



Cesenatico 2010

XIth OLASZ NEMZETI CSAPATVERSENY

Elődöntő B – Május 7 2010



Általános Szabályok

- Emlékeztetünk arra, hogy a megfelelő válaszlapra minden feladat megoldásaként egy 0000 és 9999 közé eső egész számot kell írni.
- Ha az eredmény nem egész szám és a feladat szövege nem rendelkezik másként, akkor válaszul az eredmény egész részét kell írni.
- Ha az eredmény negatív vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor válaszul 0000-t kell írni.
- Ha az eredmény egy 9999-nél nagyobb egész szám, akkor válaszul az eredmény utolsó négy számjegyéből álló számot kell írni.
- Számolás közben hasznosak lehetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Időhatárok

- **10 perccel a kezdés után:** már nem lehet Jolly feladatot választani (ilyenkor a zsűri a lista legelső feladatát jelöli ki.)
- **30 perccel a kezdés után:** már nem lehet kérdéseket föltenni a feladatok szövegével kapcsolatban.
- **90 perccel a kezdés után:** a versenynek vége.

1. Toborzás

A Karib tenger kalózáinak matekversenyére az Úr 1726-dik évében került sor, május 7-én. Jack Sparrow kapitány és hűséges társa, Gibbs fedélzetmester legénységet toboroznak Tortuga szigetén. Az n -edik jelentkező a következő kérdést kapja a kapitánytól: "Ha erre a kérdésre n a válasz, akkor mennyi $\frac{(n-1)(n-3)+6}{2}$?" Mit válaszoljon a jelentkező?

2. A pergamen titka

Sparrow kapitány egy térképet tanulmányoz a kincses szigeten. A pergamenen jól kivehető egy egyenlő szárú háromszög csúcsai, A, B és C . Az AB alap hossza 4.4 km, a háromszög csúcsszöge pedig 120 fokos. Jack kapitány éppen a B csúcsban áll. A térkép szerint a kincs a BC szár és az A csúcsból induló szögfelező metszéspontjában van elásva. Hány métert kell megtennie a kapitánynak hogy a legrövidebb úton eljusson a kincshez?

3. Seregszemle

A Fekete Gyöngy legénysége két kompániából áll. Az egyik társaságot Jack kapitány toborozta, ők mindig igazat mondanak. A legénység másik felét Barbosa szedte össze, ez a gyülevész banda mindig hazudik és bármikor készen áll a lázadásra. Indulás előtt a legénység mind a 7776 tagja felsorakozik a fedélzeten, egyetlen nagy kör mentén. Körülnéznek, aztán mindegyikük felkiált: "A két szomszédom közül az egyiket Jack, a másikat pedig Barbosa szerződtette". A körben ott van Gibbs fedélzetmester is, akit Jack kapitány legelsőként hívott a csapatba. A teljes legénység hány tagjában bízhat meg Jack kapitány?

4. Kifeszített vitorlákkal

Tom iránytűje nem csak a kincs irányát mutatja, hanem útközben jelzi a célbajutás várható időpontját is. Az induláskor kijelzett időpont meghatározásakor azzal számolt, hogy a Bolygó Hollandi 12 csomós állandó sebességgel egyenesen a kincs felé tart. (1 csomó sebesség óránként 1 mérföldet jelent.) A hajó viszont a maximális sebességével szeli a habokat nyílegyenesen haladva a kincs felé. Így az érkezés várható időpontja minden megtett 8 mérföld után 1 perccel korábbra tolódik. Hány csomó a hajó sebessége? [Válaszul az eredmény egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező szorzatát írjátok.]

5. Zászló a szélben

Győztek a pártütők, a Fekete Gyöngy árbocán immár Barbosa zászlaja lobog. A háromszög alakú zászlót három hieroglifával írták tele. Az első sorban egy koponya, a második sorban egy koponya és egy pisztoly, a harmadikban egy koponya, egy pisztoly és egy függvénytábla. A negyedik sorban koponya, pisztoly, függvénytábla, majd ismét egy koponya, és így tovább: az n -edik sor n darab hieroglifája a koponya-pisztoly-függvénytábla sorrendben követi egymást. A zászlón összesen 2010 sorban állnak a hieroglifák. Mennyivel több a zászlón a koponya, mint a függvénytábla?

6. Egy háromszögnyi szellem

Tortuga szigetén a Pascal háromszög sorai vannak kőbe vésve, az egyes sorok itt az évente vízbefúlt kalózkodokat tartják nyilván, az 1600. évtől kezdve. A legelső sor: (1) szerint abban az évben rozzant ladikjával egyetlen kalóz veszett a tengerbe. A következő évben bevészt második sor: (1,1) szerint 1601-ben két ladik süllyedt el egy-egy részeg kalózzal; 1602-ben (1,2,1) három vízijármű veszett oda, a fedélzetükön rendre egy, kettő, végül megint egy kalózzal. Így rögzítik a számtáblázat sorai a rideg tényeket, évről évre, egészen az 1726. évig. A babonás Gibbs szentül hiszi, hogy ha egy bárka páratlan számú kalózzal a fedélzetén merül a mélybe, akkor örök időig bolyong majd a világ vizein. Ha igaz, amit a kikötőkben suttnak, akkor összesen hány szellemhajú bukkant fel a tengereken ebben az időszakban?

7. Az aztékok kincse forziere azteco

Mint tudjuk, az aztékok aranyának annak idején lába kelt, és most az utolsó tallérig vissza kell őket szerezni, különben egész órán felettetés lesz. Tudni kéne, hány aranytallér is volt összesen, de Barbosa csak annyit talál erről Sparrow kapitány hajónaplójában, hogy "...az aranytallérok száma az a legkisebb pozitív a egész, amelyre $a = n^5 + 4n^4$ egy páratlan szám négyzete valamilyen n természetes számra." Hány aranyat kell előkeríteni Barbosa kalózáinak?

8. Női fufang

Barbosa fogságában a szépséges Elizabeth csellel próbálkozik: arról faggatja az őrt, hogy melyik az a legnagyobb a pozitív egész, amelyre $a^2 + 200a + 1$ négyzetszám. Mi a válasz?

9. Nehéz menekülés

Will segítségével Jack Sparrow kapitánynak sikerült kijutnia a földalatti börtön legalsó cellájából. El akar jutni a börtön legfelső, 222. szintjére, hogy onnan meneküljön tovább. A szomszédos szinteket lépcsőházak kötik össze. Az 1. és a 2. szint között vezető egyetlen lépcsőháznak egyetlen lépcsőfoka van. A 2. és a 3. szintet két lépcsőház köti össze, az egyikben egyetlen lépcsőfok, a másikban kettő. A 3. és a 4. szint között vezető 3 lépcsőház rendre 1, 2 illetve 3 lépcsőből áll, és így tovább. Hány lépcsőfok található átlagosan a börtön két szintje között?

10. Halálos osztozkodás

Jack először csak azt látta, hogy a Fekete Gyöngy kalózái által zsákmányolt remekmívű ládában talált aranydublonok száma kevesebb mint 100000. Mikorra sikerült kiszámolnia, hogy a mesés zsákmányt igazságosan szét lehet osztani a legénység tagjai között, az izgatott Gibbs rossz hírt hozott: a banda egyik tagja halálra itta magát. Jacknek a szeme se rebhent; higgadtan közölte, hogy az egyenlő kiosztás így is megvalósítható, sőt, mindenkinek 13 dublonnal nő a része. Legfeljebb hány dublon juthatott így végül az egyes kalózkodnak?

11. Hosszú a szolgálat

A Bolygó Hollandi kapitánya épületes módszerrel állapítja meg, hogy a legénység tagjai még hány éven keresztül kötelesek szolgálatot teljesíteni rémséges hajóján. Egy kalapba betesz 90 darab fehér és egyetlen fekete cédulát, majd a soronkövetkező jelölttel egyesével kihúztatja a cédeulákat és háromszög alakban elrendezi őket: a legfelső sorba 1, alá a következő sorba 2, a harmadik sorba 3, és így tovább, a legalsó sorba 13 cédulát téve. A jelölt ezek után annyi évig marad a hajón, ahány sor van a fekete cédulát tartalmazó sor alatt. Mennyi az egy jelölt által leszolgálendő évek várható értéke?

[Válaszul az eredmény egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező szorzatát írjátok.]

12. Küldetésben

A kalózok tíztagú elitkommandója akcióra készül. Mindegyiküknél van egy-egy számkártya a $0, 1, 2, \dots, 9$ számjegyekkel megszámozva. Az akció során a tíz kártya felhasználásával két, egyenként ötjegyű számot kell készíteniük úgy, hogy egyik szám se kezdődjék nullával és az egyik szám kétszer akkora legyen mint a másik, mégpedig úgy, hogy ezek a számok a lehető legkisebbek legyenek. Mi ebben a számpárban a kisebbik szám négy utolsó jegye az előfordulásuk sorrendjében?

13. Ki-ki a saját szerencséjének a kovácsa

Az ifjú Will Turner messze földön híres kardkovács. Házasodni készül, de ahhoz pénz kell: vállalja tehát, hogy kardot kovácsol mind a 10000 tortugai kalóznak. Ha 70 dublont kér darabjáért, akkor mindannyian tőle vásárolnak majd. Ha viszont emeli az árat, akkor minden egyes dublon felár 50-nel csökkenti a vevők számát. Egy-egy kard önköltsége 10 dublon. Ha Will maximális profitra törekszik, akkor hány kalóz vásárolja majd tőle a kardját?

14. Cirkálás ellenszélben

Leviatán, a félelmetes tengeri szörny a Fekete Gyöngy nyomában van. A hajónak mielőbb a kikötőbe kell jutnia; ez tőle északi irányban van pontosan tíz mérföldnyire. A szeszélyesen fújó szélben Sparrow kapitány leleményes útvonalat eszel ki, amely folyamatosan váltakozva halad két könböző irány mentén: észak-kelet felé, amely az északi iránnyal 30 fokos szöget zár be 5 m/s a hajó sebessége, illetve észak-nyugat felé, amely az északi iránnyal 60 fokos szöget zár be és ilyenkor 3 m/s a hajó sebessége. A Leviatán a hajótól déli irányban, attól 10 mérföldnyire kezdi meg az üldözést és egyenletes v cm/s sebességgel száguld északi irányban. Mekkora v -nek az a legnagyobb értéke, amely még nem elegendő ahhoz, hogy a szörny a hajót megelőzve elzárja a kikötő bejáratát?

15. Nyílj ki, Szezám...

Will ugyan megszerezte a kulcsot a ládikához, amelybe Davy Jones szívét elrejtették, de most megakadt. A láda mind a négy oldalán van egy-egy zár. A kulcs szerencsére beleillik mindegyikükbe, de ahhoz, hogy a láda kinyíljon, mind a négy zárban összesen kétszer kell elfordítani, mégpedig meghatározott sorrendben. Erről pedig Will csak annyit tud, hogy legelőször az elülső oldali zárban kell megfordítani a kulcsot, de csak egyszer. Legfeljebb hányszor kell így Willnek próbálkoznia, hogy biztosan kinyíljon a láda?

16. Csapdában!

A Fekete Gyöngy megrekedt egy négyszög alakú tengerszorosban. Ezt az $OABC$ négyszöget teljes egészében tartalmazza az AD átmérőjű O középpontú félkör. A B pont a félkörívnek az a pontja, amelyre a BOA szög 60 fokos. A Bolygó Hollandi a félkörív E pontjában áll lesben, amelyre az EOD szög 30 fokos. A C pont vagy a DE szakaszon van, vagy pedig az EB köríven, de a sűrű ködben ennél többet nem lehet tudni. Az AD 48 m hosszú. Legfeljebb mekkora lehet a szoros területe?