Fazekas nyílt verseny matematikából

8. osztály, speciális kategória

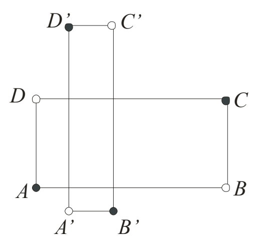
2005. január 12.

A feladatok kidolgozására két óra áll rendelkezésre. Számológép nem használható.
A példák tetszőleges sorrendben megoldhatók. Csak jól indokolt megoldások érnek teljes pontszámot.
Kérjük a versenyzőket, hogy minden lapra írják fel kódszámukat, lehetőleg tüntessék fel az oldalszámot!
A verseny szóbeli fordulójára január 18-án kedden 8.30-tól kerül sor. Pontosítás kedvéért érdeklődjenek titkárságunkon 14. péntektől a 333 53 50-es számon.

1. Elment a gazda a vásárra kecskét, birkát és malacot venni. A kecske darabja 2 aranyba, a birkáé 4 aranyba, a malacé 5 aranyba került. Összesen 30 állatot vett. Hány kecskét, birkát és malacot vett külön-külön, ha összesen 99 aranyat fizetett és kétszer annyi kecskét vett, mint malacot?

2. Megadandó 14 egymástól különböző pozitív egész szám úgy, hogy legkisebb közös többszörösük 3003 legyen, szorzatuk 121-szerese pedig köbszám (azaz valamely egész szám harmadik hatványa).

3. Két téglalap úgy helyezkedik el a síkon, hogy oldalaik egymással párhuzamosak és négy pontban metszik egymást (lásd az ábrát). Bizonyítandó, hogy az $AB'CD'$, $A'BC'D$ négyszögek egyenlő területűek.

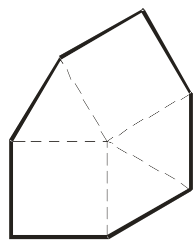


4. Egy 22 fős osztály diákjai a jövő héten moziba szeretnének menni a 18^{00}-kor kezdődő előadásra. Most döntenek, hogy melyik napon menjenek. Tudjuk, hogy minden gyereknek a hét napjaiból legalább öt megfelelő.

a) Következik-e ebből, hogy van olyan nap, amely legalább 16 gyereknek megfelel?

b) Előfordulhat-e, hogy nincs olyan nap, amely legalább 17 gyereknek jó?

5. A mellékelt ábrán egy sokszöget látunk, amelynek minden oldala egyenlő és van olyan belső pontja, amelyből öt csúcshoz húzott öt szakasszal a sokszög öt szabályos sokszögre bontható.



Hány olyan – egymással nem egybevágó – sokszög van, amelynek minden oldala 1 cm-es és van olyan belső pontja, amelyből **négy** csúcsához húzott négy szakasszal négy olyan sokszögre bontható, amelyek közül kettő szabályos háromszög és a másik kettő is szabályos sokszög? (Szabályosnak nevezünk egy sokszöget, ha minden oldala és minden szöge egyenlő.)

Megoldások

1. Elment a gazda a vásárra kecskét, birkát és malacot venni. A kecske darabja 2 aranyba, a birkáé 4 aranyba, a malacé 5 aranyba került. Összesen 30 állatot vett. Hány kecskét, birkát és malacot vett külön-külön, ha összesen 99 aranyat fizetett és kétszer annyi kecskét vett, mint malacot?

I. megoldás (számelmélet, esetekre bontás)
1 malac mellé 2 kecskét kell venni. Ezek összesen 9 aranyba kerülnek. A birka 4 aranyba kerül, tehát a 99-et fel kell bontani egy 9-cel és egy 4-gyel osztható szám összegére. Mivel a 99 és a 9 is osztható 9-cel, így a 4-gyel osztható számnak is oszthatónak kell lennie 9-cel. A 4-gyel és 9-cel is osztható számok a 36-tal oszthatók, így három eset van:

36|	9|	birkák	malacok	kecskék	össz. áll.
0	99	0/4 = 0	99/9 =11	2·11=22	33
36	63	36/4=9	63/9=7	2·7 = 14	30
72	27	72/4=18	27/9=3	2·3=6	27

Látható, hogy csak a középső eset jó, tehát 9 birkát, 7 malacot és 14 kecskét vett. Így összesen valóban 30 állatott vett, $9·4 + 7·5 + 14·2 = 36 + 35 + 28 = 99$ aranyért.

II. megoldás (algebra)
Jelölje a vásárolt malacok számát m, birkákét b. A kecskék száma $2m$. A vásárolt állatok száma:

$$(1) \qquad 2m + b + m = 30.$$

A költött pénz aranyban:

$$(2) \qquad 2·2m + 4·b + 5·m = 99.$$

Az (1) egyenletből $b = 30 – 3m$, amit (2)-be írhatunk:

$$9·m + 4·(30 – 3m) = 99,$$

és rendezés után adódik $m = 7$. Az (1) egyenletből $b = 9$, tehát a vásárolt kecskék száma 14, a birkáké 9, a malacoké 7.
Ez összesen valóban 30 állat, áruk pedig $14·2 + 9·4 + 7·5 = 28 + 36 + 35 = 99$ arany.

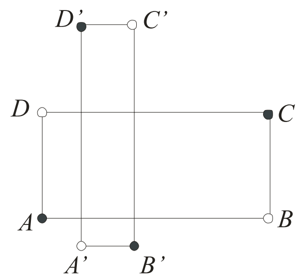
Javítással kapcsolatos megjegyzés
Az ellenőrzés 1 pontot ért.
Szisztematikus próbálkozás is megkaphatta a teljes pontot, ha indokolva volt, hogy miért nincs több eset, több megoldás.

2. Megadandó 14 egymástól különböző pozitív egész szám úgy, hogy legkisebb közös többszörösük 3003 legyen, szorzatuk 121-szerese pedig köbszám (azaz valamely egész szám harmadik hatványa) .

3003 prímtényezős alakja $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ennek a számnak összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ különböző pozitív egész osztója van (a $3^a \cdot 7^b \cdot 11^c \cdot 13^d$ alakú számok, ahol *a, b, c, d* bármelyike 0 vagy 1). Szorozzuk össze mind a 16 osztót! Így $3^8 \cdot 7^8 \cdot 11^8 \cdot 13^8$-t kapunk, hiszen pld 3-as prímtényezőt a $3^1 \cdot 7^b \cdot 11^c \cdot 13^d$ alakú számokból kapunk, ahol *b, c, d* bármelyike 0 vagy 1, és ezekből épp 8 van. Pontosan akkor lenne köbszám a szorzat 121-szerese, ha mindegyik kitevő osztható lenne hárommal, kivéve a 11 kitevőjét, amely hárommal osztva 1 maradékot adna. Két szám elhagyásával az egyetlen elérhető megfelelő szorzat a $3^6 \cdot 7^6 \cdot 11^7 \cdot 13^6$. Tehát az elhagyandó számok szorzata $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2$. Erre egy lehetőség van, ha a két szám $3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$ és $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003$. Tehát a 14 szám a mellékelt táblázatban megadottakkal egyezik meg.

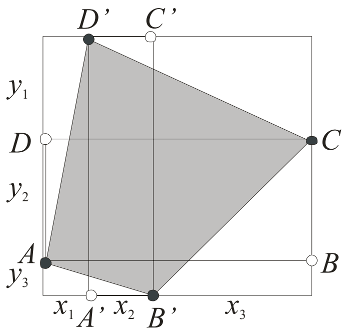
prímtényezők				
3	**7**	**11**	**13**	**szorzat**
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**13**
0	0	1	0	**11**
0	0	1	1	**143**
0	1	0	0	**7**
0	1	0	1	**91**
0	1	1	0	**77**
0	1	1	1	**1001**
1	0	0	0	**3**
1	0	0	1	**39**
1	0	1	0	**33**
1	0	1	1	**429**
1	1	0	0	**21**
1	1	1	0	**231**

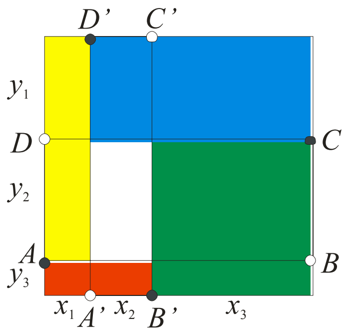
3. Két téglalap úgy helyezkedik el a síkon, hogy oldalaik egymással párhuzamosak és négy pontban metszik egymást (lásd az ábrát). Bizonyítandó, hogy az *AB'CD'*, *A'BC'D* négyszögek egyenlő területűek.



I. megoldás (Algebra)

Foglaljuk az oldalakkal párhuzamos nagyobb téglalapba az ábrát és nézzük meg, hogy a vizsgált négyszögek a nagy téglalapból mekkora részek levágásával kaphatók meg!



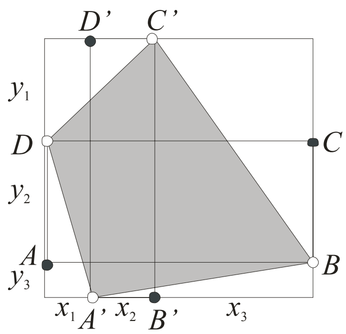


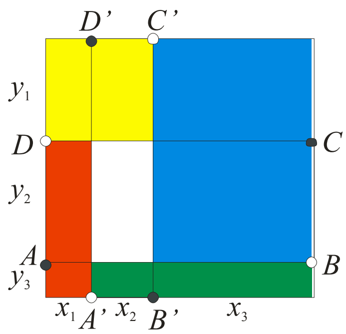
Az *AB'CD'* négyszög a nagy téglalapból négy kisebb téglalap felének levágásával kapható meg. E négy téglalap területei:

$$y_3\cdot(x_1+x_2)=x_1\cdot y_3+x_2\cdot y_3$$
$$x_3\cdot(y_3+y_2)=x_3\cdot y_3+x_3\cdot y_2$$
$$y_1\cdot(x_2+x_3)=x_2\cdot y_1+x_3\cdot y_1$$
$$x_1\cdot(y_1+y_2)=x_1\cdot y_1+x_1\cdot y_2.$$

Az *A'BC'D* négyszög esetén is négy kisebb téglalap felét kell levágni a nagy téglalapból. E négy téglalap területei most:

$$y_3\cdot(x_2+x_3)=x_2\cdot y_3+x_3\cdot y_3$$
$$x_3\cdot(y_1+y_2)=x_3\cdot y_1+x_3\cdot y_2$$
$$y_1\cdot(x_1+x_2)=x_2\cdot y_1+x_2\cdot y_1$$
$$x_1\cdot(y_2+y_3)=x_1\cdot y_2+x_1\cdot y_3.$$

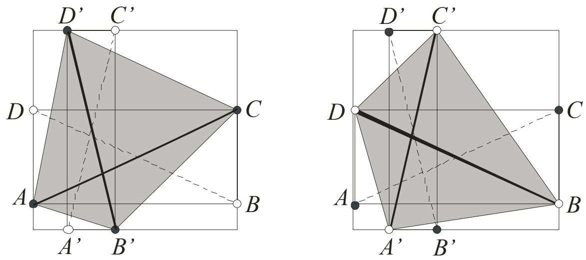




Látható, hogy a kimaradó rész összterülete a két esetben ugyanannyi (a kilenc $x_i\cdot y_j$ alakú szorzatból csak $x_2\cdot y_2$ marad ki mindkét esetben). Tehát a vizsgált négyszögek valóban egyenlő területűek.

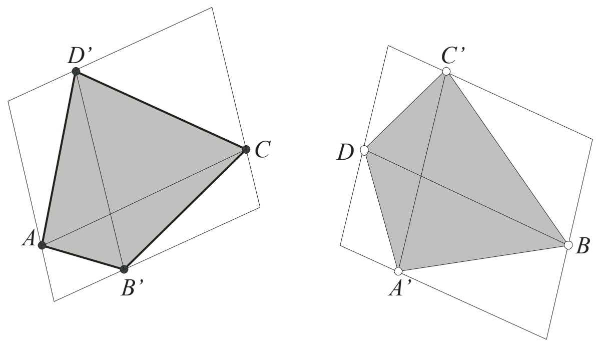
II. megoldás (Kétszeres darabolás)
Az I. megoldásban nincs szükség az egyes kis téglalapok területének képletére, csak azt kell megmutatnunk, hogy az egyik esetben a négy színes téglalap területének összege megegyezik a másik eset négy téglalapjának összterületével. Ez azért igaz, mert mindkettő kiszámolható úgy, hogy a teljes téglalap területéből kivonjuk a középen fehéren maradt kis téglalap területét. A kisebbítendő és a kivonandó érték, egyezik a két esetben, sőt maguk a téglalapok is.

III. megoldás (Elegáns)
Az *AB'CD'* négyszög átlói *AC* és *B'D'*, az *A'BC'D* négyszög átlói pedig *A'C'* és *BD*. A téglalap átlói egyenlő hosszúak, tehát *AC* = *BD* és *B'D'* = *A'C'*, azaz az egyik négyszög átlói ugyanolyan hosszúak, mint a másik négyszög átlói.



Ráadásul a két négyszögben az átlók szöge is megegyezik, hiszen az egyik négyszög *AC*, *B'D'* átlóit bármely vízszintes (vagy függőleges) egyenesre (azaz az eredeti téglalapok oldalegyeneseivel párhuzamos egyenesre) tükrözzük, akkor a másik négyszög *A'C'*, *BD* átlóival párhuzamos egyeneseket kapunk.

Ha két négyszögben az átlók hossza és az átlók szöge is egyenlő, akkor egyenlő területűek.



Valóban, az ilyen négyszögek a csúcsaikon át az átlóikkal párhuzamos egyenesekkel paralelogrammákká egészíthetők ki. Ezek a paralelogrammák egymással egybevágóak, hiszen oldalaik és szögeik is egyenlők. A paralelogrammák területének fele a vizsgált négyszög területe, ami az ábrákon megjelenő kisebb paralelogrammák segítségével igazolható.
Ezzel az állítást igazoltuk.

4. Egy 22 fős osztály diákjai a jövő héten moziba szeretnének menni a 18^{00}-kor kezdődő előadásra. Most döntenek, hogy melyik napon menjenek. Tudjuk, hogy minden gyereknek a hét napjaiból legalább öt megfelelő.

a) Következik-e ebből, hogy van olyan nap, amely legalább 16 gyereknek megfelel?

b) Lehetséges-e, hogy nincs olyan nap, amely legalább 17 gyereknek megfelel?

a) Igen, következik.
Képzeljük el, hogy a gyerekek kiraknak az osztályterembe egy heti naptárt, és mindenki x-et rak a neki megfelelő napok mellé. Így az x-ek száma legalább $5 \cdot 22 = 110$ lesz. Ha minden nap csak 15 vagy annál kevesebb gyereknek felelne meg, akkor az x-ek száma nem nőné túl a $15 \cdot 7 = 105$-öt. Tehát lesz legalább egy olyan nap, amely legalább 16 gyereknek megfelel.

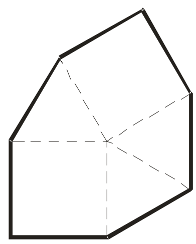
b) Nem következik. Tegyük fel, hogy 21 gyereknek 5-5 nap felel meg, mindegyiknek más 5. (Ez lehetséges, mert 7 napból öt épp 21-féle módon választható ki, annyiféleképpen ahányféleképpen kettő: $7 \cdot 6/2=21$) Így minden nap ugyanannyi gyereknek, jelesül $5 \cdot 21/7=15$-nek felel meg. A kimaradt, 22. diák ezt az értéket legfeljebb eggyel tudja növelni bármelyik nap esetében.

Javítással kapcsolatos megjegyzés
A b) feladatrészt sokan így oldották meg: Igen lehetséges, ha ugyanis mindenkinek csak 5 nap felel meg, akkor 110-e jelölnek x-szel, pld öt nap 16-ot és két nap 15-öt. Így egyik nap sem felel meg 17 diáknak.

Ez a megoldás logikailag hibás, illetve hiányos. Attól még, hogy a 110-et el lehet így osztani, nem biztos, hogy kijön a diákok 5-5 megfelelő napjával két napra 15, ötre 16 „megfelelés". Erre példát is kell adni.

Egy hasonló példa: Ha tudjuk, hogy egy kocka alakú doboz térfogata 27 cm^3, akkor még nem lehetünk biztosak benne, hogy belefér egy 20cm^3 térfogatú dolog. Lehet, pld, hogy az a „dolog" egy hosszú rúd.

5. A mellékelt ábrán egy sokszöget látunk, amelynek minden oldala egyenlő és van olyan belső pontja, amelyből öt csúcshoz húzott öt szakasszal a sokszög öt szabályos sokszögre bontható.

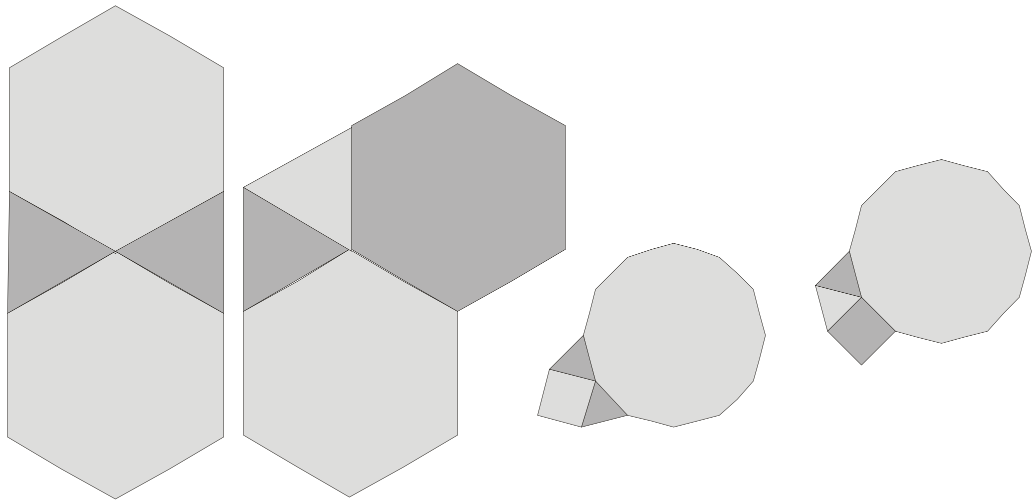


Hány olyan – egymással nem egybevágó – sokszög van, amelynek minden oldala 1 cm-es és van olyan belső pontja, amelyből **négy** csúcsához húzott négy szakasszal négy olyan sokszögre bontható, amelyek közül kettő szabályos háromszög és a másik kettő is szabályos sokszög? (Szabályosnak nevezünk egy sokszöget, ha minden oldala és minden szöge egyenlő.)

Négy darab egységnyi oldalhosszúságú szabályos sokszöget kell egy közös csúcsuknál egymás mellé helyeznünk úgy, hogy ne fedjék egymást, de közös csúcsuk körül épp lefedjék a 360°-os szöget. A négy sokszög közül kettő háromszög, ezek 60°-60°, összesen tehát 120°-os szöget fednek le, marad 240°. Legyen a két kimaradt szabályos sokszög *m* ill. *n* oldalú. $n=m=6$ épp megfelel, hiszen szabályos sokszög egy szöge 120°. Általában, a szabályos *k* szög egy belső szöge $180°-360°/k$. Ebből következik, hogy nagyobb oldalszámú szabályos sokszögnek nagyobb a belső szöge is. Így, ha nem mind a két szabályos sokszög hatszög, akkor van kisebb oldalszámú is, ötszög vagy négyszög.

Ha pld $n = 5$, akkor $240° = (180°-360°/5) + (180°-360°/m)$, amiből *m*-re nem adódik egész szám, míg $n = 4$ esetén $240° = (180°-360°/4) + (180°-360°/m)$-ből $m = 12$.
Tehát a két szabályos háromszög mellett a másik két szabályos háromszög vagy két hatszög vagy egy négyzet és egy tizenkétszög.

Mindkét esetben két-két nem egybevágó elrendezés van, hiszen a két szabályos háromszög vagy egymás mellett van, vagy nem. A hatszögeknél azonban az egymás mellé kerülő 60°-os és 180°-os szög miatt eltűnik a csúcs, hosszabb lesz az oldal 1-nél, ezek nem jó megoldások. Összesen tehát két megfelelő sokszög van egybevágóság szerint.



Javítással kapcsolatos megjegyzés
Kevesen igazolták pontosan, hogy több megoldás nincs, pld sokan természetesnek vették, hogy nagyobb oldalszámú szabályos sokszögnek nagyobbak a belső szögei.