Az elődöntő feladataiból:

1.Vadászat a fekete gyalogra

- Tudsz sakkozni, Kormi? – kérdezte Aliz a fekete cicát, az pedig a legnagyobb megrökönyödésére igennel válaszolt, sőt, játékot ajánlott a kislánynak a végtelen családi sakktáblán. Két gyaloggal kell játszani, Alizé a fehér, Kormié pedig a fekete. Aliz fölrakja a gyalogját, majd a cica a sajátját ugyanabba az oszlopba a fehér fölé, két üres mezőt kihagyva. Aliz kezd és az a célja, hogy kiüsse a fekete gyalogot, azaz lépésének utolsó *ugrásával* arra a mezőre érkezzék, ahol az áll. Egy-egy lépése 4 vagy 5 ugrásból állhat. Egy ugrásnak számít, ha egyetlen mezővel mozdul el fölfelé vagy jobbra, ha pedig lefelé vagy balra mozdul el a szomszédos mezőre, akkor ez 2 ugrást ér. Első lépésben tehát négy mezővel följebb tolhatja bábuját, áthaladva közben a fekete gyalogot tartalmazó mezőn, de éppenséggel mind az 5 ugrását elhasználva mehet egyet jobbra, vissza balra, aztán lefelé. Nem teheti viszont azt, hogy egyet megy fölfelé, majd rögtön utána vissza, mert ez így csak 3 ugrás. A fekete gyalog mind a négy szomszédos mezőre léphet, de azonnal veszít, ha oda lép, ahol a fehér gyalog áll. Az éles elméjű cica nyomban átlátta, milyen stratégiával húzhatja a legtovább, bármilyen ügyesen is játssza ellenfele. Hány lépésben nyerheti meg Aliz a játékot?

Megoldás:

Lássuk be, hogy Korminak van nyerő stratégiája, azaz mindig tud úgy lépni, hogy Aliz ne kaphassa el. A stratégia azon alapszik, hogy Kormi bábuja Alizétól vagy pontosan 3, vagy több, mint 5 ugrásnyi távolságra legyen Kormi minden lépése után. Amennyiben ez a helyzet, Aliz nem tudja elkapni, hiszen legfeljebb 5 ugrásnyit haladhat, így az 5-nél távolabb lévő bábut nem éri el, a tőle 3-ra levőre pedig nem tud a lépése befejeztével ráállni: ha pontosan 3 ugrásnyival arrébb szeretne végezni, kell a célhoz képest ellenkező irányba is haladnia egy mezőt (ez alatt az értendő, hogy ha pl. a célmező tőle balra és felfele van, akkor kell egyet jobbra vagy lefele mennie). Ezt kikompenzálandó a lépése során egyszer ezzel ellenkező irányba (a példánál maradva az ellenkező irányú mozgásnak megfelelően balra vagy felfele) kell haladnia egy mezőt, és két ellenkező irányú mozgás pontosan 3 ugrásba kerül, viszont nem halad vele semennyit, azaz már 6 ugrásra lenne szüksége a célmező eléréséhez.

Fontos az is a stratégia működéséhez, hogy Aliz a lépése után ne legyen pontosan 3 ugrásnyira Kormitól. Az ábrán X-szel jelöltük azokat a mezőket, amelyek 3 ugrásnyira vannak Kormitól, vagy egy másik X-szel jelölt mezőtől. Aliz egy lépése során nem tud egy X-szel jelölt mezőről indulva egy másik X-szel jelölt mezőre érkezni, mivel ezek a mezők egymástól vagy 3, vagy több, mint 5 ugrásnyira vannak.

Most pedig nézzük meg konkrétan Kormi stratégiáját:

Kormi bábuja a fekete mezőn áll, ehhez viszonyítjuk Aliz bábuját és a tábla kitöltését. A játéktábla kitöltése a végtelenségig folytatódik a megkezdett séma alapján.

Ha Aliz bábuja

- 1-es mezőn áll, Kormi felfele lép egyet
- 2-es mezőn áll, Kormi lefele lép egyet
- 3-as mezőn áll, Kormi jobbra lép egyet
- 4-es mezőn áll, Kormi balra lép egyet

Az X-szel jelölt helyeken nem állhat Aliz, mivel kezdetben is egy X-szel jelölt mezőről indult, és ha Kormi a nyerő stratégiáját játssza, akkor Aliz bábuja egyszer sem állhat a lépése után egy Kormihoz viszonyított X jelű mezőn.

Nézzük meg, hogy tulajdonképpen mi is történik: Mivel Kormi bábujához viszonyítjuk a táblát, Korminak úgy kell lépnie, hogy (figyelve arra, hogy Aliz bábujára ne lépjen rá) Aliz bábujára „ráhúzzon" egy X-et. Akkor ugyanis Aliz bábuja pont három (vagy 5-nél több) ugrásnyira lesz Kormi bábujától, és a lépését X jelű mezőn sem fejezheti be. Kormi ezt mindig megteheti, hiszen minden mező két X jelű mezővel is szomszédos, azaz ha netán Aliz bábuja Kormi bábuja mellett van, Kormi akkor is a két irány közül tud úgy lépni, hogy Aliz bábuja X jelű mezőn kössön ki.

Tehát korminak van nyerő stratégiája, Aliz nem tudja a bábuját kiütni sohase. A verseny szabályainak értelmében ezért a megoldás 0000.

X	3	2	X	3	2	X	3	2	X	3
2	X	3	2	X	3	2	X	3	2	X
3	2	X	3	2	X	3	2	X	3	2
X	3	2	X	3	2	X	3	2	X	3
2	X	3	2	X	3	2	X	3	2	X
3	2	X	3	2		1	2	X	3	2
X	3	2	X	3	4	X	3	2	X	3
2	X	3	2	X	3	2	X	3	2	X
3	2	X	3	2	X	3	2	X	3	2
X	3	2	X	3	2	X	3	2	X	3
2	X	3	2	X	3	2	X	3	2	X

5. Távol és közel

Aliz meglátta a távolban a Fehér Királyt, amint egy egyenes három pontja, B, C és D között szökdécsel. B és D 3 kilométerre vannak Aliz tartózkodási helyétől, a C pont pedig csak 2 kilométerre. Legalább hány méter távolságra vannak egymástól a B és a D pontok?

<u>Megoldás</u>:

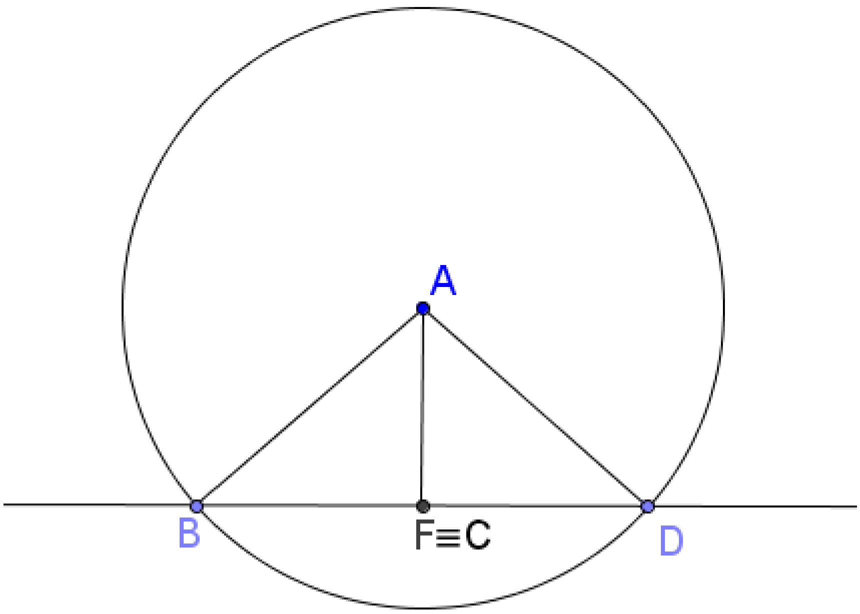
Miután a feladatban három pontról van szó, feltételezhetjük, hogy B és D pont nem azonos. B és D is egy A (Aliz tartózkodási helye) középpontú, 3 km sugarú körvonal egy-egy pontja. C pont a BD szakasz egy pontja lesz, hiszen az egyenes körön kívüli pontjai A-tól több, mint 3 km-re vannak, viszont AC=2 km. A nincs rajta BD egyenesén, mert akkor BD a kör átmérője lenne, így a lehető leghosszabb lenne. F pont BD szakasz felezőpontja. BD (és ezáltal BF) szakasz hosszának csökkentésével AF szakasz nő, hiszen AF= a Pitagorasz-tétel miatt (AFB derékszög, hiszen a kör bármely húrjának a felezőmerőlegesén rajta van a kör középpontja).

Tudjuk azonban, hogy 2 km=AC≥AF, mivel az egyenes pontjai közül F van a legközelebb A-hoz.

BD akkor minimális, ha AF maximális. Ez akkor van, ha AF=2 km (és ekkor F≡C).

BD=2× =2× =2× km=2000× m. ≈2,2361, tehát BF=2236,1 m, BD=4472,2m (közelítő értéke meg volt adva a versenyen).

A megoldás tehát a szakasz méterben mért hosszának egészrésze, azaz 4472.



6. A Vörös Lovag küldetése

A Vörös Királynő parancsba adta a 8×8 sakktábla jobb alsó sarkában álldogáló Vörös Lovagnak (Bástya): irány az ellenség, pontosan 6 lépésben szállja meg az átellenes, bal fölső sarkot, úgy, hogy minden lépés után forduljon derékszögben balra. A Királynő azt is engedélyezte, hogy útja során többször is megpihenjen ugyanazon a mezőn, akár a célban is, mielőtt a hatodik lépésben ideérne. Jelenleg a tábla elhagyatott, a Vörös Lovag az egyetlen figura. Hány útvonal közül választhat?

Megoldás:

C								7
								6
								5
								4
								3
								2
								1
							R	
7	6	5	4	3	2	1		x y

Az R jelű mezőről indul a lovag, és mivel 6 lépésben kell a C mezőbe érnie, függőlegesen felfelé fog az első lépése során haladni, így a lépéseinek iránya ↑ ← ↓ → ↑ ←

lesz ebben a sorrendben.

Ha a lovag megtette a negyedik lépését is, függetlenül attól, hogy hol áll, pontosan egyféleképpen tud az adott mezőről a C be jutni, hiszen az 5. lépésével mindenképpen függőlegesen felfelé a 7-es számú sorba kell lépnie, a 6. kal pedig vízszintesen balra a C mezőbe. Elég tehát azt kiszámolnunk, hogy hányféleképpen tudja a lovag az első négy lépését megtenni.

A lovag a második lépése után egy olyan mezőn fog állni, amelynek (x;y) „koordinátái” 1-7-ig valamely (akár ugyanaz) két szám. Ha a 2. lépése után az (n;k) mezőn áll, akkor a 3. lépésével függőlegesen lefelé k mező közül választhat, hiszen ennyi van „alatta”, majd a 4. lépésével n mező közül választhat, mert ennyi van tőle jobbra, azaz a második mezőről n×k-féleképp juthat el a negyedik mezőre, így ugyanennyiféleképp juthat el a célba(C).

Így tulajdonképpen a feladatunk már csak annyi, hogy kiszámoljuk az 1×1+1×2+1×3+….+1×7+2×1+2×2+….+2×7+….+7×1+7×2+…..+7×7 összeget.

A fenti éppen 1×(1+2+3+…+7)+2×(1+2+3+….+7)+….+7×(1+2+3+….+7)= (1+2+3+4+5+6+7)×(1+2+3+4+5+6+7)=28×28=784

A megoldás tehát 0784.

11. Mi egy név?

Aliz bemutatkozott a tojásfejű Dingidunginak, az pedig így felelt: - Ilyen névvel bármilyen formájú lehetsz. No figyelj, hátha így jobban megérted. – azzal hadarni kezdett. – A nyolcszögnek kétszer annyi oldala van, mint a négyszögnek. A hétszögnek több oldala van, mint a hatszögnek, ennek pedig több, mint az ötszögnek. A hatszög oldalainak száma pedig pont középen van a háromszöghöz és a kilencszöghöz képest. – Értem. – mondta a kislány. – Dehogy érted, mondtam, hogy egy név még nem sokat jelent. Most például mindegyik sokszög neve egy másik sokszög oldalszámára vonatkozik, és így is igazat mondtam.

Mi a Dingidungi-féle nevek valódi jelentése? *Válaszul soroljátok fel a „háromszög”, „ötszög”, „hétszög” és a „kilencszög” oldalszámát ebben a sorrendben.*

Megoldás:

A feladat lényege tehát az, hogy a hétféle szabályos sokszög (három-kilencszög) egymás neveit „vette át” és semelyik sem önmaga, az állítások viszont így is teljesülnek. Haladjunk lépésről lépésre a megoldással:

1. „A nyolcszögnek kétszer annyi oldala van, mint a négyszögnek” ez a kétszeres viszony a 8-4 en kívül csak a 6-3 ra teljesül a feladatban szereplő sokszögek közül, tehát a „nyolcszög” a hatszög és a „négyszög” a háromszög.
2. „A hatszög oldalainak száma pont középen van a háromszöghöz és a kilencszöghöz képest” Itt két eset lehetséges (figyelembe véve, hogy egyikük se lehet hatszög, vagy háromszög):
   - 9-8-7: ez nem lehet, mert „a hétszögnek több oldala van, mint a hatszögnek” és a „három”- vagy „kilencszögnek” is, tehát a „hatszög” nem lehet a nyolcszög
   - 9-7-5: ez lesz a helyes, más eset nem lehetséges, a „hatszög” a hétszög, a „kilencszög” pedig mivel nem lehet önmaga, ötszög lesz, és a „háromszög” a kilencszög
3. „a hétszögnek több oldala van, mint a hatszögnek”, tehát a „hétszög” csak a nyolcszög lehet a megmaradók közül
4. az „ötszög” kizárásos alapon a négyszög lesz, és igaz rá, hogy „kevesebb oldala van, mint a hatszögnek”

A „háromszög”, az „ötszög”, a „hétszög” és a „kilencszög” oldalszáma tehát kilenc, négy, nyolc és öt, a megoldás is ez: 9485.

12. Polinomot szegezz!

Az Oroszlán és az Egyszarvú összecsaptak a koronáért. Amikor Aliz odaért, éppen az Egyszarvú tette föl a következő kérdést: „Legyenek a, b és c az f(x)= 2 +11 - 427x + 414 polinom gyökei. Mennyi f(a+b+c)?”

Megoldás:

A polinom gyökei a 2 +11 -427x+414=0 egyenlet megoldásai.

Észrevehető, hogy az x_1=1 teljesíti az egyenlőséget, tehát kiemelhetünk (x-1)-et.

2 +11 -427x+414=(x-1)×(2 +13x-414)

A többi megoldást akkor kaphatjuk meg, ha a 2 +13x-414=0 egyenletet oldjuk meg, mivel szorzat akkor és csak akkor 0, ha az egyik tényezője 0.

$x_{2;3}$= =

x_2= x_3=

Most pedig az f(x_1+x_2+x_3) függvényértéket kell kiszámolni, ez f(1+ -18)=f(-)=

2× +11× -427×(-)+414 = + + +414 = 2348,5+414=2762,5

A megoldás ennek az egészrésze, azaz 2762.

14. A Huszár osztói

Világos Huszár egy feladaton töpreng a harc szünetében. „Itt vannak felírva az N szám összes pozitív osztói, az N-et és az 1-et is beleértve. Annyit elárulhatok, hogy 606 négyzetszám van köztük, és azt is, hogy a lista számai közül pontosan 165 a -nek is osztója. Ja, és az 5-nek páratlan sok többszöröse van ideírva. Na mondd meg nekem, hány szám van ezen a listán?"

<u>Megoldás</u>:

Válasszuk ki az osztók közül a legnagyobbat, amely osztja -t, ez legyen × ≤14). Ennek mind a 165 szám az osztója lesz, amely -nek is osztója, mivel ezen számok × alakúak, és a≤n, valamint b≤k.

Ennek a × számnak (n+1)×(k+1)=165 osztója van. 165=3×5×11. Az ≤14 feltétel csak akkor tud teljesülni, ha (n+1)=11 és (k+1)=15 vagy ha (n+1)=15 és (k+1)=11. Ez azt jelenti, hogy a Huszár által gondolt szám prímtényezős felbontásában vagy a 2-nek vagy az 5-nek a kitevője pontosan 10, hiszen ha több lenne, akkor nem a fenti lenne a legnagyobb szám, amely osztja -t. A 2 és az 5 közül a másiknak a kitevője legalább 14.

Ha a huszár által gondolt szám prímtényezős felbontása × × × …..× ×…. ,(α;β;γ….≥0) akkor az osztók között ([−]+ 1)×([− ×([−]+ 1)×…….×([− + 1)×….. négyzetszám lesz, hiszen minden kitevőnek párosnak kell lennie, és egy adott y számig [−]+1 páros szám van, természetesen a 0-t is beleértve, és ha egy négyzetszámot szeretnénk megkapni, akkor minden prímtényezőhöz a kitevőjénél nem nagyobb páros számok közül választhatunk ([z] z egészrészét jelöli).

Tehát a 606 egy ilyen szorzatként áll elő. 606=2×3×101. Tudjuk, hogy a 2 vagy az 5 kitevője 10, a fenti szorzatban egy 10 értékű kitevő [—]+1=6 értékű szorzótényezőt jelent. Így a többi tényező szorzata 101 lesz. Ez azonban csak úgy lehet, hogy van egy kitevő, amely a szorzatban 101 értékű szorzótényezőként mutatkozik, az összes többi prím kitevője pedig 0 vagy 1, mert ezek a számok érnek fel egy 1 értékű szorzótényezővel. Az 5-nek páratlan sok többszöröse van az osztók között. Ez csak akkor fordulhat elő, ha az 5 páratlan kitevőn van, az összes többi prím pedig pároson, mivel az 5 többszörösei úgy néznek ki, hogy 5× a Huszár által gondolt szám ötödének osztói. Páratlan sok osztója csak négyzetszámoknak van, azaz minden prím páros hatványon van a gondolt szám ötödében, így a gondolt számban csak az 5 van páratlan hatványon

Tehát a 2 és az 5 kivételével minden prím kitevője 0. A 10 nem páratlan, tehát nem lehet az 5 kitevője, a 2-é lesz.

Hogy a 606 négyzetszám meglegyen, tudjuk, hogy az 5 k kitevője igazzá teszi az [−]+1=101 egyenletet és páratlan. Tehát k=201

A Huszár által gondolt szám így a × , tehát összesen 11×202=2222 osztója van.

16. Udvari csevegés

Az újdonsült királynő, Aliz tiszteletére adott banketten a sült és a desszert között a Vörös Királynő váratlan kérdéssel fordult a kislányhoz: „Osszuk be az első 200 pozitív egész számot két csoportba, az egyikbe azok kerüljenek, amelyekhez a legközelebbi négyzetszám páratlan, a másikba pedig az összes többi, tehát amelyekhez a legközelebbi négyzetszám páros. Mennyi a két halmazban lévő elemek összegének az eltérése?”

<u>Megoldás</u>:

Vegyük észre a következőt: ha -től kezdve -1-gyel bezárólag ilyen módon két részre válogatjuk a számokat, akkor ebben a két csoportban a számok összege ugyanannyi:

páratlanhoz van közelebb	pároshoz van közelebb
	:
:	:
:	-2
	-1
+2k+1	+1
+2k+2	+2
:	:
:	:
2	+2k-1
-1	+2k

A jobb oldal (2k)×(2k)-val több

A bal oldal (2k)×(2k)-val több

Ez viszont azt is jelenti, hogy 1-től -ig is egyenlő lenne egy ilyen táblázat jobb és bal oldalában a számok összege, hiszen fel lehetne bontani k-1 ilyen egyenlő részre, 1-től -1-ig, -től -1-ig….. -től -1-ig. Ez tehát azt jelenti, hogy -1=168-ig a táblázat jobb és bal oldala kiegyenlíti egymást, így azzal már nem is kell foglalkoznunk. A további számok így rendeződnek el egy ilyen táblázatban:

páratlanhoz van közelebb	pároshoz van közelebb
169	183
170	184
:	:
:	:
181	195
182	196
	197
	198
	199
	200

A jobb oldal több 14×14=196-tal

Összességében véve tehát a páros négyzetszámhoz közelebbi számok összege több, 196+197+198+199+200=990-nel, a megoldás tehát 0990.

A döntő feladataiból:

3. Igyál meg, egyél meg

Egy asztalkán egy üvegcsét talált, a nyakán egy papírcímke, amelyre csupa nagybetűvel azt írták: IGYÁLMEG. Egyetlen korty ––-edrészére kicsinyíti azt, aki belekóstol. Az asztal alatt pedig egy üvegdobozkában egy nagyon pici süteményre bukkant, amelynek a tetejére mazsolából gyönyörűen kirakták, hogy EGYÉLMEG. Egyetlen falat ––-szeresére nagyítja azt, aki eszik belőle. Aliz éppen eredeti magasságának a harmadára szeretne zsugorodni, hogy átférjen az ajtón. Hányszor kell eközben beleharapnia a süteménybe?

Megoldás:

Vegyük észre, hogy ––=– és ––=–. Ha Aliz n-szer iszik az üvegcséből, és k falat süteményt eszik, akkor a magassága – × – -szorosára változik. A cél az, hogy

– × – =– legyen, és k legyen minimális.

– × – –– –– = × . És ez kell, hogy egyenlő legyen × -nal.

n és k természetesen egész számok, emiatt

$$5n-4k=-1 \text{ és } 7k-9n=0$$

$$5n+1=4k \quad 7k=9n$$

$$35n+7=28k \quad 28k=36n$$

$$35n+7=36n$$

$$7=n$$

$$7k=9\times 7$$

$$k=9$$

Tehát Aliznak 9-szer kell beleharapnia a süteménybe, a megoldás 0009. (A levezetésből az is látszik, hogy ez az egyetlen megoldás, hiszen az 5n-4k=0 és 7k-9n=0 egyenletrendszernek nincs pozitív egész megoldása)

4. Egér a könnytóban

A dolognak az lett a vége, hogy Aliz egy könnytóban találta magát: a saját könnyeivel sírta tele még hárommméteres korában. Úgy hallotta, hogy nem messze locskol valami a tóban. – Ó Egér! – kezdte udvariasan a társalgást Aliz, aztán franciára váltott: - Ou est ma chatte? – Egér rémülten felvisított és megrendülten tudatta, hogy mindhárom fivérével egy bizonyos macska végzett. Mély gyászában csak annyit volt képes felidézni, hogy még egyikőjük sem volt 25 esztendős, amikor a szomorú vég elérte őket. Aztán olyasmit motyogott, hogy semelyik kettejük életkora nem volt relatív prím, míg ellenben a hármójuké legjobb tudomása szerint az volt. Hogy vigasztalni próbálja, a jószívű Aliz felsorolta az összes ilyen tulajdonságú nem rendezett számhármast, majd látva, hogy Egér ettől sem derül jobb kedvre, kiszámolta a felsorolt számok összegét. Mennyit kapott eredményül?

Megoldás:

Az általunk keresett számhármasok felírhatók a következő formában:($a\times b\times x$; $a\times c\times y$; $b\times c\times z$) ahol $a;b;c>1$ és páronként relatív prímek és $(x;y;z)=1$, $(x;c)=1$, $(y;b)=1$, $(z;a)=1$.
Legyen $a<b<c$ ekkor $a\geq2$ $b\geq3$ és $c\geq5$ az eddigi feltételeink miatt. Mivel a számhármas minden tagja kisebb 25-nél, tudjuk, hogy $bc\leq24$, $c\leq8$. $c=8$ csak $b=3$ esetén lehet, ekkor azonban $a=2$, így nem relatív prímek. $c=6$ hasonló megfontolásból nem lehetséges.
a;b;c re a lehetséges esetek: 2;3;5 és 2;3;7
A lehetséges számok, amelyekből a számhármasok alkothatók:

c=5 esetén	$a\times b\times x$	$a\times c\times y$	$b\times c\times z$
	2×3	2×5	3×5
	$2\times2\times3$	$2\times2\times5$	
	$2\times2\times2\times3$		
	$2\times3\times3$		
c=7 esetén	$a\times b\times x$	$a\times c\times y$	$b\times c\times z$
	2×3	2×7	3×7
	$2\times2\times3$		
	$2\times2\times2\times3$		
	$2\times3\times3$		

Látható, hogy x az 1;2;3;4 y az 1;2 és z csak az 1 értéket veheti fel
Az összes számhármast úgy kapjuk meg innen, ha a két esetet külön tekintve minden oszlopból egy-egy számot választunk az összes lehetséges módon ez $4\times2\times1+4\times1\times1=12$ számhármast jelent.

Az első oszlop számainak mindegyikét összesen 2+1=3-szor, a második oszlopéit 4-szer, a harmadikét pedig az első esetben 8-szor, a második esetben 4 szer számoltuk. A keresett összeg tehát $3\times(6+12+24+18) + 4\times(10+20+14) + 8\times15 + 4\times21=180+176+120+84=560$

A megoldás 0560.

5. Szabad verseny

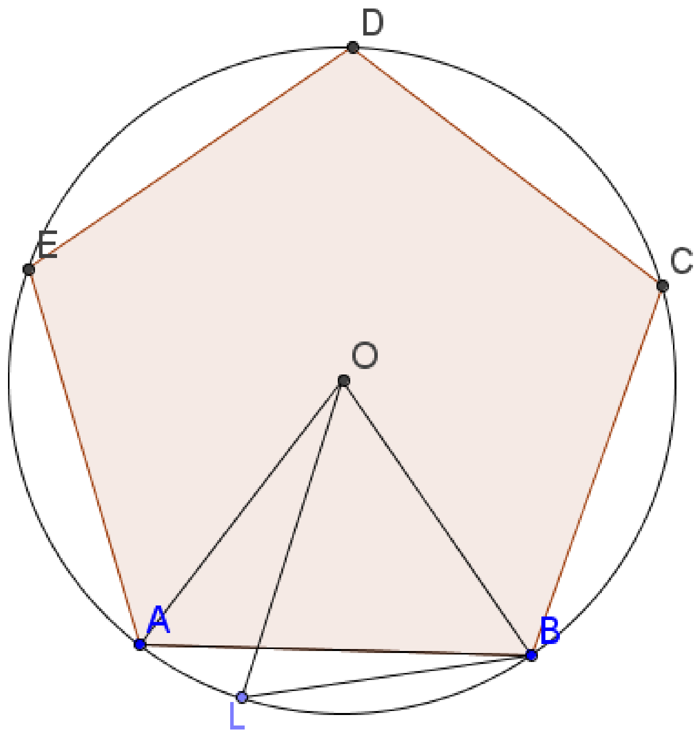
Hogy Aliz megszáradjon, Egér azonnali matematika órát javasolt azzal, hogy annál nincs szárazabb. Dodó, a dodó, a nem-ortodox oktatási irányelvekre hivatkozva egy ötödik tornaórát ajánlott: Szabad Versenyre hívta Alizt. Futóversenyről volna szó, magyarázta, ő a maga részéről kör alakú pályán futna állandó sebességgel, 12 percenként téve meg egy kört. Aliz eközben a körbe írt ABCDE szabályos ötszög mentén szaladna, ugyancsak állandó sebességgel úgy, hogy ezen a pályán 11 perc alatt érjen körbe. A kislány az ötszög A csúcsából indul B felé, Dodó pedig ugyanebben a pillanatban a kör kisebbik AB ívének abból az L pontjából indul el az A pont felé, amelyre LBA szög= 12°. – Mi ebben a verseny? – kérdezte Aliz. – Hát az, hogy hány másodperc múlva találkozunk.

<u>Megoldás</u>:

Aliz és Dodó az ötszög csúcsaiban tudnak találkozni. Aliz 11 perc alatt ér körbe, tehát egy élen 2,2 perc=132 másodperc alatt ér végig. Dodó 12 perc alatt ér körbe, és mivel a két-szomszédos csúcsok közötti ívek egyforma hosszúak, egy ilyen ív megtételéhez 2,4 perc=144 másodpercre van szüksége. A kerületi és középponti szögek közti összefüggés miatt AOL szög kétszerese ABL szögnek, tehát 24° . AOB szög nagysága ——$=72^\circ$. A dodó tehát az LA utat ——=48 másodperc alatt teszi meg.

Az első olyan pillanat után, amikor mindketten valamelyik (nem feltétlenül ugyanabban) csúcsban vannak éppen, [132;144]=1584 másodpercenként lesznek ismét mindketten valamelyik csúcsban.

Aliz 84 másodperccel azután ér B pontba, hogy a dodó elhagyta az A pontot. Mivel Aliz 12 másodperccel gyorsabban teszi meg a két szomszédos csúcs közötti útját, mint a dodó, —=7 ilyen út megtétele után ő is és a dodó is ugyanabban a pillanatban valamelyik (természetesen nem feltétlenül ugyanabban) csúcsban lesz, először a kezdés óta. Aliz ebben a pillanatban a D pontban lesz, mivel 7 élt haladt a B pontból. Dodó helyzetét megtudhatjuk, ha az eddig eltelt összes időt kiszámoljuk. Aliz összesen 8 élnyit haladt, tehát $8\times132=1056$ másodperc telt el. A dodó 48 másodperc alatt elért az A pontba, a maradék 1008 másodperc alatt pedig ——=7 ívet haladt, így ő is éppen a D pontban van jelenleg. Így tehát nem kell tovább számolnunk, először a futás során 1056 másodperc után találkoztak össze, ez a megoldás.



7. Hernyó gömbjei

Aliz Hernyóhoz fordult tanácsért, hová is került tulajdonképpen. Hernyó rezidenciáját négy, páronként érintő gömb alkotja. Egyikük, a legkisebb a talajra támaszkodik, a sugara 2000 bakarasz. Erre illeszkedik a három nagyobb, egyenként 3000 bakarasz sugarú gömb úgy, hogy a talaj szintjétől legtávolabbi pontjaik síkja párhuzamos a talajjal. Bakaraszban mérve milyen messze van ez a sík a talajtól?

<u>Megoldás</u>:

Ha a négy gömb középpontjait ($O_1O_2O_3O_4$) összekötjük, akkor egy szabályos háromszög alapú tetraédert kapunk, amely éleinek hosszai az él két végpontjában levő pontokhoz tartozó gömbök sugarainak az összegei lesznek, így lesz három 5000 (O_2O_1;O_3O_1;O_4O_1) és három 6000 bakarasz hosszúságú éle (O_2O_3;O_2O_4;O_3O_4) . (2.ábra)

Ha összekötjük O_2-t O_3-at és O_4-et az adott gömb a síkot érintő pontjával, akkor ezek a szakaszok merőlegesek lesznek a síkra. Ezen három érintési pont (L;K;M) és a három nagyobb gömb középpontja által körülhatárolt test egy szabályos háromszög alapú hasábot ($O_2O_3O_4LKM$) alkot, azaz a három nagyobb gömb középpontjai által meghatározott szabályos háromszög párhuzamos a síkkal. Hasonlóan az O_1-ből a talajra állított merőleges szakasz is az érintési pontban (I) végződik. (1.ábra)

T az $O_2O_3O_4$ szabályos háromszög középpontja, és mivel $O_2O_1= O_3O_1 = O_4O_1$, a tetraéder O_1-ből induló magasságának a talppontja. O_1T merőleges a talajra, mert merőleges $O_2O_3O_4$-re, ami párhuzamos a talajjal. A keresett távolságot tehát megkaphatjuk, ha összeadjuk az O_1I az O_2L és a tetraéder O_1T magasságát. O_1I és O_2L is sugár, $O_1I=2000$ $O_2L=3000$ bakarasz.

Határozzuk meg O_1F távolságot: $O_3F=3000$ bakarasz, $O_3O_1=5000$ bakarasz, és mivel O_1F az $O_1O_3O_4$ egyenlőszárú háromszög magassága, O_1FO_3 szög derékszög. A Pitagorasz-tétel alapján $O_1F=4000$ bakarasz. (3.ábra)

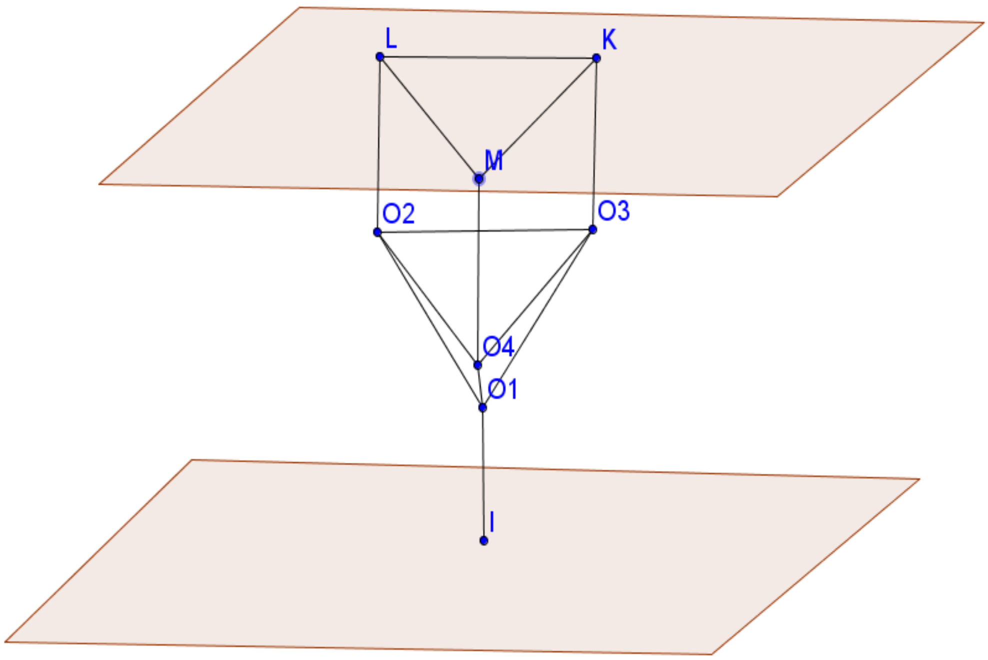
TF szakasz a szabályos háromszög magasságának az egyharmada, mivel T a háromszög középpontja (és ezáltal súlypontja is). TF hossza tehát =1000

Ismét használjuk Pitagorasz tételét O_1T kiszámításához:

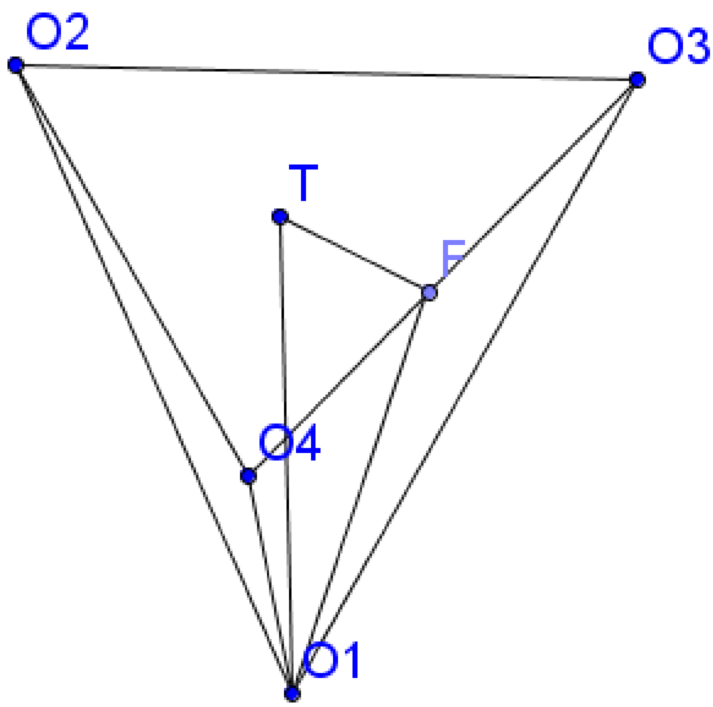
$O_1T=$ =1000× =1000× ≈3605,55 bakarasz. (A versenyen közelítő értéke meg volt adva) (4.ábra)

$O_1I+ O_2L+ O_1T=$ 2000+3000+3605,55=8605,55 bakarasz. A megoldás ennek az egészrésze, azaz 8605.

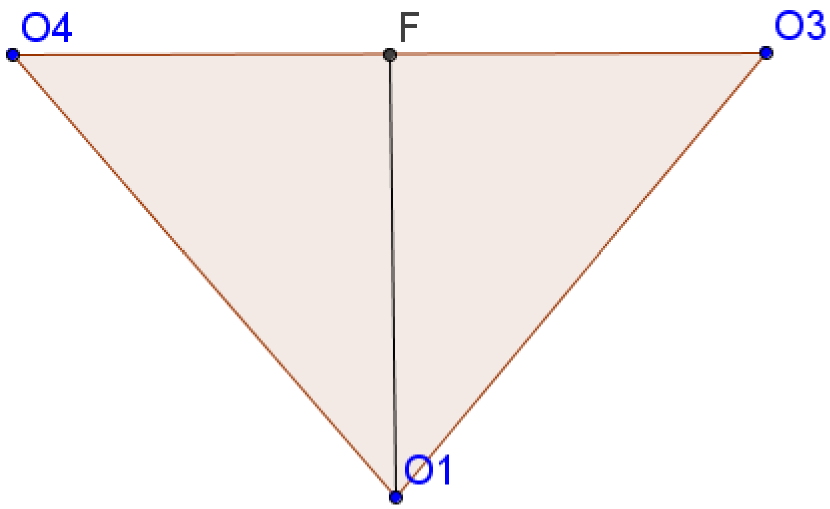
1.ábra



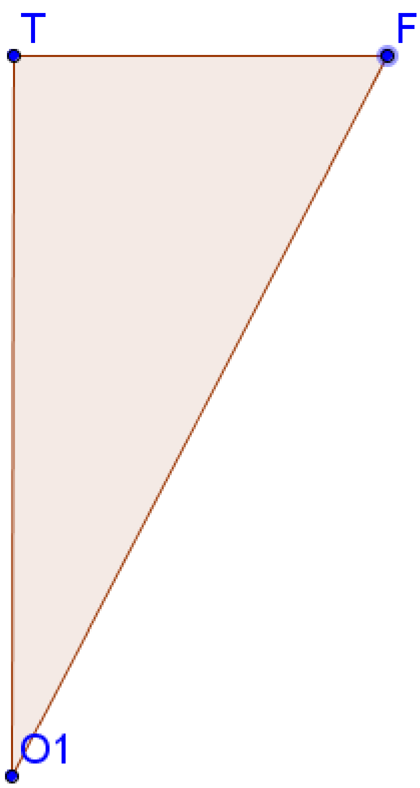
2.ábra



3.ábra



4.ábra



11. Kupán csapom, ha prüszköl…

A házba lépő Alizt különös látvány fogadta: a Baronesz egy sámlin ült középen egy éktelenül ronda csecsemővel a karján, az meg bömbölt, ahogy a torkán kifért. A Baronesz valami altatófélét kornyikált és minden sor végén alaposan megrázta a kis vakarcsot. *„Egy-egy szám a pulyka két fülén a meggyel, a nagyobbat százzal kurtítod, a kicsit megtoldod eggyel, a szorzatuk épp eggyel lesz nagyobb. Az összegük hatszázkilencvenötszöröse, a két szám négyzetének különbsége, kis boci. Egy nagy pofon, mi, az köll? Ide a két szám szorzatát, hoci!”* Ettől az altatótól a baba még keservesebben bőgött és addig fintorgott, amíg mindenki szeme láttára süldőmalaccá változott. Melyik számot akarta hallani a Baronesz?

<u>Megoldás</u>:

Legyen a két szám a és b, úgy, hogy $a>b$ így tehát ab szorzatot keressük.

A feladat szövege alapján a következő két egyenletet írhatjuk fel:

I.: $(a-100)\times(b+1)=ab+1$

$ab-100b+a-100=ab+1$

$a=100b+101$

II.: $(a+b)\times695=\ \ -$

$(a+b)\times695=(a+b)\times(a-b)$

$695=a-b$

$695+b=100b+101$

$594=99b$

$6=b$

$a=695+6=701\ ;\ ab=6\times701=4206$

A megoldás tehát 4206.

13. Mosoly macska nélkül…

Aliz egy útkereszteződéshez ért. „Meg tudnád mondani, kérlek,” – kérdezte a Nevető Macskától, aki pár méterrel odébb ült egy faágon, - merre menjek tovább?” – Ez nagyrészt attól függ, hová akarsz eljutni. – Ó, az szinte mindegy, hogy hová… - Akkor az is mindegy, merre mész. – mondta a Macska. – Na jó… van itt éppen öt darab ötlapú „dobókockám”, ezeket ledobom. Ha a kijött számok között legalább egy darab 1-es, vagy legalább két darab 2-es vagy legalább három 3- as vagy legalább négy 4- es van, vagy ha mind az öt „kockán” 5-ös jön ki, akkor indulj bal felé, amerre a Bolond Kalapos lakik, egyébként pedig jobbra, a Pünkösdi Nyúlhoz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Aliz a Kalaposhoz megy? *Ha az eredmény egyszerűsített tört alakja p/q, akkor válaszul a p+q összeget írjátok.*

Megoldás:

Talán soknak tűnik, de számoljuk végig az eseteket. Célszerű itt a „kedvezőtleneket” megszámolni, ugyebár Aliz ekkor nem a Kalaposhoz, hanem a Pünkösdi Nyúlhoz megy.

Ekkor tehát az öt „dobókocka” közül egyik „kockán” se lehet 1-es, legfeljebb egyen lehet 2-es, legfeljebb 2-őn lehet 3-as, legfeljebb 3-on lehet 4-es és legfeljebb 4-en lehet 5-ös.

Tekintsük az öt „kockát” különbözőnek, és figyeljünk a sorrendre, így az összes eset =3125 lesz.

Rendezzük az eseteket az 5-ösök száma szerint:

1. 4 db 5 ös (ez egy =5-szörös szorzatot jelent) és
   - egy 2/3/4, ez 3

   Összesen ez 5×3=15 eset.

2. 3 db 5-ös (ez egy =10-szeres szorzatot jelent) és
   - 2 db 3/4, ez 2
   - 1-1 2/3/4, ez 2×3=6

   Összesen ez 8×10=80 eset.

3. 2 db 5-ös (ez egy =10-szeres szorzatot jelent) és
   - 3 db 4, ez 1
   - 2 db 4, 1 db 2/3, ez 2×3=6
   - 2 db 3, 1 db 2/4, ez 2×3=6
   - 1-1-1 2/3/4, ez 6

   Összesen 19×10=190 eset

4. 1 db 5-ös (ez egy =5-szörös szorzatot jelent) és
   - 3 db 4, 1 db 2/3, ez 2×4=8
   - 2 db 4, 2 db 3, ez =6
   - 2 db 4, 1-1 2/3, ez 12
   - 1 db 4, 2 db 3, 1 db 2, ez 4×3=12

   Összesen 38×5=190 eset

5. 0 db 5-ös és
   - 3 db 4, 2 db 3, ez =10
   - 3 db 4, 1-1 2/3, ez 5×4=20
   - 2 db 4, 2 db 3, 1 db 2, ez ×3=30

   Összesen 60 eset

Tehát a „kedvezőtlen” esetek száma 15+80+190+190+60=535.

Az összes esetből kivonva megkapjuk a „kedvező” eseteket: 3125-535=2590

Tehát Aliz ——=—— eséllyel megy a Kalaposhoz, a megoldás tehát 518+625=1143.

14. Bolondos teadélután

Öten érkeztek a teadélutánra: Aliz, a Bolond Kalapos, befutott a Pünkösdi Nyúl is, meg a Vombat és Fejér Nyúl. Jókora asztalon szervírozták a teát, a két hosszabbik oldala mentén 20-20 szék, egy-egy pedig az asztalfőn. A Bolond Kalapos persze asztalfőre akar ülni. A többiek egymás közelében szeretnének teázni az asztalnak ugyanazon az oldalán, úgy, hogy ne válassza el őket üres szék. Nekik az is megfelel, ha egyikőjük sem ül közvetlenül a Kalapos mellett, viszont sem Aliz, sem pedig a Kalapos nem akar a Vombat közvetlen szomszédja lenni. Hányféleképpen foglalhatnak helyet ezek után az asztalnál, ha a székek meg vannak számozva?

<u>Megoldás</u>:

Két esetre bontsuk szét a jó ülésrendeket:

I. eset: A Kalapos mellett nem ül senki

Ekkor a maradék négy résztvevő 19 egymás melletti székből 4 egymás mellettire ül le. Ezt a négy széket 16 féleképpen választhatják ki. Nézzük meg, hogy milyen sorrendben ülhet egymás mellett Aliz (A), a Pünkösdi Nyúl (P), a Vombat (V) és a Fejér Nyúl (F), figyelve arra, hogy Aliz és a Vombat nem lehet egymás mellett:

APVF

AFVP

APFV

AFPV

FAPV

PAFV

FVPA

PVFA

VPAF

VFAP

VFPA

VPFA

Ez 12-féle lehetőség.

A Kalapos az asztal két végén ülhet, és a társaság is az asztal két oldala közül választhat, így ebben az esetben összesen 2×2×12×16=768-féleképpen ülhetnek le.

II. eset: A Kalapos mellett ül valaki

A fenti eseteket végignézve megfigyelhető, hogy függetlenül attól, hogy a kalapos az asztalnak melyik végére ül, a másik négy teázó 8-féleképpen tud úgy leülni, hogy a Vombat ne legyen se Aliz se a Kalapos mellett. Mivel itt is a Kalapos az asztal két vége, a többiek pedig az asztal két oldala közül választhatnak, összesen 2×2×8=32-féleképpen ülhetnek le ebben az esetben.

Minden esetet megvizsgáltunk, összesen tehát 768+32=800-féleképpen ülhetnek le, a megoldás 0800.

20. Szombat esti láz

Aliz nagyon unta ezt a krokettmérkőzést: a labdaként használt sünök gurulás helyett csak sündörögtek, a flamingóütők pedig idegesen csapkodtak a szárnyukkal a dörgésben, amit csak ők hallottak. Beszédbe elegyedett az Ál-Teknőccel és a Griffmadárral, akik áhítatosan ecsetelték, milyen felemelő mulatság a Hering-keringő. A múlt szombati bálra annyi kopoltyús táncos sereglett egybe, hogy a táncrendhez ki kellett számolni az összes olyan 2-, és 3-hatványok szorzataként előálló számok összegét, ahol a két kitevő összege 0 és 9 közé eső egész a két szélső érteket is beleértve. Hányan jöttek el a Hering-keringőre? *Válaszul az eredmény utolsó négy jegyéből álló számot írjátok!*

<u>Megoldás</u>:

A keresett összeg a következő: × + × + × +…..+ × +
× + × + × +…..+ × + × + × + × +…..+ × +……+ × =
×(+ + +…..+ + ×(+ + +…..+) + ×(+ + +…..+ +…...+
× ×—— + ×—— + ×—— +…..+ ×—— = —— + 19682 +
2×6560 + 4×2186 + 8×728 + 16×242 + 32×80 + 64×26 + 128×8 + 256×2=
29524+19682+13120+8744+5824+3872+2560+1664+1024+512=86526

A megoldás az utolsó négy számjegyből alkotott szám, tehát a 6526.

23. Aki nem hiszi, járjon utána

A per során Csodaország 7777 lakosa jelentkezett tanúvallomásra. A törvény úgy rendelkezik, hogy a tanúkat egy nagy kerek asztal köré kell ültetni. A regisztráció során a tanúnak fővesztés terhe mellett nyilatkoznia kell, hogy vallomásában igazat mond-e vagy pedig hazudik. Mikor aztán arra került a sor, mindannyian egyszerre kezdtek beszélni és a bíróság megrökönyödésére példás összhangban a következő vallomást tették: „Ha a jobb oldali szomszédom igazat mond, akkor a bal oldali szomszédom hazudik." Ha e feltételek mellett az igazmondók maximális száma M, a minimális számuk pedig m, akkor mennyi az M + m összeg?

Megoldás:

Vizsgáljunk meg 4 esetet aszerint, hogy egy adott ember jobb és bal oldalán igazmondó(I) vagy hazug(H) ember ül, és a kijelentés alapján döntsük el, hogy ez az ember I vagy H:

1. bal:H jobb:H a köztük ülő ember I, mivel az állításban nincs szó arról, ha a jobb oldalán H ül
2. bal:H jobb: I a köztük ülő ember I, hiszen az állítás teljesül
3. bal:I jobb:I a köztük ülő ember H, mert a feltétel (jobb:I) teljesül, de a következmény (bal:H) már nem
4. bal:I jobb:H a köztük ülő ember I, ugyanaz a helyzet, mint az 1. esetben

Elmondható tehát, hogy az asztal körül bármely három szomszédos embert ha tekintjük, akkor ők HIH, HII, IHI vagy IIH elrendezésben ülnek.

Számoljuk ki először M et. Látható, hogy bármely három szomszédos ember közül legalább egy H. 7777 3-mal osztva 1 maradékot ad. Mivel körben ülnek, biztosan legalább ——+1 H lesz, mivel ha csak —— lenne, akkor mivel bármely kettő közé legfeljebb két I ülhet, egy ember megmaradna. Tehát legalább 2593 H nak kell lennie, pontosan ennyire egy jó ülésrend:

I I H I I H I I H I I H I I H……… I I H I I H I H I H és az első I az utolsó H szomszédja, mivel körben ülnek. Ebben az elrendezésben H minimális, tehát I maximális.
M=7777-2593=5184

m értékének meghatározásához H maximális kell, hogy legyen.

Vegyük észre, hogy nem ülhet egymás mellett két H. Ekkor (körasztalról lévén szó) H legfeljebb ———=3888 lehet. Erre egy ülésrend:

I H I H I H I H…….I H I H I H I természetesen az első és utolsó I itt is egymás szomszédai

Így m=7777-3888=3889

Tehát M+m=5184+3889=9073, ez a megoldás.