \frac{a+c}{2}$.
Bizonyítás: Tükrözzük az $ABCD$ trapézt az F_{BC} pontra középpontosan! Ekkor a tükrözés a következőt csinálja: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $D \to D'$, $F_{AD} \to F'_{A'D}$, $F_{BC} \to F_{B'C'}$, és $B = C'$, ill. $C = B'$. A tükrözés miatt $F_{AD}F_{A'D'} = 2 \cdot F_{AD}F_{BC}$. $ADA'D'$ paraleogramma és $AD'||F_{AD}F_{A'D'}||DA' \Rightarrow AD' = F_{AD}F_{A'D'} = DA' = a + c \Rightarrow F_{AD}F_{BC} = \frac{a+c}{2}$

Az az alapokkal párhuzamos szakasz, amely a trapézt 2 hasonló trapézra osztja, olyan hosszú, mint a 2 alap mértani közepe



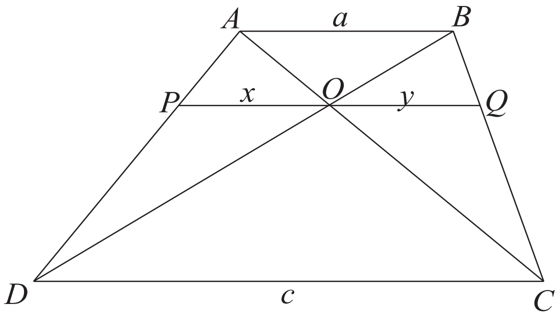
Állítás: Ha $AB||PQ||DC$, és $APQB \sim PDCQ$, akkor $PQ = \sqrt{ac}$.
Bizonyítás:

$$\left.\begin{array}{l} DAB\measuredangle = \alpha \\ ABC\measuredangle = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} DPQ\measuredangle = \alpha \\ PQC\measuredangle = \beta \end{array}$$

$$\Rightarrow APQ\measuredangle = PDC\measuredangle = 180° - \alpha, \quad PQP\measuredangle = QCD\measuredangle = 180° - \beta$$

$\frac{AB}{PQ} = \frac{PQ}{DC}$, így $AB \cdot DC = PQ^2$, ezért $PQ = \sqrt{AB \cdot DC} = \sqrt{ac}$.

Az az alapokkal párhuzamos egyenes, amely átmegy az átlók metszéspontján, olyan hosszú, mint a két alap harmonikus közepe



Állítás: ha $AB||PQ||DC$ és PQ átmegy O - n (O az átlók metszéspontja), akkor $PQ = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$.

Bizonyítás: $DAB_\triangle \sim DPO_\triangle$ (a szögeik megegyeznek), így $\frac{x}{AB} = \frac{PD}{AD}$, ezért $x = AB \cdot \frac{PD}{AD}$.
Ehhez hasonlóan $DAC_\triangle \sim PAO_\triangle$ (a szögeik megegyeznek), így $\frac{x}{DC} = \frac{AP}{AD}$, ezért $x = DC \cdot \frac{AP}{AD}$, és így $x = a \cdot \frac{PD}{AD} = c \cdot \frac{AP}{AD}$.

$$\frac{PD}{AD} + \frac{AP}{AD} = \frac{PD + AP}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

$$a \cdot \frac{PD}{AD} = c \cdot (1 - \frac{PD}{AD}) = c - c\frac{PD}{AD}$$

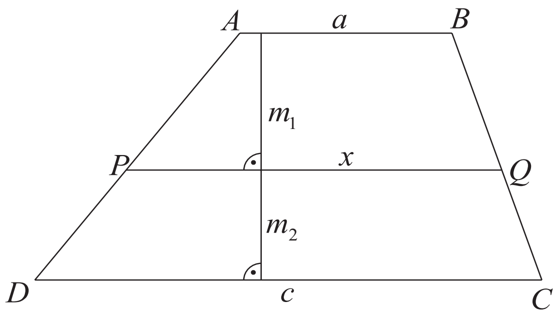
$$a\frac{PD}{AD} = c - c\frac{PD}{AD} \qquad / + c\frac{PD}{AD}$$

$$(a+c)\frac{PD}{AD} = c \qquad / : (a+c)$$

$$\frac{PD}{AD} = \frac{c}{a+c}$$

de $x = a\dfrac{PD}{AD}$, így $x = \dfrac{AC}{a+c}$, ezért $PQ = 2x = \dfrac{2ac}{a+c} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}}$.

Az az alapokkal párhuzamos szakasz, amely a trapézt 2 egyenlő területű részre vágja, olyan hosszú, mint a két alap négyzetes közepe



Állítás: ha $AB||PQ||DC$ és $T_{APQB} = T_{PDCQ}$, akkor $PQ = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Bizonyítás: Legyen $m = m_1 + m_2$.

$$\begin{aligned}
T_{ABCD} = m \cdot \frac{a+c}{2} &= m_1(a+x) = m_2(x+c) \\
m_1(a+x) &= m_2(x+c) \\
m_1 &= m_2\frac{x+c}{a+x} \\
m\frac{a+c}{2} &= (x+c)m_2 \\
(m_1+m_2)\frac{a+c}{2} &= (x+c)m_2 \\
\left(m_2\frac{x+c}{a+x} + m_2\right)\frac{a+c}{2} &= (x+c)m_2 \qquad / : m_2 \\
\left(\frac{x+c}{a+x} + 1\right)\frac{a+c}{2} &= (x+c) \qquad / \cdot 2 \\
(a+c)\left(\frac{x+c}{a+x} + 1\right) &= 2(x+c)
\end{aligned}$$

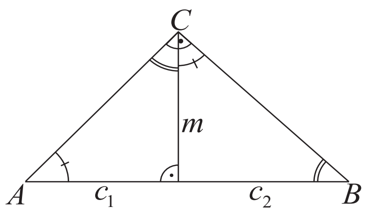
$$\begin{aligned}
\frac{(a+c)(x+c)}{a+x}+(a+c) &= 2(x+c) \qquad /-2(x+c)\\
\frac{(a+c)(x+c)}{a+x}+(a+c)-2(x+c) &= 0 \qquad /\cdot(a+x)\\
(a+c)(x+c)+(a-2x-c)(a+x) &= 0\\
ax+ac+cx+c^2+a^2+ax-2ax &- 2x^2-ac-cx=0\\
\underbrace{ax+ax-2ax+ac-ac+cx-cx}_{0} &+ c^2+a^2-2x^2=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2+c^2 &= 2x^2\\
\frac{a^2+c^2}{2} &= x^2\\
x &= \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}
\end{aligned}$$

Geometria

Magasságtétel

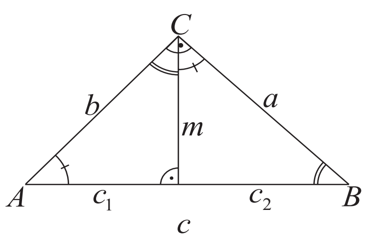
Állítás: Egy derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsból induló magasság megegyezik az általa az átfogóból kimetszett 2 szakasz mértani közepével.
Bizonyítás:



$ATC_\triangle \sim CTB_\triangle$ (a szögeik megegyeznek) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{m} &= \frac{m}{c_2}\\
c_1c_2 &= m^2\\
m &= \sqrt{c_1c_2}
\end{aligned}$$

Befogótétel

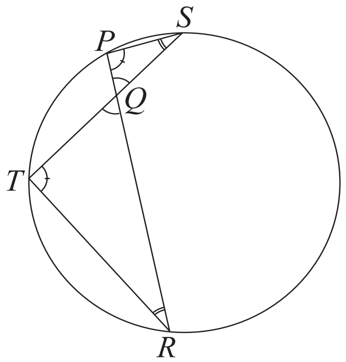


$ABC_\triangle \sim ACT_\triangle \sim CBT_\triangle$ (megegyeznek a szögeik)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{c_1}{b} = \frac{b}{c} &\quad\rightarrow\quad b^2 = cc_1\\
\frac{c_2}{b} = \frac{a}{c} &\quad\rightarrow\quad a^2 = cc_2
\end{aligned}$$

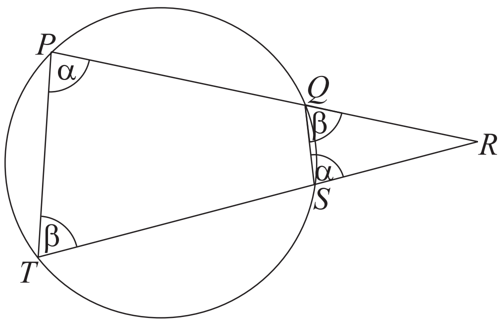
Ez a befogó - tétel.
$a^2+b^2 = cc_1+cc_2 = c(c_1+c_2) = c^2$, ez a Pithagorasz - tétel.

Húrtétel



PR és TS a kör húrjai. $PQT_\triangle \sim SQR_\triangle$, mert $PQT\measuredangle = SQR\measuredangle$ (váltószögek) és $PTS\measuredangle = PRS\measuredangle$ mert a PS ívhez tartozó kerületi szögek. A hasonlóság miatt $\frac{PQ}{QT} = \frac{SQ}{QR} \Rightarrow PQ \cdot QR = QT \cdot SQ$.

Szelőtétel



$$\left.\begin{array}{l} PTS\measuredangle = \alpha \\ TPQ\measuredangle = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} PQS\measuredangle = 180^\circ - \beta \\ TSQ\measuredangle = 180^\circ - \alpha \end{array}$$

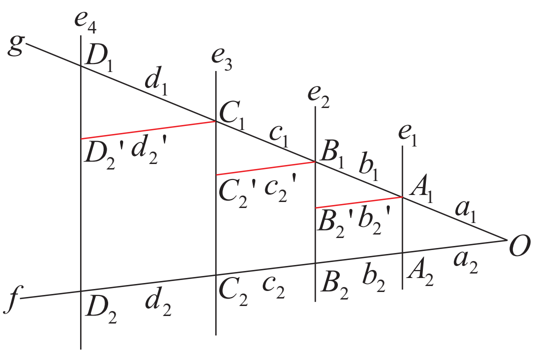
$$\Rightarrow \begin{array}{l} SQR\measuredangle = \beta \\ QSR\measuredangle = \alpha \end{array}$$

$$\Rightarrow TPR_\triangle \sim QSR_\triangle (\text{megegyeznek a szögeik})$$

$$\Rightarrow \frac{PR}{RT} = \frac{SR}{QR}$$

$$PR \cdot QR = SR \cdot RT$$

Párhuzamos szelők tétele



$e_1||e_2||\ldots||e_n$

Állítás: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = n_1 : n_2$

Bizonyítás: f - et toljuk el az $\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{B_2B_1}, \overrightarrow{C_2C_1}, \ldots, \overrightarrow{Z_2Z_1}$ vektorokkal. Megkapjuk az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ egyeneseket, ahol $f_1||f_2||\ldots||f_n||f$, és $a_2 \to a_2', b_2 \to b_2', c_2 \to c_2' \ldots z_2 \to z_2'$.

Kialakul néhány hasonló háromszög: $A_1OA_{2\triangle} \sim B_1A_1B_2'\triangle \sim C_1B_1C'_{2\triangle} \sim \ldots \sim Z_1(Z-1)_1(Z-1)'_{2\triangle} \Rightarrow a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = \ldots = z_1 : z_2$.

Ceva - tétel

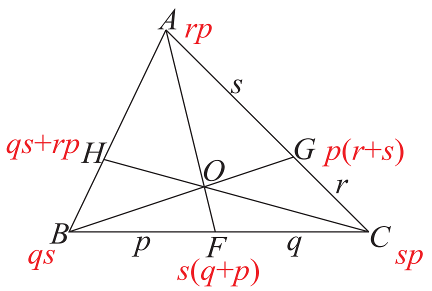
A háromszög csúcsaiból kiinduló 3 egyenes 1 pontban metszi egymást

$$\Updownarrow$$

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = 1,$$

ahol A, B, C a 3 csúcsokból induló egyenesek metszéspontjai az oldalegyenesekkel.

Belső pont esetén:



Bizonyítás:
$\frac{BF}{FC} = \frac{p}{q}$, és $\frac{AG}{GC} = \frac{s}{r}$

$$\overrightarrow{XF} = \frac{p\overrightarrow{XC} + q\overrightarrow{XB} + q\overrightarrow{XB}}{p+q}, \quad \overrightarrow{XG} = \frac{r\overrightarrow{XA} + s\overrightarrow{XC}}{r+s}$$

Állítás: az O pont AF - et $AO : OF = s(p+q) : rp$ arányban osztja.
Bizonyítás: Vegyük fel azt a Q pontot az AF szakaszon, amire igaz, hogy $AQ : QF = s(p+q) : rp$.

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{s(p+q)\overrightarrow{XF} + rp\overrightarrow{XA}}{sp+sq+rp} = \frac{sp\overrightarrow{XC} + sq\overrightarrow{XB} + rp\overrightarrow{XA}}{sp+sq+rp}$$

Vegyük fel azt a Q' pontot a BG szakaszon, amire igaz, hogy $BQ' : Q'G = p(r+s) : qs$.

$$\overrightarrow{XQ'} = \frac{p(r+s)\overrightarrow{XG} + qs\overrightarrow{XB}}{sp+sq+rp} = \frac{rp\overrightarrow{XA} + sp\overrightarrow{XC} + qs\overrightarrow{XB}}{sp+sq+rp}$$

Mivel $\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XQ'}$, így $Q = Q'$, de $AF \cap BG = O$, ezért $Q = Q' = O$. **Állítás:** A H pont az AB szakaszt $AH : HB = qs : rp$ arányban osztja.
Bizonyítás: Vegyük fel a H' pontot az AB - n, amire igaz, hogy $AH' : H'B = qs : rp$.

$$\overrightarrow{XH'} = \frac{pr\overrightarrow{XA} + sq\overrightarrow{XB}}{pr+sq}$$

Vegyük fel $H'C$ - t, és rajta azt a P pontot, amire teljesül, hogy $H'P : PC = sp : (qs + rp)$.

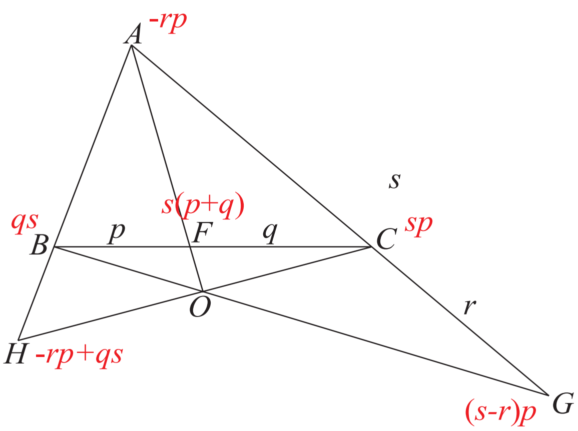
$$\overrightarrow{XP} = \frac{(qs+rp)\overrightarrow{XH'} + sp\overrightarrow{XC}}{qs+rp+sp} = \frac{pr\overrightarrow{XA} + sq\overrightarrow{XB} + sp\overrightarrow{XC}}{qs+rp+sp}$$

Ez megegyezik $\overrightarrow{XO}$ - val, ezért $P = O$, és így $H' = H$. Nézzük, hogy mire jutottunk!

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{qs}{rp} = 1,$$

és épp ezt akartuk belátni.

Külső pont esetén:



$$\overrightarrow{XF} = \frac{sp\overrightarrow{XC} + qs\overrightarrow{XB}}{sp+qs}, \quad \overrightarrow{XG} = \frac{-rp\overrightarrow{XA} + sp\overrightarrow{XC}}{-rp+sp}$$

Állítás: az O pontra igaz, hogy $AF : FO = (-rp + qs + sp) : -rp$

Bizonyítás: Vegyük fel azt a Q pontot az AO egyenesen, amire igaz, hogy $AF : FQ = (-rp + qs + sp) : -rp$.

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{(qs+sp)\overrightarrow{XF} + -pr\overrightarrow{XA}}{-rp+qs+sp} = \frac{sp\overrightarrow{XC} + qs\overrightarrow{XB} - pr\overrightarrow{XA}}{-rp+qs+sq}$$

Vagyis azt a Q' - t, amire igaz, hogy $BQ' : Q'G = (sp - rp) : qs$.

$$\overrightarrow{XQ'} = \frac{(sp-rp)\overrightarrow{XG} + qs\overrightarrow{XB}}{-rp+qs+sp} = \frac{-rp\overrightarrow{XA} + sp\overrightarrow{XC} + qs\overrightarrow{XB}}{-rp+sp+qs}$$

Így viszont $Q = Q'$, ezért $Q = Q' = O$.

Állítás: $AB : BH = rp + qs : -rp$

Bizonyítás: Vegyük fel azt a H' - t, amire $AB : BH' = rp + qs : -rp$.

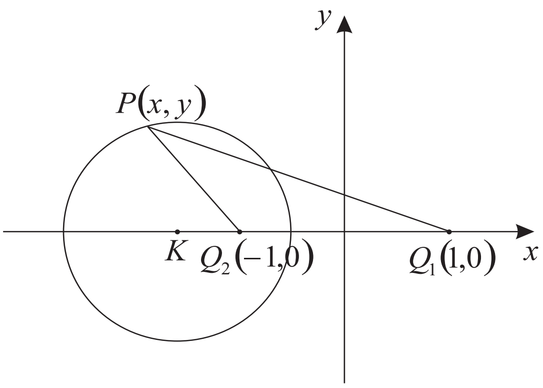
$$\overrightarrow{XH} = \frac{qs\overrightarrow{XB} + -rp\overrightarrow{XA}}{qs-rp}$$

Vegyük fel azt a P - t, amire $HP : PC = sp : rp + qs$.

$$\overrightarrow{XP} = \frac{(-rp+qs)\overrightarrow{XH} + sp\overrightarrow{XC}}{-rp+qs+sp}$$

Tehát $P = O$. Ha megvizsgáljuk az eredeti állítást, akkor most is a megfelelő eredményre jutunk.

Appolonius - kör



Állítás: Azok a pontok, amelyek 2 ponttól mért távolságaránya állandó, egy körön helyezkednek el. **Bizonyítás:** A tételt a kör egyenletének segítségével bizonyítjuk be. Válasszuk meg a koordináta rendszert úgy, hogy a 2 rögzített pont $Q_1(+1,0)$, és $Q_2(-1,0)$ legyen, és azokat a $P(x,y)$ pontokat akarjuk meghatározni, melyekre a $\dfrac{Q_2P}{Q_1P}$ távolságarány egy adott $q \neq 1$ számmal egyenlő (ha $q = 1$, akkor a keresett pontok mértani helye a Q_1Q_2 szakaszfelező - merőlegese).

Ez azt jelenti, hogy $\dfrac{Q_2P}{Q_1P} = q$, ami egyenértékű azzal, hogy $\dfrac{Q_2P^2}{Q_1P^2} = q^2$. Írjuk most ezt fel a távolságképlet segítségével:

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} &= q^2\\ (x+1)^2+y^2 &= q^2(x-1)^2+q^2y^2\\ x^2+2x+1+y^2 &= q^2x^2-2q^2x+q^2+q^2y^2\end{aligned}$$

ebből átrendezéssel kapjuk, hogy ha $q \neq 1$, akkor

$$\begin{aligned}q^2x^2+q^2y^2-x^2-y^2-2q^2x-2x+q^2-1 &= 0\\ (q^2-1)x^2+(q^2-1)y^2-(2q^2+2)x+q^2-1 &= 0\\ x^2+y^2-\frac{2q^2+2}{q^2-1}x+1 &= 0\end{aligned}$$

Ez viszont egy kör egyenlete, mert ilyen alakba írható:

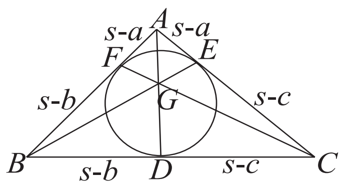
$$\left(x-\frac{q^2+1}{q^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{2q}{q^2-1}\right)^2,$$

ez olyan kör, amelynek középpontja $K\left(\frac{q^2+1}{q^2-1}, 0\right)$, sugara pedig $\left|\frac{2q}{q^2-1}\right|$.

A levezetés megfordításával beláthatjuk, hogy ennek a körnek minden pontja megfelel a feladat feltételeinek.

Gergonne pont

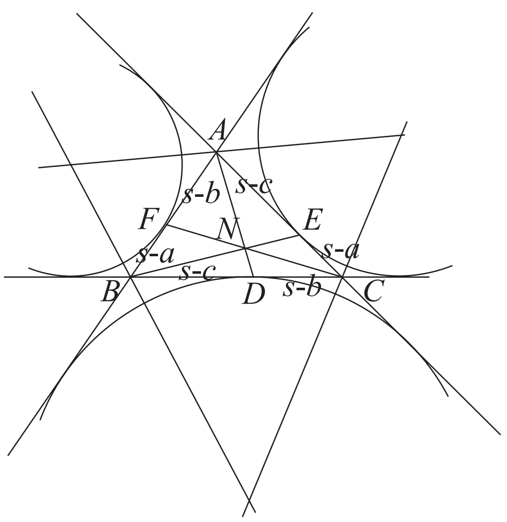
Állítás: Az $ABC_\triangle$ - ben a beírt kör érintési pontjai összekötve a szemközti csúcsokkal 3 egy ponton átmenő szakaszt határoznak meg. Ez a pont a Gergonne - pont.
Bizonyítás:



Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, így $AF = AE, BF = BD, DC = CE$. A Ceva - tétel értelmében BE, FC és AD akkor metszik egymást egy pontban, ha:

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{\mathbf{EA}}\cdot\frac{\mathbf{AF}}{FB} &= 1\\
\frac{\mathbf{BD}}{DC}\cdot\frac{CE}{\mathbf{FB}} &= 1\\
\frac{CE}{DC} &= 1, \text{és ez igaz, mivel } CE = DC
\end{aligned}$$

Nagel - pont



Állítás: A háromszög csúcsait összekötve a szemközti oldalhoz hozzáírt körök érintési pontjaival 3 szakaszt kapunk. E három szakasz egy ponton megy át, ez a Nagel - pont.

Bizonyítás: Az állítást a Ceva - tétel segítségével bizonyítjuk be:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$$

Látható, hogy a három szakasz teljesíti a Ceva - tételt, így egy pontban metszik egymást.