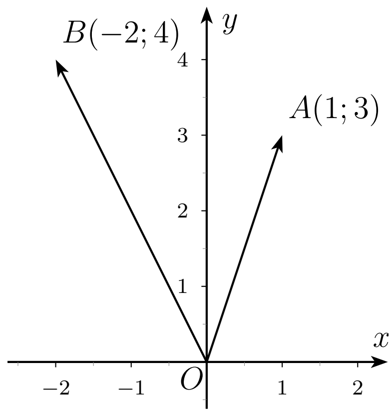
Vektorok a síkban – algebrai összefoglaló

A síkbeli koordinátarendszerben a derékszögű koordinátáikkal adjuk meg a pontokat: pl $A(1;3), B(-2;4)$. Az O kezdőpontú helyvektorrendszert a koordinátarendszerhez illesztve ezeket a pontokat *helyvektorukkal*, az $\overrightarrow{OA}$, illetve az $\overrightarrow{OB}$ vektorokkal is megadhatjuk.



A szokásos konvenció szerint adott végpontú helyvektort a megfelelő **kövér** kisbetűvel jelölünk, tehát $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.
A helyvektorok segítségével a sík bámely két A, B pontjára felírhatjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort[1] a végpontok helyvektorának különbségeként, tehát

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Az $\overrightarrow{OA}$ vektor szokásos felbontása a tengelyekkel párhuzamos összetevőkre

$$\overrightarrow{OA} = 1 \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot \mathbf{j}, \tag{$*$}$$

ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ az úgynevezett *bázisvektorok*: tengelyirányúak és egységnyi abszolút értékűek. Ezek megválasztása miatt a (*) felbontásban az együtthatók éppen az A pont derékszögű koordinátái. A (*) felbontás egy tömörebb formájában el szokás hagyni a bázisvektorokat és csak a két számot, az $\mathbf{a}$ vektor *komponenseit* írják le. Az iskolában ezt a (*) felbontás elrendezésére emlékeztető módon $\mathbf{a}(1;3)$ formában teszik, mi ezt most és a továbbiakban a komponenseket **egymás alá** írva az

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

[1] Nem tévesztendő össze a vele egyenlő **origó** kezdőpontú $\overrightarrow{OC}$ helyvektorral!

formában írjuk le és ha hangsúlyozni akarjuk ezt az elrendezést, akkor *oszlop*vektorról beszélünk. A $\mathbf{b}$, illetve $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ vektorokra így

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés A (**) felírás a (*) alakot jelöli. Ennél azonban többet tud: ahogyan az 1367 alak többet tud, mint például a régi rómaiak MCCCLXVII jelölése. Ezekkel az alakokkal ugyanis **számolhatunk**: ehhez nincs szükség arra, hogy kiolvassuk a *jelentésüket*, mint $1\cdot10^3+3\cdot10^2+6\cdot10^1+7\cdot10^0$ és $4\cdot10^2+8\cdot10^1+1\cdot10^0$; a számjegyekkel és a helyiértékekkel az iskolában tanult módon ügyeskedve megkapjuk az **összeg alakját**, 1848-at. (Próbálja meg valaki az összeget, netán a két szám szorzatát a római jelöléssel kiszámolni...) A (**) alak komponensei hasonló szerepet játszanak, mint a tízes számrendszerbeli alak számjegyei, a felírásból elhagyott bázisvektorok pedig, akár a helyiértékek.[2]

A vektorok közti műveleteket ebben az alakban végezve:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) \\ 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

de ugyanígy

$$3\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ vagy akár } 5\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

A legutóbbi $5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ egy bizonyos értelemben a legáltalánosabb típusú kifejezés, amelyet a vektorműveletek segítségével (összeadás, kivonás, számmal való szorzás) a két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ felhasználásával el lehet készíteni. Kettő vagy több vektor ilyen "keverékét" (vegyünk valamennyi $\mathbf{a}$-t és valamennyi $\mathbf{b}$-t, majd adjuk össze vagy vonjuk ki őket) az adott vektorok **lineáris kombinációjának** nevezünk. A vektoralgebra tanult azonosságai biztosítják, hogy lineáris kombinációkkal a megszokott algebrai keretek között számolhatunk, tehát például

$$(5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) - (7\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) = -2\mathbf{a} + 6\mathbf{b} = -2(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}).$$

Két vektor lineáris kombinációinak általános alakja $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, ahol λ és μ tetszőleges valós számok[3], az együtthatók. Természetes módon készíthető lineáris kombináció

[2]Ez a hasonlat nem is annyira légbőlkapott, mint amilyennek látszik: pontos megfelelője van ugyanis annak az eljárásnak, melynek során a tízes számrendszerbeli alakról áttér az ember egy másik, mondjuk kettes számrendszerbeli alakra: ennek során most a bázisvektorokat kell lecserélni: ennek megfelelően változnak majd a komponensek.

[3]Két vektor összege és különbsége is a vektorok egy-egy lineáris kombinációja: az együtthatók ebben az esetben $\lambda = \mu = 1$, illetve $\lambda = 1, \mu = -1$

kettőnél több vektorból is, a fenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektorok esetén például

$$2\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 5\mathbf{c} = -3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 - (-4) \\ -9 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

Az iskolában tanult *vektorfelbontási tétel* kimondja, hogy ha adottak a síkban a nem párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok (ezek most nem azok), akkor a sík minden vektora egyértelműen áll elő ezek alkalmas lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy bármely $\mathbf{p}$ vektorhoz – vagy a megfelelő P ponthoz, amelyre $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ – van, mégpedig egyetlen – olyan valós x, y számpár, hogy $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$. Ha például $P(5; 7)$, akkor a felbontás szerint

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

A két vektor egyenlősége azt jelenti, hogy a komponensek egyenlők[4]: $x - 2y = 5$, illetve $3x+4y = 7$. Az algebra nyelvén ez az alapvetően geometriai feladat szokványos számtanpéldává alakult át: egy kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldani.

A sík bizonyos pontjai között fennálló kapcsolatot lineárisnak nevezzük, ha kifejezhető e pontok helyvektorainak valamilyen lineáris kombinációi között fennálló egyenlőséggel. Ilyen lineáris kapcsolat például, ha a B pont az AC szakasz felezőpontja: $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}$. Egy ilyen egyenlőséget általában nullára[5] szokás rendezni, ebben az esetben tehát azt kapjuk, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Feladat Mit jelent az A, B, C, D pontokra nézve, ha (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{d} = \mathbf{0}$?
(b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$?

Látható, hogy egy ilyen lineáris kapcsolat átrendezhető úgy, hogy a megfelelő helyvektoroknak egy lineáris kombinációja $\mathbf{0}$; ráadásul – egyébként semmitmondó volna – ebben a nullvektor értékű lineáris kombinációban **nem minden együttható nulla**.

Ha adott vektorokra ilyesmi teljesül általában, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó vektorok **lineárisan összefüggők**. Például egy szakasz két végpontjának és a felezőpontjuknak, vagy egy paralelogramma négy csúcsának a a helyvektorai lineárisan osszefüggők. Ez azt is jelenti, hogy – elhagyva az esetleg nulla együtthatóval szereplő vektorokat – a relációban szereplő bármelyik vektor kifejezhető a többiek

[4]Hasonló típusú, de **téves** az a következtetés, amikor valaki az $\frac{x-2y}{3x+4y} = \frac{5}{7}$ egyenlőségből arra szeretne következtetni, hogy a bal oldali tört számlálója 5, a nevezője pedig 7. A vektorok felbontásával ellentétben a törtek felírása **nem egyértelmű!** A figyelmes olvasó észreveheti, hogy itt is a vektorfelbontás egyértelműségét használjuk ki: egy vektor csak egyféleképpen írható fel az **i, j** bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

[5]azaz $\mathbf{0}$-ra: természetesen a null**vektorról** van szó.

lineáris kombinációjaként. A példa vektorai, **a, b** és **c** is lineárisan összefüggők. Ez azt is jelenti, hogy ez a tulajdonság a szóban forgó vektorok együttes tujadonsága, erre nézve nincsen köztük kitüntetett.

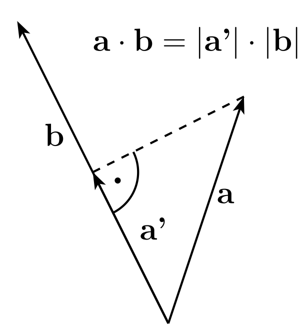
Az **a** és **b** vektorok közül viszont egyikük sem fejezhető ki a másik segítségével (Miért?): ez a két vektor **lineárisan független.** A vektorfelbontási tétel úgy is fogalmazható, hogy síkban legfeljebb két lineárisan független vektor adható meg, illetve hogy a nullvektor csak $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b}$ alakban áll elő az **a** és **b** vektorok lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés Úgy tűnhet, a vektorok lineáris függetlensége nem egyéb annak a nyilvánvaló kapcsolatnak a nagyképű megfogalmazásánál, hogy a két vektor nem párhuzamos. A sík vektorai körében valóban nincsen többről szó, a vektorok viszont nem síkbeli objektumok. Térben például három lineárisan független vektor is megadható (több már nem: a térben bármely négy vektor lineárisan összefüggő), a tér három vektorára nézve pedig azt jelenti a lineáris összefüggőség, hogy ezek a vektorok *egy síkban vannak.*

Az a viszony, hogy három pont, A, B és C egy egyenesen vannak, szintén lineáris kapcsolat. (Miért?) Ugyanígy az is, ha AB és CD párhuzamosak. Ezek után némileg váratlan lehet, hogy az AB és CD *merőlegessége* nem ilyen: nem fejezhető ki olyan formában, hogy az **a, b, c, d** helyvektorok valamilyen lineáris kombinációja nullvektor. (Ennek a lehetetlenségnek a bizonyítása most nem látszik: a versenyre való felkészülés során viszont az olvasó remélhetőleg megbirkózik vele.)

A skalárszorzat

Két vektor skalárszorzatának fogalmát az iskolából ismeri az ember. Fizikai jelentése (munka) szerint az egyik vektornak a másik vektor irányára eső előjeles vetületének és a másik vektor hosszának a szorzata[6].



[6]Ebben a formában nem világos, hogy miért *kommutatív.*

A geometriai értelmezés szimmetrikus: eszerint a skalárszorzat a két vektor abszolút értékének és a szögük koszinuszának a szorzata. A mi **a** és **b** vektoraink megadásának módja például igen fáradságossá tenné a skalárszorzatuk kiszámolását ezekre a definíciókra támaszkodva; jó kis koordinátageometriai gyakorló feladat a koszinusztétellel megfejelve...

A skalárszorzat algebrája viszont azonnal adja a választ: az **ab** skalárszorzat értéke $1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 10$. Innen például mindenféle ábra nélkül kiolvasható, hogy a két vektor hegyesszöget zár be. (Miért?) Általában pedig az

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \text{ és a } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

vektorok **ab** skalárszorzata váratlanul egyszerű: a megfelelő komponensek szorzatának az összege: $x_a x_b + y_a y_b$.

Az így – vagy másképp – kiszámolt mennyiség népszerű tulajdonsága, hogy pontosan akkor nulla[7], ha a két vektor **merőleges egymásra!**[8] Ha például $D(-1;7)$, akkor $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 0$, tehát $AB \perp CD$.

Megjegyzés Mintha nem ezt igértük volna: kell-e ennél jobb feltétel két vektor merőlegességére? Jobb biztosan nem, csak az a bökkenő, hogy az $\mathbf{ab} = 0$ feltétel nem *lineáris*, azaz nem egy lineáris kombináció nulla értékét mondja ki. A skalárszorzat egy másodfokú kifejezés, a lineáris kombináció pedig elsőfokú.

Gyakorló feladatok a skalárszorzat alkalmazására

1.) Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói pontosan akkor merőlegesek, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.

2.) Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha az oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

3.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder három szemközti élpárja közül kettőben merőlegesek az élek, akkor a harmadikban is azok.

4.) $\mathbf{a}=\binom{1}{3}$. Mi azon P pontok halmaza a síkban, amelyekre az **ap** skalárszorzat értéke 2?

A determináns

Négy számnak, a, b, c, d-nek az alábbi, 2×2-es elrendezését

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

[7] a 0 **szám**ról van szó; két vektor skalárszorzata egy szám!

[8] Vektorok skalárszorzata tehát úgy is lehet 0 (szám), hogy egyikük sem **0** (vektor).

determinánsnak – pontosabban 2×2-es determinánsnak nevezik. Egy ilyen elrendezéshez kiszámolt[9] $ad - bc$ szám a determináns *értéke.* Például a

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{determináns értéke} \;\; 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10.$$

A determináns tehát a kötött formát, illetve az ebből a formából kapott számot jelenti. Rendkívül hasznosnak bizonyult, részint a forma alapján kapható algebrai tulajdonságai, részint a jelentése, illetve mindezek általánosíthatósága miatt.

Feladat Ha adottak az a, b, c, d értékek, akkor a

$$\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

determinánst $4! = 24$-féleképpen tölthetjük ki. Hányféle értéket kaphatunk az így elkészített determinánsok kifejtésekor?

Az ember általában a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer "megoldóképletében" találkozik először a determinánsokkal: ha adott az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer, akkor – például az egyenlő együtthatók módszerével – megoldva kapjuk, hogy ha a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determináns[10] értéke – azaz $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nem nulla, akkor az egyenletrendszer megoldásai egy-egy determináns hányadosaként írhatók fel:

$$x = \frac{D_x}{D} \;\; \text{és} \;\; y = \frac{D_y}{D} \;\; \text{ahol} \;\; D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \;\; \text{és} \;\; D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Aki nem hiszi, számoljon utána! Ez a *Cramer szabály* néven ismert eredmény szó szerint általánosítható n lineáris egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszerekre; ehhez "csak" a determináns fogalmát kell általánosítani.

Feladat Oldjuk meg a Cramer szabály alkalmazásával a 3. oldalon található

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

[9] Egy determináns értékének a kiszámolását a determináns *kifejtésének* nevezik.

[10] Ezt a determinánst az **egyenletrendszer determinánsának** nevezik.

egyenletet.

A 2 × 2-es determináns – egy – jelentése

Vegyük szemügyre a már felírt $1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10$ értékű determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

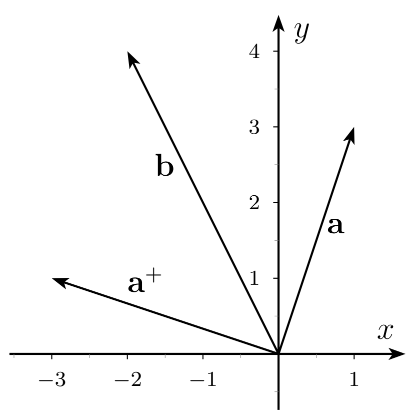
A számolás nagyon hasonlít ahhoz, ahogyan két vektor skalárszorzatát számolja ki az ember. Ha kicsit átrendezzük a szereplőket és az előjeleket és **összegként** írjuk a két szorzat különbségét:

$$1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 4$$

akkor a kapott kifejezés két vektor skalárszorzataként értelmezhető: egyikük

$$\mathbf{a}^+ = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ a másik pedig régi ismerősünk: } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Az iskolában tanultak alapján azonosítható ez az **a**-ra nagyon hasonlító $\mathbf{a}^+$ vektor: nem más, mint az **a** **+90°-os elforgatottja**!



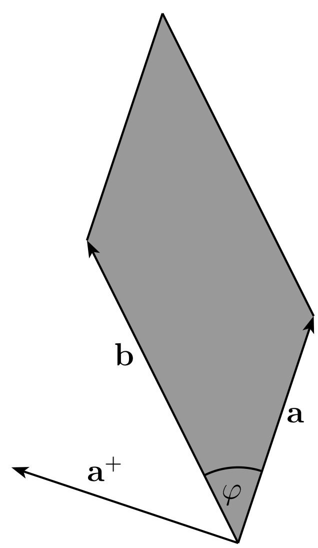
Megjegyzés Ugyanezt a számolást hajtjuk végre és így persze ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az **a** vektort szorozzuk a **b** vektor −90°-os elforgatottjával:

$$\mathbf{b}^- = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és így } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}^-) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10.$$

Ha tehát egy adott D determinánshoz elkészítjük azt a két vektort, **a**-t és **b**-t, amelyek komponensei a determináns első, illetve második oszlopában álló számok, a determináns úgynevezett *oszlopvektorait*, akkor a determináns értéke egy[11] skalárszorzatként is értelmezhető:

$$D = (\mathbf{a}^+)\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{b}^-).$$

Az $(\mathbf{a}^+) \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzat a definíció szerint a két vektor abszolút értékének és a hajlásszögük koszinuszának a szorzata. A $+90°$-os forgatás miatt ez a koszinusz most az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögének a **szinusza**, másrészt $|\mathbf{a}^+|=|\mathbf{a}|$, így a kiszámolt skalárszorzat nem más, mint az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ **vektorok által kifeszített vektorparalelogramma területe!**



Itt azonban vigyáznunk kell! Ismert, hogy ha két oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik. Tehát például

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 4 = -10.$$

Ugyanaz a két vektor és ugyanaz a paralelogramma. Valami mégis megváltozott: a vektorok **sorrendje**, és erre a változásra a determináns előjelváltással reagál. Az ábránkon ez úgy mutatkozik meg, hogy új determinánsunk első oszlopvektorát, a $\binom{-2}{4}$-et most **negatív** forgatás viszi a második oszlopvektorral, az $\binom{1}{3}$-mal egyállású vektorba. Vagy másképpen: ha a determináns első oszlopvektora $\overrightarrow{OP_1}$, a második

[11]pontosabban kettő

oszlopvektor pedig $\overrightarrow{OP_1}$, akkor a determináns oszlopait fölcserélve megváltozik az OP_1P_2 háromszög **körüljárása**! Az a terület, amelyet a determináns kiszámol, érzékeny erre a körüljárásra: a determináns tehát előjeles terület, nem más mint az

az oszlopvektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területe!

Feladatok 1.) Gondoljuk végig ennek az állításnak a bizonyítását általában is, az oszlopvektorok tetszőleges elhelyezkedése mellett. (A példánkban az **a**= $\binom{1}{3}$ vektort pozitív hegyesszögű forgatás vitte a **b**= $\binom{-2}{4}$ vektorral egyállású vektorba.)
2.) Láttuk, hogy a 3. oldal vektoregyenlete átírható az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5, \\ 3x + 4y &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszerré. A *Cramer szabály* szerint ennek az egyenletrendszernek a megoldása

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{és} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{ahol} \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Hol vannak azok a vektorparalelogrammák, amelyek területének aránya megadja az egyenletrendszer megoldását? Adjunk ennek alapján geometriai magyarázatot a *Cramer szabályra.*
3.) Egy determináns értéke nem változik, ha egyik oszlopához hozzádjuk a másik oszlop egy számszorosát. Mit jelent ez a tulajdonság a fenti, geometriai értelmezésben?

Záró megjegyzések

1.) Ismert, hogy egy determináns értéke nem változik, ha a főátlójára tükrözzük:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix},$$

hiszen kifejtéskor ugyanazokat az előjeles szorzatokat adjuk össze. Ennek a tükrözésnek az a formai következménye, hogy a determináns oszlopaiból sorok, a soraiból pedig oszlopok lesznek, miközben a sorrendjük (első, második) megmarad. A fenti geometriai értelmezés szerint ennek az a meglepő következménye, hogy egy determináns oszlop-, illetve sorvektorai **egyenlő területű paralelogrammákat feszítenek ki!**

2.) A már idézett *Cramer szabály* szerint egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha a rendszer determinánsa nem nulla. A fenti értelmezésben azonnal leolvasható, hogy ez a feltétel geometriailag azt jelenti, hogy az oszlop(sor) vektorok által kifeszített paralelogramma területe nem nulla. Megfordítva, az egyenletrendszerrel akkor van baj, ha a determináns értéke nulla, az oszlop(sor) vektorok által kifeszített paralelogramma elfajuló, ezek a vektorok[12] párhuzamosak.

[12]Innen egyébként az is nyomban adódik, hogy egy determináns oszlopvektorai pontosan akkor párhuzamosak, ha a sorvektorai azok.