Matematikai kapcsolatok bemutatása: Euler tételének egy geometria bemutatása

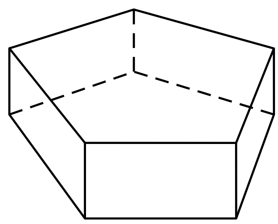
Az *Iskolai Matematikai Tanmenet és Szintfelmérés* (NTCM 1989) felkér tanárokat arra, hogy hangsúlyozzák a matematikai kapcsolatokat, helyezzék előtérbe a bizonyítások fontosságát, és segítse a tanulókat sikeresebben megoldani a problémákat. Ha a tanároknak is céljukká válik ezek elérése, rávezető feladatokra, példákra van szükségük, és olyan tételekre, amelyek ezekre az elemekre utalnak. A matematikai kapcsolatokat, hangsúlyozásának és a bizonyítások fontosságát előtérbe helyezésének módjaként Glidden és Fry (1993) két bizonyítást is adtak arra, hogy pontosan öt szabályos poliéder létezik. Az egyik geometriai, a másik gráfelméleti volt. A geometriai bizonyítás szögmérést használt, a gráfelméleti pedig Euler tételét, síkbarajzolható véges gráfok esetén: egy összefüggő síkbarajzolható véges gráfnál legyen C a csúcsok száma, R a régiók száma, és E az élek száma! Ekkor $C+R-E=2$. Ha visszatekintünk megfogadni Pólya tanácsát (1957), látjuk, hogy a szögmérést és Euler tételét ugyanahhoz a bizonyításhoz használták. Ez egy matematikai kapcsolat készítését tanácsolja szögmérés és Euler tétele közt. Ez a cikk nem csak ilyen kapcsolat létezését példázza, hanem Euler tételének poliéderekre való alkalmazásának egy geometriai bizonyításához is vezet.

Euler tételének ez a változata azt állítja, hogy minden konvex poliédernél, ahol C a csúcsok száma, L a lapok száma, E az élek száma, fennáll a $C+L-E=2$ egyenlet. Például egy kockának nyolc csúcsa van, hat lapja, tizenkét éle, és, tényleg, $8+6-12=2$.

Euler tétele konvex poliéderekre három lépésből áll. Először bemutatjuk, hogy a poliéder lapszögeinek összege egy függvénye az élek és lapok számának. Másodszor e felfedezést felhasználva találunk egy másik módszert a lapszögek összeadására. Ezzel bebizonyítjuk, hogy a szögösszeg a poliéder csúcsai számán múlik. Végül e két összeget egyenlővé téve bebizonyítjuk magát Euler tételét.

ÉLEK, LAPOK, ÉS A LAPSZÖGEK ÖSSZEGE

Euler tételének ezen bizonyításában egy konvex poliéder lapszögeinek összegét fogjuk megvizsgálni. Ezt úgy lehet kiszámolni, hogy összeadjuk minden lap szögösszegét. Például a kockának hat négyzet oldala van. Miután minden lapon négy derékszög van, a lapok szögösszege $360° = 4 \cdot 90°$, azaz a lapok szögösszege összesen $2160° = 6 \cdot 360°$. Egy tetraéderben négy háromszöglap van, minden lapon a szögek összege $180°$, így hát a lapszögek összege $720°$. Most tekintsünk egy ötszögalapú hasábot (ld. **1.ábra**)!



1. ábra. Egy ötszög alapú hasáb

Öt téglalap alakú lapja van, és kettő ötszög. Minden téglalap szögösszege $360°$, és mindkét ötszögé $540°$. Tehát az ötszögalapú hasáb lapszögeinek összege

$$5 \cdot 360° + 2 \cdot 540° = 2880°.$$

E módszer általánosításához tekintsünk egy L lapú poliédert! Számozzuk meg a lapokat 1-től L-ig! Legyen o_1 az első lap szögeinek száma, o_2 a második lap szögeinek száma, és így tovább. Az első lap szögösszege $180° \cdot (o_1-2)$, a másodiké $180° \cdot (o_2-2)$, stb. Ezek szerint, ha a lapszögek összege $\Sigma\alpha$, akkor

$$\Sigma\alpha = 180° \cdot (o_1-2) + 180° \cdot (o_2-2) + \\ +180° \cdot (o_3-2) + \ldots + 180° \cdot (o_L-2)$$

Minthogy az összeg L tényezőt tartalmaz, a jobb oldal átrendezhető, úgy, hogy a kapott egyenlet

$$\Sigma\alpha = 180^\circ \cdot (o_1 + o_2 + o_3 + \ldots - 2 \cdot 180^\circ \cdot L. \tag{1}$$

Ami pedig az $o_1+o_2+o_3+\ldots+o_L$ képletet illeti, ez a poliéder lapjainak oldalszámának összege; például a kocka mind a hat lapjának négy oldala van, ezért a lapok oldalainak száma összesen $o_1+o_2+o_3+o_4+o_5+o_6 = 6 \cdot 4 = 24$. Hasonlóan, a tetraéder mind a négy lapjának három oldala van, a lapok oldalainak összege $o_1 + o_2 + o_3 + o_4 = 4 \cdot 3 = 12$. Az ötszögalapú hasábnak öt lapja négyoldalú, kettő pedig ötoldalú, tehát $o_1 + o_2 + o_3 + o_4 + o_5 + o_6 + o_7 = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30$.

A poliéder minden egyes éle oldala pontosan két lapnak. Így hát ha egy poliédernek E éle van és L lapja, akkor ebből következik, hogy

$$o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_L = 2E$$

Ezt az értéket (1)-be behelyettesítve azt eredményezi, hogy

$$\Sigma\alpha = 2 \cdot 180^\circ \cdot E - 2 \cdot 180^\circ \cdot L$$

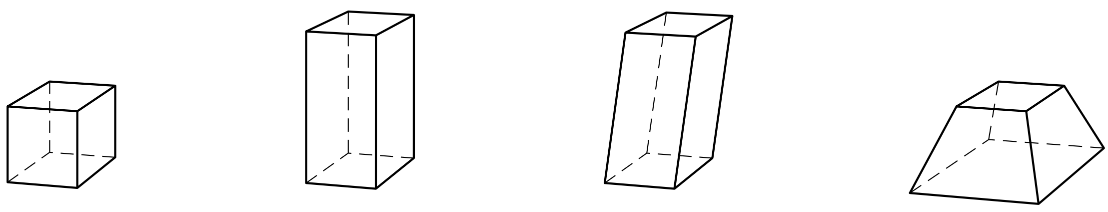
avagy

$$\Sigma\alpha = 2 \cdot 180^\circ (E - L). \tag{2}$$

Az eredmény elragadó: egy konvex poliéder lapszögeinek összege csak az élek, és a lapok számától függ. Azaz, például az A poliéder lapszögeinek összege, száz éllel, és ötven oldallal ugyanakkora, mint a B poliéderé, nyolcvan éllel, és harminc lappal, mivel $E - L = 50$ mindkét poliéder esetén, feltéve, természetesen, hogy ilyen poliéderek léteznek.

A LAPSZÖGEK ÖSSZEGE, ÉS A CSÚCSOK SZÁMA

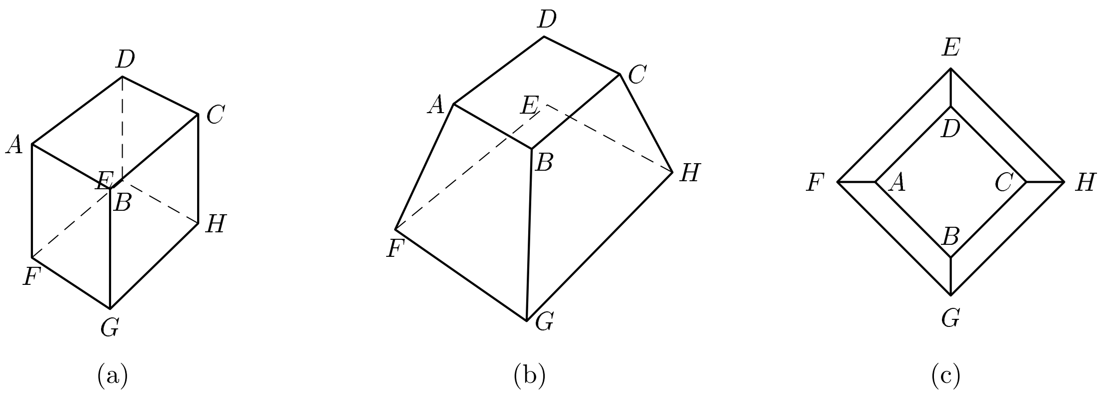
Most felállíthatjuk a bizonyítás második részét, egy másik módszert kell keresnünk a lapszögek összegének kiszámításához. Képzeljük el egy konvex poliéder oly modelljét, ahol az élek megnyújthatóak, és a csúcsok mozgathatóak. Ha egy kocka ily modellje létezne, át lehetne formálni sok más poliéderré, de mindegyikben a szögösszeget 2160° volna. Példaképpen tekintsük a **2a.ábrát**, amin egy kocka található! Széthúzván az alsó és a felső oldalát, egy általánosabb téglalapalapú hasábot kapnánk (**2b.ábra**). A **2b.ábrán** látható alakzatot a felső oldal egyik csúcsánál megnyomván két oldala még általánosabb paralelogramma lesz (**2c.ábra**). A **2a.ábrán** található alakzat alsó lapját megnyújtván, négyzet alakját megtartván kapott alakzat négy trapézoldallal rendelkezne (**2d.ábra**). Mindegyik esetben a lapok és élek száma állandó volna, tehát a lapszögek összege sem változna.



(a) (b) (c) (d)

2.ábra. Egy kocka nyújtogatása, előtte és utána

Fontoljuk meg a végletes esetet! Vegyünk egy kockát (**3a.ábra**), és folytassuk az alsó nagyítását, míg négyzetalakja megmarad, míg végül a poliéder lapossá válik (**3b.ábra**)! Ennél a pontnál a poliéder egy síkon



3.ábra. Egy kocka lelapítása

fekszik, míg az alsó lapját teljesen eltakarja a poliéder többi része (**3c.ábra**). Egy másik lehetőség nyílik $\Sigma\alpha$ kiszámítására.

Az alsó lapja e lapos kockának az $EFGH$ négyzet, így az alsó oldal szögeinek összege 360°. E lapos kocka felső része az $EFGH$ négyzet, ami tartalmazza a másik négy csúcsot, A-t, B-t, C-t, D-t. A teteje szögösszege tehát 360°, és minden belső csúcsnál 360° van, ami összesen $2 \cdot 360° = 1440°$, a felső négyszögön belül. Az egészet összegezve, egy kocka lapszögeinek összege $360° + 360° + 1440° = 2160°$, ami egyezik az előző eredménnyel: $\Sigma\alpha = 2 \cdot 180° \cdot (E - L)$.

A LAPSZÖGEK ÖSSZEGE, ÉS A CSÚCSOK SZÁMA

E módszert $\Sigma\alpha$ kiszámítására alkalmazni lehet altalános poliéderre. Ha e konvex poliédert merőlegesen levetítjük vagy ,,lelapítjuk" az egyik lapjára, úgy nézhet ki, akár a váz a **4. ábrán**.

Tegyük fel, hogy a poliédernek C csúcsa van, és az az alakzat, amivé lapítottuk, r csúccsal rendelkezik! Az alsó lapon $180°(r-2)$ a szögösszeg. Hasonlóan felül, az r csúcsnál a szögösszeg $180°(r-2)$. Az alakzat $(C-r)$ csúcsot tartalmaz. Ezen csúcsoknál az összeg mind 360°. Tehát e ,,lapított poliéder"-nél

$$\Sigma\alpha = 180°(r-2) + 180°(r-2) + 360°(C-r)$$

Ezen egyenletet leegyszerűsíthetjük ezzé:

$$\Sigma\alpha = 360°C - 720°. \tag{3}$$

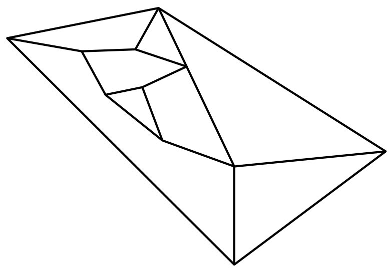
Egyesítjük (2)-t, és (3)-at, amivel ezt kapjuk:

$$\begin{gathered} 360°(E-L) = \Sigma\alpha = 360°C - 720°, \\ 360°(E-L) = \Sigma\alpha = 360°(C-2) \\ E - L = C - 2 \end{gathered}$$

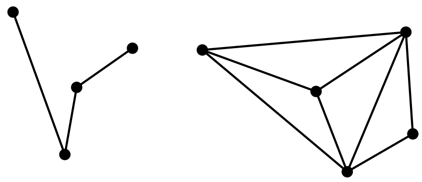
A ,,lapositott konvex poliéder" előállításához fűzhető, hogy a **4.ábrán** mutatott tárgy egy síkbarajzolható véges gráf. Tehát minden régió a poliéder egy-egy lapjával feleltethető meg, míg a külső régió az alsó lapjával feleltethető meg. Azaz lehetséges volna R-rel, régiók, L-et, lapok helyettesíteni,

$$C + R - E = 2.$$

Bár Euler tételére poliédereknél adtunk egy bizonyítást, síkbarajzolható véges gráfok esetén az Euler tétel befejezetlen maradt. Csak azon gráfokra bizonyítottuk a síkbarajzolható végesek közül, hogy $C + R - E = 2$, amelyek megfeleltethetőek egy létező poliédernek. Konkrétabban például nem bizonyítottuk $C + R - E = 2$-t az **5.ábrán** látható alakzatokra.



4. ábra. Egy lelapított általános poliéder



5. ábra. Egyéb síkbarajzolható véges gráfok

HOVA TOVÁBB?

A bevezető cél sikerült: geometriai bizonyítást találtunk Euler tételére, konvex poliéderek esetére. Most milyen kérdésre fordítsuk figyelmünket? Milyen érdekességek merültek fel a vizsgálat közepette? Legalább két kutatásra szánt cím jut eszünkbe. Először is, tudvalévő, hogy kapcsolat van a geometria és a gráfelmélet között. Konkrétan, kapcsolat létesíthető konvex poliéderek, és síkbarajzolható véges gráfok között. Ezen kapcsolaton kívül, amit épp most jártunk végig, miféle kapcsolat létezik még?

Másodiknak az előzőekben megállapítottuk, hogy a lapszögek összege egy poliéder éleinek, és lapjainak számán múlik. Valamint megállapítottuk, hogy egy száz élű, ötven lapú poliéder lapszögeinek összege egyezik egy nyolcvan élű, harminc lapú poliéderével, mert mindkét poliéder esetén $E-L=50$, *feltéve, természetesen, hogy ilyen poliéderek léteznek.* Léteznek ilyen poliéderek? Be lehet bizonyítani létezésüket megépítésük nélkül? Euler tétele azt állítja, hogyha ilyen poliéderek léteznének, mindkettőnek ötvenkét csúcsa volna. Kell más megkötés is egy E, L, C számhármashoz, mint $C+L-E=2$, hogy egy létező poliéder éleinek, lapjainak és csúcsainak száma legyen? Bár ilyen kérdések vizsgálata túllépné e cikk terjedelmét, természetesen nagyon érdekes felfedezést jelentenének. Pólya *Matematikai felfedezése* (1962) remek forrás poliéderekről fogalmazott kérdések tanulmányozásához.

KÖVETKEZTETÉS

Az NCTM **Tanmenet és Szintfelmérés** (1989) felkér tanárokat arra, hogy hangsúlyozzák a matematikai kapcsolatokat, helyezzék előtérbe a bizonyítások fontosságát, és segítse a tanulókat sikeresebben megoldani a problémákat. A tanároknak e célok eléréséhez rávezető feladatokra, példákra van szükségük, és olyan tételekre, amelyek ezeket az elemeket mind tartalmazzák. A geometria és a gráfelmélet ágai a matematikának, mely sok ilyen, és hasonló példát szolgáltat. Mint bemutattuk Euler tételének geometria változatánál, a geometria és a gráfelmélet közt rengeteg kapcsolat van, ami megéri a kalandozást.