



Cesenatico 2010

XIth OLASZ NEMZETI CSAPATVERSENY

Döntő – 8 Maggio 2010



Általános Szabályok

- Emlékeztetünk arra, hogy a megfelelő válaszlapon minden feladat megoldásaként egy 0000 és 9999 közé eső egész számot kell írni.
- Ha az eredmény nem egész szám és a feladat szövege nem rendelkezik másként, akkor válaszul az eredmény egész részét kell írni.
- Ha az eredmény negatív vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor válaszul 0000-t kell írni.
- Ha az eredmény egy 9999-nél nagyobb egész szám, akkor válaszul az eredmény utolsó négy számjegyéből álló számot kell írni.
- Számolás közben hasznosak lehetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Időhatárok

- **10 perccel a kezdés után:** már nem lehet Jolly feladatot választani (ilyenkor a zsűri a lista legelső feladatát jelöli ki.)
- **30 perccel a kezdés után:** már nem lehet kérdéseket föltenni a feladatok szövegével kapcsolatban.
- **120 perccel a kezdés után:** a versenynek vége.

10 Könnyű darab

1. Hajnali részegség

1726 május 8-ának hajnalán Sparrow kapitány, Barbosa és Elizabeth némileg másnaposan üldögéltek a kikötői csapszékben. Egy marcona fiatalember ült az asztalukhoz azzal, hogy felcsapna kalóznak. A sokadik áldomás után Jack váratlanul a következő ármányos kérdést szegezte a jelöltnek: Hány olyan évszám van mostantól 2010-ig, amelyik osztható a kérdésemre adott válasszal?

2. Ütközet a tengeren

A kalózok és a Kelet-Indiai Társaság történelmi tengeri ütközetében a Jack Sparrow kapitány vezette flotta n hajója döntő győzelmet aratott Lord Bracket m hajóból álló flottája felett. A hadtörténészek kiderítették, hogy n és m az $x^2 - 126x + 3293 = 0$ egyenlet megoldásai, továbbá hogy Sparrow kapitány n darab hajójának mindegyikén n darab kalóz, a Társaság m darab hajójának mindegyikén pedig m darab tengerész harcolt. Hányan vettek részt az ütközetben összesen?

3. Johohó meg egy üveg rum...

A vérszomjas Barbosa kényszeresen pedáns. Most éppen azon ügyködik, hogy 28 egyforma rumosüveget helyezzen el hét darab polcon a következők szerint:

- minden polcon legyen legalább egy üveg rum;
- az egyes polcokra különböző számú rumosüveg kerüljön;
- minden $n = 1, 2, \dots, 7$ esetén az első n polcra összesen fölrakott üvegek száma ne legyen osztható 3-mal.

Hány lehetőség van így a rumosüvegek elhelyezésére?

4. Menekülési rezonancia

Néhány kalóz kannibálok fogságába került. Ketreben himbálóznak a szakadék fölött és egyetlen reményük a megszabadulásra, ha sikerül belengetni a ketrecet annyira, hogy az a szakadék falához ütközve összetörjön. Elizabeth gyors fejszámolása szerint az ehhez szükséges lengések száma azon pozitív egészek összege, amelyek egyenlők a számjegyeik összegének a négyzetével. Mennyi ez az érték?

5. Kalózádió

A kalózok imádják a rockzenét és alig várják, hogy az új kalózádió sugározni kezdjen. A megfelelő frekvencián a Karib tenger minden zugában vehető az adás. Ez a frekvencia azoknak a négyjegyű számoknak az összege, amelyekre teljesül, hogy

- mind az első és a harmadik jegyük, mind pedig a második és a negyedik jegyük összege 9;
- nincsenek bennük szomszédos páratlan számjegyek;
- az első, tehát az ezresek helyén álló jegyük kisebb, mint akár a második, akár pedig a negyedik jegyük.

Milyen frekvencián sugároz a kalózádió?

6. Reggeli kocogás

Mielőtt kalóznak állt volna, Will, a fegyverkovács igen jámbor fiatalember volt. Reggelenként például kogni szokott: a műhelytől a móló végéig terjedő 5 kilométernyi, igen változatos útvonalat futotta le oda-vissza. Sík terepen 20 km/h átlagsebességgel futott, lejtőn 30 km/h, emelkedőn pedig 15 km/h volt az átlagsebessége. Legfeljebb hány másodperc alatt futhatta le Will a napi adagját?

7. A megkerült iránytű

Jack Sparrow kapitány iránytűje szinte soha nem észak felé mutat. Egy szombat éjjel, pontban éjfélkor azonban mégis a jó irányban állt a tű, de aztán izegni-mozogni kezdett, mégpedig a következő módon: minden 5 perc leteltével 90 fokkal elfordult az óra járásával egyező irányba, majd lényegében azonnal visszafelé kezdett forogni. Egy szempillantás alatt összesen éppen p fokkal fordult el, ahol p a szombat éjfél óta eltelt percek számának a hatszorosa. A következő hét során hány percen át mutatott az iránytű pontosan északi irányba?

8. Egy bankett előkészületei

A Fekete Gyöngy 12 válogatott kalóza bankettre gyülekezik a kikötő csapszékében. Öt darab négyzet alakú asztalt tolnak össze egy-egy oldaluk mentén úgy, hogy mindegyiküknek legyen helye. (Egy ülőhely egy teljes négyzetoldalt jelent.) Hányféleképpen rendezhetik el az asztalokat? A forgatással egymásba vihető elrendezéseket nem tekintjük különbözőnek, de a tükröket igen.

9. A világ pereméig

Barbosa megszerezte a Nagy Világtérkép darabjait és most ezeket a részeket rendezgeti a kabinjában. Sikerült is kialakítania egy szabályos hatszöget. Ennek oldalaira kifelé szabályos ötszögeket épít, amennyit csak tud, úgy, hogy minden hozzáillesztett idomnak legyen közös oldala a meglévő alakzattal és az új részek között ne legyen átfedés. Ezt folytatja tovább: az ötszögek szobajövő oldalaira négyzeteket illeszt kifelé, majd ezek oldalaira szabályos háromszögeket, mindig ügyelve, hogy egy új alakzat ne fedjen át már meglévőt. Legyen p az így összesen elhelyezett szabályos sokszögek száma, q pedig annak a legkisebb pozitív szögnek a mérőszáma fokokban, amelyet két, közös csúccsal rendelkező sokszögszög bezár. Mennyi a pq szorzat értéke?

10. Per una mano in più

Logisztikai okokból a kalózok áttérnek az 5-os számrendszer használatára. Gyakorlásképpen Golyószemű Bill elkészíti az összes olyan 5-ös számrendszerbeli számot, amelyek minden szobajövő számjegyet (a 0-tól a 4-ig) pontosan egyszer tartalmazznak. A nagy sietségben bevette a 0-val kezdődő számokat is. Ha Jack kapitány elárulja neki az összegyűjtött számok átlagát, akkor, mint igéri, az eredményt ő már egyedül is átváltja 10-es számrendszerbe. Mennyi ez az átlag?

14 nem olyan könnyű darab

11. Davy Jones markában

A sötétlelkű Davy Jones különös sanyargatásnak veti alá a kezei között sínylődő veszendő lelkeket. Egy kalapban ott van 91 cédula, egyikük vérpiros, a többin a számok 1-től 90-ig. Aki felbőszíti, annak bekötött szemmel egyesével cédulákat kell húznia a kalapból, egészen addig, amíg ki nem húzza a végzetes piros cédulát. Ezek után annyi törtet kell gyöktelenítenie, ahány darab 7-tel osztható szám van a kihúzottak között. Mekkora ezek számának a várható értéke?

[Válaszul az eredmény egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező szorzatát írjátok.]

12. A Pokol Tornáca

Senki sem tudja valójában, milyen a Pokol Tornáca. Onnan még senki nem tért vissza, hogy elmesélje. Talán jobb így... A kikötőkben mindenestre úgy rebesgetik, hogy a Pokol Tornáca igazából egy böhöm nagy háromszög: a csúcsai P , Q és némelyek még azt is tudni vélik, hogy a harmadik csúcs R . Elég az hozzá, hogy $QR < PR < PQ$, a P -n átmenő külső szögfelező és a QR egyenes metszéspontja S , az R -en átmenő külső szögfelező és a PQ egyenes metszéspontja pedig T . Fennáll továbbá, hogy $SP = PR = RT$. Mekkora a QRP szög mérőszáma szögpercekben?

13. Pénz beszél...

Will Turner sosem felejtí el a hajdani párviadalt, amikor Jack Sparrow megleckéztette. Azóta még 40-szer párbajoztak. Hogy valami izgalom is legyen a dologban, egy kalapba alkalmanként egyenlő összeget tettek, amely teljes egészében annak a párviadalnak a győztesét illette. Az első tét $a_1 = 2010$ dublon volt, a továbbiakban pedig a fejenként betett összeg az $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$ formula szerint alakult, ahol $n = 1, \dots, 39$. A 40. párbaj után Will elégedetten állapíthatta meg, hogy anyagi szempontból pozitív mérleggel zárta a sorozatot. Jack sem panaszkodik: az adott körülmények között a lehető legkisebb összeget vesztette. Hány dublont nyert Will?

14. A varázsgömg

Körkörös védelem helyett Jack egy varázsgömbbel próbálja távoltartani a Leviatánt. A hagyomány szerint a gömb felületére egy-egy 50, illetve 36 cm átmérőjű körvonalat kell gravírozni. A két körvonal síkja merőleges kell legyen és át kell haladjanak két közös ponton, amelyek távolsága 14 cm. Hány milliméter a gömb átmérője?

15. A kapitány orgonája

A többi kockafejű rémhez hasonlóan Davy Jones is műkedvelő muzikus. A Bolygó Hollandi hajóorgonája különleges hangszer: 9999 regisztere meg van számozva 1-től 9999-ig és közülük pontosan azok fehér színűek, amelyek sorszámja valamely x valós számra előáll $[2x] + [4x] + [8x] + [12x]$ alakban, a többi regiszter fekete. Hány fehér regiszter van Davy Jones orgonáján?

16. Jack Sparrow rémlátomása

Jack végül nem tudott túljárni a Leviatán eszén: a szörny szőröstül-bőröstül bekapta a Fekete Gyönggyel együtt. Most, túl a Világ Peremén sínylődve lidércnyomások gyötrik. A Fekete Gyöngy árbockosarából lenézve egy 144 oldalú szabályos sokszöget lát ólálkodni a hajó közelében. Ebben az állapotban nem csoda, ha azon kezd el töprengeni, vajon hány olyan nem egybevágó háromszög van, amelynek csúcsai a sokszög csúcsai közül valók. Mi a válasz?

17. A szabadulás útja

Jack úgy szabadulhat meg a leviatán fogságából, ha megtalálja azon pozitív egész a, b, c , számok legkisebb közös többszörösét, amelyekre $a + b + c = 2010$ továbbá $1/a + 1/b + 1/c = 1/58$. Mennyi az eredmény?

18. A talizmán

Jack Sparrow kapitány talizmánja egy hatszöget formáz, a területe 1922 mm^2 . Egy derékszögű háromszögből kiindulva készült, amelynek milliméterben mérve egészek a befogói. A háromszög oldalaihoz egy-egy négyzetet illesztettek kifelé és a hatszög alakú talizmán az így adódó alakzat konvex burka. Hány mm^2 a kiindulási derékszögű háromszög területe?

19. A kincses sziget koordinátái

A kalózok végre hozzájutottak a pergamenhez, amely a kincses sziget koordinátáit tartalmazza. Csalódottan vették tudomásul, hogy számok helyett a pergamenen csupán az alábbi rejtélyes közleményt lehetett kisillabizálni: ...mindhárom koordináta egy-egy pozitív egész szám, a, b és c , amelyek egyike sem osztója a másiknak. Fennáll rájuk, hogy

$$(a, b) \cdot (b, c) \cdot (a, c) = a \cdot b \cdot c \cdot [a, b, c],$$

végül az $a + b + c$ összeg az adott feltételek mellett a lehető legkisebb... Mekkora $a + b + c$?

20. Szabadulás a börtönből

A Bolygó Hollandi nyirkos zárkájában Jack hiába próbálja megpuhítani az őrködő Golyószemű Billt. Aztán eszébe jut, hogy mint minden kísértetkalóznak, Billnek is van személyes varázsszáma, melynek hallatán kezesbárányá változik. Arra emlékszik, hogy Bill esetében ez a szám két pozitív egész, a és b szorzata. Az a kétjegyű szám, a jegyei különbözők, b pedig az a számjegyeinek a fölcserélésével adódik. Az $a^2 - b^2$ különbség értéke négyzetszám, mégpedig az adott feltételek mellett a lehető legkisebb. Mennyi Bill varázsszáma?

21. A két térkép

Két térkép került a kalózok kezébe. Az első egy 1726 mérföld oldalú négyzetet ábrázol, a négyzetnek mind a négy oldala mentén van egy-egy kikötő. A másik térképen is egy négyzet alakú területet látható, ennek 1250 mérföld hosszú az oldala. Egy különös egybeesés folytán az előbbi négy kikötő éppen a kisebbik négyzet csúcsaiban található. Mindkét négyzetet az oldalakkal párhuzamos színes vonalak osztanak 1 mérföld oldalú négyzetekre; az első térkép vonalai vörösek, a másodiké feketék. Jack tudja, hogy a kalózok kincse valahol egy olyan pontban található, amelyben két vörös és két fekete szakasz is metszi egymást, beleértve a négyzetek kerületét is. Hány pont jöhet így szóba, mint a kincs rejtekhelye?

22. A Majmok kincse

Makacsul tartja magát az a legenda, hogy a Majmok Szigete mesés kincseket rejt. Azt is mesélik, hogy maga a kincs legalább 5 méterrel a tengerszint felett fekvő területen van elásva. A sziget térképének a birtokában Jack Sparrow még a következőket derítette ki:

- a sziget alakja konvex ötszög, amelynek van beírt köre ;
- ha $d(P)$ jelöli a térkép egy tetszőleges P pontjának az ötszög kerületétől mért valóságos lépték szerinti távolságát (tehát a P pontot az ötszög határpontjaival összekötő szakaszok legrövidebbikének a hosszát) akkor a tenger egy T pontjában a víz $\sqrt{\pi} \cdot d(T)$ méter mély, a szárazföld egy S pontja pedig $\sqrt{\pi}/2 \cdot d(S)$ méter magasan van a tenger szintje fölött;
- 12343 m^2 annak a tartománynak a területe, amelyet azok a pontok határolnak, ahol a vízmélység 1 méter, illetve 12835 m^2 azé a tartományé, amelyet azon pontok határolnak, ahol a vízmélység 3 méter.

Hány m^2 a sziget azon részének a területe, ahol a hagyomány szerint eláshatták a kincset?

23. Szerencse fel!

Miután nyugdíjba vonult Tortuga szigetén, Gibbs fedélmester szolid hazárdjátékkal mulatja napjait. Az arajárókat megkéri, hogy húzzanak egy számot a kosarából 1 és 10000 között. A kihúzott szám jegyeit ezután összeszorozza és erre a szorzatra cseréli ki az eredeti számot. A kapott számmal újra megcsinálja ezt a cserét, és ezt így folytatja tovább. Akkor veszít a játékban, ha valamelyik lépésben a kapott szám kisebb lesz 9-nél. Ha viszont minden egyes csere után legalább 9 a kapott szám, akkor a jó öreg fedélmester nyeri a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy nyer?

[Válaszul az eredmény egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező szorzatát írjátok.]

24. Az Emlékek Városa

A kalózok titkos társaságának belső erődjét még soha senkinek nem sikerült bevennie. Az erőd az Emlékek Városának központjában áll. Négy egyforma forgáskúp alkotja, amelyek a sík terepen a csúcsukkal érintkezve helyezkednek el. A palástjaik egyenlő szakaszokban érintkeznek a talajjal. E szakaszok közül a szomszédosak merőlegesek egymásra, a négy szakasz egy keresztet alkot. Az erőd áthatolhatatlanságát az biztosítja, hogy bármely két szomszédos kúp palástja egymást is érinti. Legyen egy ilyen kúp magasságának és az alapkör sugarának az aránya k . Mi az a négyjegyű szám, amelyet a k tizedestört alakjában közvetlenül a tizedesvessző után következő négy darab számjegy alkot?