Lineáris algebra – bevezető

1.) *Egyismeretlenes egyenletek – bemelegítés*

Az ilyen egyenletek rendezés után $ax = b$ alakba írhatók. Ha $a \neq 0$, akkor a(z egyértelmű) megoldás $x = b/a$. Ha $a = 0$, akkor $b \neq 0$ esetben nincs megoldás, ha pedig b is nulla, akkor az egyenletnek végtelen sok megoldása van – pontosabban minden szám megoldás.

Ez így közhely, az ember tulajdonképpen restelkedik leírni. Gondoljuk meg viszont, hogy egy feladat a legritkább esetben kér olyasmit, hogy "oldjuk meg a $0 \cdot x = 3$ egyenletet"; egy elsőfokú egyenletet általában rendezés *előtti* állapotában kap az ember. Ilyenkor pedig fontossá válhatnak a fenti közhelyek.

1.1 feladat A p, q paraméterek milyen értékeire van megoldása az

$$\frac{x-p}{x-2} + \frac{x-q}{x-3} = 2$$

egyenletnek? Milyen p, q étékekre egyértelmű a megoldás?

1.2 feladat Oldjuk meg – lehetőleg kalkulátor nélkül – az alábbi elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket:

$$(a)\quad \frac{x-551}{449} + \frac{x-552}{448} + \frac{x-553}{447} = \frac{x-449}{551} + \frac{x-448}{552} + \frac{x-447}{553}.$$

$$(b)\quad \frac{600-x}{66} + \frac{633-x}{33} = \frac{643-x}{23} + \frac{160-x}{506}.$$

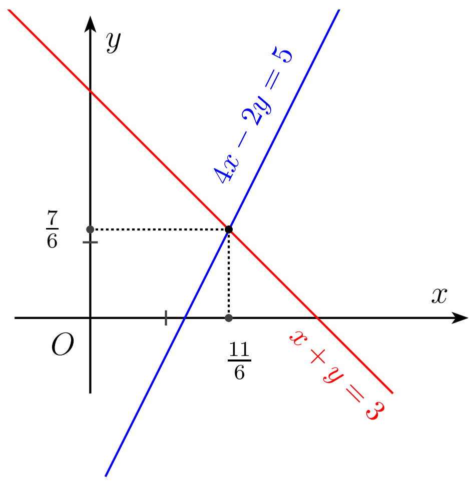
2.) *Egy egyenletrendszer arcai*

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 5 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

Az egyenletrendszert a szokásos módszerek valamelyikével – egyenlő együtthatók módszere, vagy az egyik ismeretlen kifejezése – megoldva kapjuk, hogy a megoldás: $x = 11/6,\ y = 7/6$.

2.1 *Grafikus megoldás* Az egyenletek megoldáshalmaza egy-egy egyenes, az egyenletrendszer megoldása pedig a metszéspontjuk.[1]

[1] A megoldáshalmazok persze számpárokból állnak, ezeket a koordinátarendszerben **ábrázolva** kapunk most egyeneseket. Ilyen értelemben nevezek egy pontot – két egyenes metszéspontját – egy egyenletrendszer megoldásának. A továbbiakban erre a megkülönböztetésre nem fogok minden alkalommal kitérni, tehát ugyanúgy, ahogy számokról, mint a számegyenes pontjairól, számpárokról, mint a koordinátsík pontjairól – sőt, mint vektorokról – beszélek majd.



1. ábra

A koordinátageometriai ábrázolásban két, egy síkban fekvő egyenes lehetséges viszonyát végiggondolva világosan látszik, mi történhet egy kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerrel általában.

2.1 feladat Változtassuk meg a második egyenletben az x együtthatóját úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása. Megváltoztathatók-e az így módosított egyenletrendszer jobb oldalán álló számok – egyikük vagy mindkettő – úgy, hogy az egyenletrendszernek legyen megoldása?

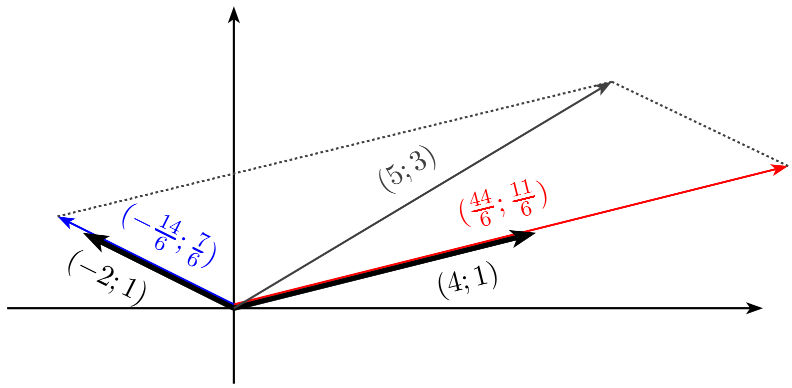
2.2 feladat (a) Az *egyenlő együtthatók módszerével* a második egyenlet kétszeresét az elsőhöz adva a $6x = 11$, a második egyenlet négyszereséből az elsőt kivonva pedig a $6y = 7$ egyenletet kapjuk. A *síkon* ezeknek az egyenleteknek is egyenesek a megoldáshalmazai. Rajzoljuk meg ezt a két egyenest is az eredeti egyenletek megoldáshalmazaival együtt.
(b) Csatoljuk az (1) egyenletrendszer két egyenletéhez harmadikként az egyenletek összegét, az $5x - y = 8$ egyenletet. Mit állíthatunk a kapott, immár három egyenletből álló rendszerről? Mit jelent ez az új, harmadik egyenlet megoldáshalmazára nézve? Mi a helyzet, ha összeg helyett a két egyenlet különbségét csatoljuk a rendszerhez? És ha mindkettőt? Hogyan általánosítható mindez?

2.2 *Megjelennek a vektorok – és a mátrixok*

Ha az (1) rendszer két egyenletét "összekapcsoljuk", akkor egy régi feladattá változik:

$$x\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.$$

Ebben az olvasatban a feladat azt kívánja, hogy az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokból készített vektort *bontsuk fel* az x, illetve az y együtthatóiból készített vektorokkal párhuzamos összetevőkre.



2. ábra

Ez a felbontás a szokásos módon megszerkeszthető és a megoldások szerepe is világos. Szokatlan lehet, hogy a vektorokat oszlop formában írtam a megszokott $(4; 1), (-2; 1)$, illetve $(5; 3)$ helyett. Ennek megvan az oka[2], egyrészt az, hogy ez a felírás jobban illeszkedik az egyenletrendszer elrendezéséhez, másrészt a hagyományos írásmódot követve nem világos, hogy vektorról vagy pedig pontról van-e szó[3], végül, de egyáltalán nem utolsó sorban azért, mert ez a forma van összhangban a **mátrixok szorzásával** (ld később).

Ismeretes, hogy amennyiben az együtthatókból készített két (oszlop) vektor nem párhuzamos, akkor a felbontás létezik és egyértelmű. Ha ez a két vektor párhuzamos, akkor abban az esetben kapunk megoldást, ha a konstansokból készített oszlopvektor is ezekkel egyirányú, ilyenkor viszont végtelen sokat.
Az első értelmezés szerint az (1) egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságának az a szükséges és elegendő feltétele, hogy a két egyenes ne legyen párhuzamos. Mint tudjuk, ez pontosan akkor teljesül, ha a normálvektoraik, az ismeretlenek együtthatóiból elkészített "sorvektorok" , a $(4; -2)$, illetve $(1; 1)$ nem párhuzamosak. Most ugyanennek azt a szükséges és elegendő feltételét kaptuk, hogy az együtthatókból készített "oszlopvektorok" ne legyenek párhuzamosak.

[2]Nem az, hogy így megspórolunk egy elválasztó karaktert.

[3]A koordinátasík pontjai persze azonosíthatók a helyvektoraikkal, csak arra kell figyelni, hogy két pontot például nem szokás összeadni, míg a helyvektoraikat igen.

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletrendszer együtthatóiból általában is "természetes módon" olvashatók ki az

$$\mathbf{r_1} = (a_{11} \quad a_{12}) \quad \text{és} \quad \mathbf{r_2} = (a_{21} \quad a_{22})$$

sorvektorok, illetve a

$$\mathbf{c_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{c_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

oszlopvektorok[4].

2.3 feladat Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ sorvektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha a $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ oszlopvektorok párhuzamosak.[5]

Megjegyzés A (2) egyenletrendszer egy további lehetséges értelmezése a következő; nem igazán új, lényegében a legelső, koordinátageometriai leírás átfogalmazása. Ha az együttható oszlopvektorok elkészítéséhez hasonlóan az x, y ismeretleneket is egyetlen $\mathbf{u}$ vektorrá kapcsoljuk össze, akkor az egyenletek bal oldalán *skalárszorzatok* ismerhetők fel: egy-egy sorvektornak és ennek az $\mathbf{u}$ vektornak a skalárszorzata:

$$a_{11}x + a_{12}y = \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{illetve} \quad a_{21}x + a_{22}y = \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{u}.$$

Az egyenletrendszer így az

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{u} &= b_1, \\ \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{u} &= b_2. \end{aligned}$$

alakba írható. Ebben a megközelítésben tehát – a jobb oldalon álló számok formájában – ismerjük ezeknek a skalárszorzatoknak az értékét[6] és ebből kell meghatároznunk az ismeretlen $\mathbf{u}$ vektort. Gondoljuk meg, hogy az egyértelmű megoldhatóságnak most is az a feltétele, hogy a *sorvektorok* ne legyenek párhuzamosak.

2.4 feladat Oldjuk meg az (1) egyenletrendszert ebben a formában, azaz a skalárszorzatok alapján *szerkesszük meg* az ismeretlen $\mathbf{u}$ vektort.

[4] A **c**, illetve **r** rövidítéseket az angol **c***olumn*–oszlop, illetve **r***ow*–sor szavak kezdőbetűiből vettem át, elsősorban azért, mert a magyar "oszlop" kezdőbetűje zavaróan keveredik a 0-val.

[5] Vagy szakszerűbben: a sorvektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha az oszlopvektorok azok.

[6] Geometriailag ez azt jelenti, hogy lényegében ismerjük az ismeretlen vektornak a sorvektorokra eső merőleges vetületét.

Definícófele A (2) egyenletrendszerből természetes módon olvasható ki az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es számtáblázat. Az ilyen – általában n sorból és m oszlopból álló – számtáblázatokat **mátrixnak** nevezik. A versenyen csak 2×2-es mátrixokkal kapcsolatos feladatok lesznek, így a továbbiakban nagyrészt ilyenekről lesz szó.

A mátrixokkal kapcsolatos alapvető fogalmak, elnevezések és jelölések megtalálhatók a **Wikipédia** alábbi magyar nyelvű oldalán:

http:// hu.wikipedia.org/wiki/Mátrix_(matematika)

Javasoljuk ennek alapos tanulmányozását[7], különösen a mátrixok **szorzásáról** szóló részt!

A 2×2-es mátrixoknak két *sora* van, egy első és egy második, illetve két *oszlopa*, ugyancsak egy első és egy második. Mint ahogy eddig is tettem, a sorokra, illetve az oszlopokra időnként vektorként hivatkozom majd, ha a szerepük – mint a fenti példákban – ezt indokolja. Ezek maguk is mátrixoknak tekinthetők (azok is) és ennek olykor van értelme.[8] Az oszlopvektorok 2×1-es, a sorvektorok pedig 1×2-es mátrixok. (Egy mátrix méretének magadásakor mindig a sorok számát írjuk előre.) A sorokban (de ha úgy tetszik, az oszlopokban) a mátrix *elemei* állnak. Ezek többnyire számok, de – végső soron – maguk is 1×1-es mátrixok. a_{12} például az első sor második, ugyanakkor a második oszlop első eleme. (Mindig a szóban forgó elem sor-számát írjuk előbb.) Hasonlóan, egy 6×8-as mátrixban például a_{53} az 5. *sor*, $\mathbf{r_5}$ harmadik eleme, egyúttal pedig a 3. *oszlop* $\mathbf{c_3}$ ötödik eleme.

A szövegben a mátrixokat vastagon szedett nagybetű jelöli: **A, B, X, Y**,... Lényegében kizárólag 2×2-es mátrixokról lesz szó, így a méret megadását a továbbiakban a rövidség kedvéért elhagyom; ha mátrixról beszélek, akkor ez majdnem mindig 2×2-es mátrixot jelent. Azt azonban tudni kell, hogy az eredmények – értelemszerű módosításokkal – általánosíthatók. A tankönyvek általában rögtön általános mátrixokra mondják ki a definíciókat és a megfelelő tételeket, így gyakran elsikkad ezek szemléletes geometriai és algebrai eredete.

2.3 *Az egyenletrendszer mátrix alakja*

Az (1) egyenlet ezek után egész másképp is szemlélhető. Ismét "ragasszuk össze" az x, y változókat egyetlen

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[7] A megfelelő angol nyelvű oldal alaposabb és nyelvgyakorlatnak se utolsó!

[8] Ha nem fontos a vektorok geometriai jelentése: ld. pl az $\mathbf{A(Bu)}=\mathbf{(AB)u}$ azonosságot később, a 3.2 pontban

(oszlop)vektorrá és ezt az $\mathbf{u}$ vektort a továbbiakban ne *ismeretlennek* tekintsük, hanem egyetlen **változónak**! Az egyenletrendszer bal oldala ehhez az $\mathbf{u}$ vektorhoz a

$$\begin{pmatrix} 4x-2y \\ x+y \end{pmatrix}$$

vektort számolja ki. Aki elolvasta a **Wikipédia cikkben** a mátrixok szorzására vonatkozó részt, annak számára világos, hogy ez a vektor – egy 2×1-es mátrix – egy 2×2-es és egy 2×1-es mátrix szorzata! A 2×2-es mátrix az egyenletrendszer együtthatóiból készíthető úgy, hogy az első oszlopba az x, a másodikba pedig az y együtthatói kerülnek:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az így elkészített $\mathbf{A}$ mátrixot az **egyenletrendszer mátrixának** nevezik; ezt a kifejezést használni fogom a későbbiekben. Az egyenletrendszer mátrix alakjában ezzel az $\mathbf{A}$ mátrixszal szorozzuk meg – balról – az $\mathbf{u}$ vektort[9], mint a 2×1-es $\binom{x}{y}$ mátrixot. Az egyenletrendszer ebben a nyelvjárásban azt mondja, hogy az így kapott vektor egyenlő a

$$\mathbf{b} = \binom{5}{3}$$

vektorral. Mindez felírható a hagyományos $ax = b$ formára emlékeztető módon is, mint $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, de most persze minden mást jelent:

$$(\mathbf{M}) \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Ebben a környezetben az egyenletrendszer megoldása kétféle szemléletben képzelhető el: az algebrai megközelítés a $2x = 3$ egyenlet "megoldását" próbálja "lemásolni": ahogy az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva megkapjuk x értékét. Ennek az algebrai lépésnek most olyasmi felelne meg, ha az $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ egyenlet mindkét oldalát *el lehetne "osztani"* $\mathbf{A}$-val! Hogy ez értelmezhető-e egyáltalán és hogyan, annak kiderítéséhez a mátrixokkal való számolás algebrai tulajdonságait kell tisztázni.

A másik megközelítés függvényként vizsgálja ezt az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{Au}$ leképezést, mégpedig geometriai szemmel, mint a *sík transzformációját.* Az egyenletrendszer megoldása így azt az $\mathbf{u}$ vektort(pontot) keresi, amelynek a képe a fenti transzformáció során az ismert $\mathbf{b}$ vektor(pont). Ebben a köntösben a megoldás – elvben – azonnal adódik: a szóban forgó transzformáció **inverzét**[10] kell alkalmazni a $\mathbf{b}$ vektorra(pontra). Hogy ezt az inverz transz-

[9]Vagy akinek jobban tetszik: az $\mathbf{A}$ mátrixot szorozzuk meg – jobbról– az $\binom{x}{y}$ mátrixszal. Vigyázat: a mátrixok szorzása nem kommutatív!

[10]A transzformációnak, mint a sík pontjain értelmezett **függvény**nek az inverzéről van szó!

formációt hogyan kapjuk meg, annak tisztázásához a mátrixokkal megadható geometriai transzformációk vizsgálatára van szükség.
Ez a két út persze ugyanazt járja körül: a velük végezhető műveletek révén a mátrixok *algebrai* objektumként, a *hatásukon keresztül* pedig geometriai transzformációként, függvényként is vizsgálhatók. A forma és a funkció szoros kapcsolata mutatkozik meg abban, ahogy ez a kétféle megközelítés ugyanazokat a tulajdonságokat tárja fel.

3.) *Mátrix-algebra dióhéjban*

3.1 *Lineáris műveletek*

Mátrixokat "elemenként" lehet számmal szorozni, azonos méretű mátrixokat pedig elemenként lehet összeadni vagy kivonni. Ezt a vektoroktól örökölték, ahogy azt is, hogy ezekre a műveletekre teljesülnek a vektorok és végső soron a számok körében megszokott algebrai azonosságok[11]. A vektorokéhoz hasonlóan készíthetők a mátrixok *lineáris kombinációi.* Ha például a már felírt $\mathbf{A}$ mátrix mellett

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

akkor a $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ mátrix

$$3\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 - 2\cdot 1 & 3\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot(-2) - 2\cdot(-1) & 3\cdot 1 - 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix},$$

ahogy azt várja az ember.

3.2 *A szorzás*

A különbségek a **szorzással** kezdődnek. Az olvasó mostanra már remélhetőleg tisztában van azzal, hogyan kell kiszámolni két mátrix szorzatát. Biztos ami biztos, egy ilyen szorzatot most nyilvánosan is kiszámolok; a mi $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixainkra:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot 3 + (-2)\cdot 6 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 2 & 33 \end{pmatrix}.$$

Ez az összetett és igen számolásigényes művelet az $\mathbf{A}$ mátrix *sorainak* és a $\mathbf{B}$ mátrix *oszlopainak* a szintjén zajlik; a szorzatmátrix elemeit egy-egy sor, illetve oszlop skalárszorzataként kapjuk. Ha az első tényező **sor**vektorai $\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_2}$, a második tényező **oszlop**vektorai pedig $\mathbf{c_1}$ és $\mathbf{c_2}$, akkor a szorzatmátrix szerkezete

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \end{pmatrix}(\mathbf{c_1} \;\; \mathbf{c_2}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1 c_1} & \mathbf{r_1 c_2} \\ \mathbf{r_2 c_1} & \mathbf{r_2 c_2} \end{pmatrix}.$$

[11] Tehát például $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ vagy $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$.

Megjegyzés Ebben az elrendezésben mintha egy 2×1-es és egy 1×2-es "mátrixot" szoroznánk: az "elemek" most *vektorok*, a köztük elvégzett szorzás pedig a *skalárszorzat.*

A szorzásnak ezt az aszimmetriáját látva – az első tényező sorai (skalár)szorzódnak a második tényező oszlopaival – egyáltalán nem meglepő, hogy a szorzatmátrix **függ a tényezők sorrendjétől: a mátrixok szorzása nem kommutatív!**

Általában tehát más lesz az eredmény, ha egy $\mathbf{X}$ mátrixot *balról*, illetve *jobbról* szorzunk egy $\mathbf{Y}$ mátrixszal. (Számoljuk ki a $\mathbf{BA}$ szorzatot!) Ha ez a kétféle szorzat valamilyen okból mégis egyenlő, akkor ennek örülünk és azt mondjuk, hogy az $\mathbf{X}$ és az $\mathbf{Y}$ mátrixok *fölcserélhetők* vagy *kommutálnak*[12].

A bonyodalmak ellenére a mátrixszorzás jól megvan az összeadással, a kivonással és a számmal való szorzással: tehát a lineáris kombinációval. Akár balról, akár pedig jobbról szorozzuk meg mátrixok egy lineáris kombinációját egy $\mathbf{X}$ mátrixszal, az eredmény a résztvevő mátrixok adott irányból kiszámolt "$\mathbf{X}$-szereseinek" lesz a megfelelő lineáris kombinációja[13]

3.1 feladat (*klasszikus...*) Vektorok körében remekül használható az

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$$

azonosság. A felírt $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokkal számoljuk ki az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$, illetve a $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ mátrixokat[14]. Mit tapasztalunk? Mi ennek az oka?

3.2 feladat Tudjuk, hogy vektorok skalárszorzata lehet 0 úgy, hogy egyik vektor sem $\mathbf{0}$. (Mikor?) Mondhatnánk persze, hogy a skalárszorzat nem "tipikus" művelet, az eredmény (egy szám) nem ugyanolyan tipusú, mint mint a műveletben résztvevő vektorok. A mátrixok szorzása a leghagyományosabb értelemben vett művelet: két mátrixot összeszorozva egy mátrixot kapunk eredményül.

Adjunk meg ezek után két mátrixot, $\mathbf{X}$-et és $\mathbf{Y}$-t, amelyek szorzatában **minden elem** 0, de sem $\mathbf{X}$, sem pedig $\mathbf{Y}$ nem ilyen.

Mátrixok szorzása **asszociatív** : ez kétféleképpen is működik: egyrészt $\mathbf{(XY)Z{=}X(YZ)}$, másrészt bármely $\mathbf{u}$ vektorra $\mathbf{(XY)u{=}X(Yu)}$.

Megjegyzés Az asszociativitás egy bizonyos értelemben fontosabb a kommutativitásnál: azért beszélhetünk három vagy több szám összegéről vagy szorzatáról, mert a valós számok összeadása és szorzása asszociatív. Három szám különbségéről nem szokás beszélni: a

[12] A *kommutatív* jelzőből képzett ige.

[13] Egyszerűbben: mátrixok összegét(és különbségét) tagonként lehet mátrixszal szorozni, akár balról, akár pedig jobbról; az eredmény természetesen általában más.

[14] A szokásos módon az $\mathbf{X}$ mátrix négyzete az $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$ szorzatot jelöli.

kivonás nem asszociatív művelet. A vektorok skalárszorzata kommutatív, de nem asszociatív (miért?). Ennek az a következménye, hogy a praktikus és hatékony négyzetre emeléssel le is zárul a vektorok hatványozása; nem azért, mintha egy $\mathbf{a}^3$-höz hasonló képződményt nem lehetne lenyomni a hallgatóság torkán; azt már valahogy megszokta az ember, hogy egy negatív szám hatványa[15] hol pozitív, hol negatív, az viszont mégis túlzás lenne, hogy egy vektor hatványa hol vektor, hol szám! Ugyanígy fejreáll az olyasmi, mint például $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3$: a skalárszorzatra nézve nincs binomiális tétel! Binomiális tétel mátrixokra sincsen (ld. a **3.1 feladatot**), ennek viszont nem az az oka, hogy mátrixokat nem lehet hatványozni.

3.3 feladat A fenti $\mathbf{A}$**,** $\mathbf{B}$ mátrixokra számoljuk ki az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3$, illetve a $\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A^2B} + 3\mathbf{AB^2} + \mathbf{B}^3$ mátrixokat. Mit tapasztalunk? Adjunk magyarázatot.
3.4 feladat Számoljuk ki az $\mathbf{A}^2$ és $\mathbf{B}^2$ mátrixok szorzatát, majd a már kiszámolt $\mathbf{AB}$ mátrix négyzetét. Mit tapasztalunk? Adjunk magyarázatot.

3.3 *Speciális mátrixok*

A nullmátrix A mátrixok körében a 0 szám, illetve a $\mathbf{0}$ vektor szerepét a *nullmátrix* játssza. Ennek minden eleme 0, mindkét sora és oszlopa $\mathbf{0}$-vektor.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algebrai tulajdonságai megejtően banálisak: minden $\mathbf{X}$ mátrixra $\mathbf{0}+\mathbf{X}=\mathbf{X}$, illetve $\mathbf{0}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Az egységmátrix Az 1 szerepét az $\mathbf{I}$-vel jelölt *egységmátrix* játssza:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sorokban és az oszlopokban is a bázisvektorok állnak: $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$. Ahogy várja az ember, minden $\mathbf{X}$ mátrixra $\mathbf{I}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{X}$.

3.5 feladat Legyen $\mathbf{u}=\binom{u_1}{u_2}$ tetszőleges vektor. Mi az

$$\mathbf{Iu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ vektor?}$$

A síknak milyen transzformációja az $\mathbf{u}\mapsto\mathbf{Iu}$ leképezés?
3.6 feladat Tegyük fel, hogy az $\mathbf{X}$ mátrixra teljesül, hogy minden $\mathbf{Y}$ mátrixra $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{X}$ az egységmátrix.

Megjegyzés Jegyezzük meg, hogy szorzáskor mind a nullmátrix, mind pedig az egységmátrix bármely $\mathbf{X}$ mátrixszal fölcserélhető.

[15]pozitív egész kitevőről van szó

3.7 – fontos – feladat Az $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ "mátrixegyenletben" olyan $\mathbf{X}$ mátrixot keresünk, amelynek a négyzete az egységmátrix. A szokásos módon $\mathbf{0}$-ra rendezve és a bal oldalon szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{X}+\mathbf{I})(\mathbf{X}-\mathbf{I}) = \mathbf{0},$$

tehát vagy $\mathbf{X}$=$\mathbf{I}$ vagy pedig $\mathbf{X}$=-$\mathbf{I}$.

$$\text{Az}\quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$$

mátrix négyzetét kiszámolva viszont szintén $\mathbf{F}^2 = \mathbf{I}$ adódik. (Ellenőrizzük a számolást!) Hol a hiba?

Diagonális mátrixok Az

$$\mathbf{A}_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

típusú mátrixokat *diagonális* – átlós[16] – mátrixoknak nevezzük. Az ilyen mátrixok szerkezete egyszerű: a nullmátrix és az egységmátrix is ilyenek.

3.8 feladat Számoljunk utána, hogy diagonális mátrixok lineáris kombinációja is diagonális.

3.9 feladat Számoljunk utána, hogy diagonális mátrixok szorzata is diagonális. Mi áll a szorzat átlójában?

3.10 feladat Hallgassuk meg az *Imagine!*-t John Lennontól.

3.11 feladat Mi történik az $\mathbf{X}$ mátrixszal, ha balról, illetve jobbról megszorozzuk egy diagonális mátrixszal?

3.12 feladat Az

$$\mathbf{A}_{\lambda,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

diagonális mátrixot, amelyben tehát *egyenlők* az átlóban álló elemek, *skalármátrixnak* nevezik. (A nullmátrix és az egységmátrix ilyenek.) Ellenőrizzük, hogy egy skalármátrix minden $\mathbf{X}$ mátrixszal kommutál. Mi az $\mathbf{A}_{\lambda,\lambda}$ skalármátrixszal való szorzás hatása egy tetszőleges $\mathbf{X}$ mátrixra? (Ezekre a kérdésekre mindenféle számolás nélkül adódik a válasz, ha a skalármátrixot $\lambda \cdot \mathbf{I}$ alakban írjuk fel.) A síknak milyen transzformációja az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{A}_{\lambda,\lambda}\mathbf{u}$ leképezés? Mi lehet az elnevezés magyarázata?

3.4 *Mátrix determinánsa – a szorzási tétel*

[16] A 2×2-es elrendezésben az a_{11}, a_{22} elemeket szokás a mátrix *főátlójának* nevezni. Ennek megfelelően a másik két elem alkotja a mátrix mellékátlóját.

Az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsának nevezik és $det\mathbf{A}$-val vagy $|\mathbf{A}|$-val jelölik az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinánst. A nullmátrix determinánsa nyilván 0 – mi lenne más – az egységmátrix determinánsa pedig 1. Általában, egy diagonális mátrix determinánsa az átlóban álló elemek szorzata. A legfontosabb kapcsolatot a két fogalom – mátrix és determináns – között, amely az elemek hasonló elrendezését is indokolja, a **nagyon fontos** szorzási tétel mondja ki:

Mátrixok szorzatának a determinánsa egyenlő a mátrixok determinánsának a szorzatával! Vagy tömörebben:

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

3.13 feladatféle Úgy tűnik, a tétel bizonyítására nincs más mód, mint hosszú, unalmas számolás. Lehet gondolkodni, hogy a két oldalon álló kifejezések *jelentése*[17] milyen más más megközelítést tesz lehetővé.

Megjegyzések 1.) Figyeljünk fel a szorzás kétféle jelentésére az egyenlőség két oldalán: a bal oldalon két mátrix, a jobb oldalon pedig két szám szorzata áll.
2.) Ez az $\mathbf{X} \mapsto |\mathbf{X}|$ megfeleltetés olyasféleképpen működik, akár egy szótár: a mátrixok bonyolult és a valós számok egyszerűbb "szókészlete" között teremt kapcsolatot. A mátrixok nyelve sokkal "gazdagabb": rengeteg mátrix "jelenti" ugyanazt a valós számot, például végtelen sok olyan mátrix van, amelynek 1 a determinánsa[18]. A mátrixok összetett világának a tanulmányozása nehéz és ezt könnyíti meg ez az $\mathbf{X} \mapsto |\mathbf{X}|$ megfeleltetés, amely ráadásul többet tud, mint egy átlagos szótár: a kétféle **nyelvtan** között is kapcsolatot teremt! A szorzási tétel a megfelelő valós számok egyszerű szorzásává "fordítja le" a mátrixok bonyolult szorzását, amely így a valós számok szorzásának jól ismert tulajdonságain keresztül vizsgálható. Láttuk például, hogy két mátrix szorzata lehet a **nullmátrix** úgy, hogy a tényezők egyike sem az: ennek a szótárnak a felhasználásával kiderül, hogy az a jó kérdés, mit mondhatunk két mátrixról, ha a szorzatuk determinánsa nulla? (Mit?)

Az ilyen "nyelvtanmegőrző" szótárak az algebra hatékony eszközei: *homomorfizmusnak* nevezik őket. Ilyesfajta "szótár" például az egész számokon értelmezett $n \mapsto \{páros, páratlan\}$

[17] ld a **4.6 feladatot** .
[18] Az ilyen mátrixok annyira fontosak, hogy saját nevet kaptak.

megfeleltetés[19], amely számos feladat megoldásának a kulcsa, vagy – aki ismeri őket – a nem nulla komplex számok szorzásakor a $z \mapsto |z|$ megfeleltetés.

Egy alkalmazás[20] *– a Cramer szabály*

Vegyük észre, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{3}$$

általános kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásaira felírható a következő mátrix egyenlőség:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} \end{pmatrix}.$$

A jobb oldalon álló szorzat első oszlopa az egyenletrendszer miatt $\binom{b_1}{b_2}$, így az egyenletrendszer megoldásaira teljesülnie kell, hogy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

A szorzási tétel szerint ekkor a megfelelő **determinánsokra**

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}_{|\mathbf{D_x}|}.$$

A bal oldal első tényezőjét az **egyenletrendszer determinánsának**[21] nevezik, a jobb oldalon pedig az annak idején D_x-szel jelölt determináns áll. A bal oldal második tényezője kifejtés után éppen x, így végül az

$$|\mathbf{A}| \cdot x = D_x$$

elsőfokú egyismeretlenes egyenletet kapjuk; ezekről a *Bemelegítés* óta mindent tudunk! Ha

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

nem nulla, akkor

$$x = \frac{D_x}{|\mathbf{A}|},$$

[19] Ez nem csak a szorzás, hanem az összeadás szerkezetét is megtartja!

[20] Végre történik valami!

[21] Valójában az egyenletrendszer mátrixának a determinánsa!

ahogy a Cramer szabály állítja.

3.14 feladat Az egyenletrendszer mátrixát alkalmas mátrixszal jobbról szorozva igazoljuk, hogy ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor

$$y = \frac{D_y}{|\mathbf{A}|}.$$

3.15 feladat Felhasználva, hogy

$$x^2 + y^2 = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix},$$

bizonyítsuk be, hogy ha az n és a m egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor a szorzatuk is ilyen.

3.16 feladat Bontsuk fel a 4453-at két négyzetszám összegére!

3.17 feladat Az a, b, c, d valós számokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1, \\ c^2 + d^2 &= 1, \\ ac + bd &= 0. \end{aligned}$$

Határozzuk meg $ab + cd$ értékét.

3.5 *Mátrixok inverze*

Az $\mathbf{X}$ mátrix **inverzének** nevezik azt az $\mathbf{X}^{-1}$ mátrixot – ha létezik – amellyel az $\mathbf{X}$ mátrixot akár jobbról, akár balról megszozorva az egységmátrixot kapjuk:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

A mátrixok és a valós számok a szorzásra nézve sok tekintetben hasonlítanak[22]. Mátrix inverze jól látható módon "reciprok"-szerűen viselkedik.[23]

3.18 feladat Legyen megint

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot egyelőre ismeretlen elemekkel

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}.$$

[22] Eltekintve attól az "apróságtól", hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív!

[23] Azzal az erővel, ahogy a mátrixok körében az $\mathbf{AB}$ művelet a "szorzás" nevet kapta, az $\mathbf{I}$-t pedig "egység"(mátrix)nak hívjuk, következetesebb lenne ezt a metonímiát az $\mathbf{X}^{-1}$ mátrix elnevezésében is érvényesítve az $\mathbf{X}$ mátrix "reciprokáról" beszélni.

alakban. Az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ feltétel bal oldalán a mátrixszorzást elvégezve egy négy egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlenekre. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert[24] és írjuk fel az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot. Ellenőrizzük, hogy az így kapott $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixra $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ is teljesül. Miért kell ez az ellenőrzés? Kell-e?

3.19 feladat Írjuk fel a fenti egyenletrendszert az általános $\mathbf{X}$ mátrixszra. Mi az egyértelmű megoldhatóság feltétele?

A **3.19 feladatból** kiderül: egy mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha **a mátrix determinánsa nem nulla**. Pontosabb információhoz jutunk a *szorzási tétel* segítségével.

Ha $\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}$, akkor persze a determinánsok is egyenlők: $|\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1$. A szorzási tétel szerint $|\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}| = |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{X}^{-1}| = 1$, vagyis egy mátrixnak és az inverzének determinánsai egymás reciprokai:

$$|\mathbf{X}^{-1}| = |\mathbf{X}|^{-1}.$$

Az egységmátrix inverze önmaga és nyilván ilyen az ellentettje, a

$$-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ is.}$$

3.20 (meglepő) feladat Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan mátrix van, amely egyenlő a saját inverzével! (ld. a **3.7 feladatot** és az 5. fejezetet.)

3.21 feladat Mi köze van egymáshoz a **3.7** és a **3.20** feladatokanak?

3.22 feladat Egy mátrix egyenlő a saját inverzével. Mennyi lehet a determinánsa?

3.23 feladat Tegyük fel, hogy $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}$ mellett még az is igaz, hogy $|\mathbf{X}|$=1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ vagy $\mathbf{X} = -\mathbf{I}$.

Az egyik leghangulatosabb idevonatkozó eredmény a szorzatmátrix inverzéről szóló *socks-shoe principle*[25]:

ha az **X, Y** mátrixok regulárisak, akkor a szorzatuk is az (miért?), továbbá

$$(\mathbf{X}\mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}.$$

Szorzat inverze tehát a tényezők inverzének a szorzata "fordított sorrendben"!

3.24 feladat Mi lehet a tétel különös elnevezésének a magyarázata?

3.25 feladat Bizonyítsuk be a szorzat inverzéről szóló tételt.

[24] Javaslom a Cramer szabályt

[25] Magyarul – van ez így – sutábban hangzik: "zokni-cipő elv" .

3.26 feladat Legyenek f és g kölcsönösen egyértelmű függvények; ekkor létezik az $f \circ g$ összetett függvény inverze. Bizonyítsuk be, hogy $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Mátrix és inverze nyilván kommutálnak, a viszonyuk pedig egyébként is szimmetrikus, azaz $(\mathbf{X}^{-1})^{-1} = \mathbf{X}$.

Elnevezések

Ha egy mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **regulárisnak**, ellenkező esetben pedig **szingulárisnak** nevezik.

Ha

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{tetszőleges mátrix, akkor az} \quad \mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixot az **X transzponáltjának** nevezik. A transzponálás során az **X** mátrixot "tükrözzük" a főátlójára, ami most[26] a mellékátlóban álló két elem, az a_{12} és a_{21} fölcserélésével hajtható végre. Ennek nyomán **X** soraiból $\mathbf{X}^T$ oszlopai lesznek, **X** oszlopaiból pedig $\mathbf{X}^T$ sorai. Egy mátrix és a transzponáltja között szoros kapcsolat van, például egyenlő a determinánsuk. (Ellenőrizzük!)

Ha

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{tetszőleges mátrix, akkor az} \quad \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

mátrixot az **X adjungáltjának** nevezik. Az adjungáltban mindkét átló mentén változtatunk: a főátlóban kicseréljük az elemeket, a mellékátlóban pedig az ellentettjükre változtatjuk őket. Az most is nyilvánvaló, hogy $|\mathbf{X}| = |\mathbf{X}^*|$, (ellenőrizzük) de e két mátrix viszonya ennél bensőségesebb: egy mátrix és az adjungáltja kommutálnak, a szorzatuk diagonális, sőt...

A jó öreg **A** mátrix adjungáltja

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot \mathbf{I}.$$

[26] 2×2-es mátrixok esetén.

Ebből következik, hogy akár balról, akár pedig jobbról szorozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixot az

$$\frac{1}{6}\mathbf{A}^*$$

mátrixszal, az identitást kapjuk: előttünk áll az $\mathbf{A}$ mátrix inverze!

3.27 feladat Mi ez a 6, amelynek a reciprokával meg kell szorozni $\mathbf{A}^*$-ot, hogy $\mathbf{A}$ inverzét kapjuk?

3.28 – fontos!!! – feladat Legyen $\mathbf{X}$ reguláris mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{X^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{X}|}\mathbf{X}^*.$$

3.29 feladat (Hogy jön ez ide???) Az a, b, c, d valós számokra tekintsük az

$$r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

elsőfokú racionális törtfüggvényt. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $r(x)$ függvény kölcsönösen egyértelmű legyen, azaz létezzék inverze. Mutassuk meg, hogy ha ez a feltétel teljesül, akkor

$$r^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}.$$

Egy alkalmazás – a lineáris mátrix egyenlet megoldása

A mátrixalgebra célszerszámaival fölszerelkezve vegyük ismét szemügyre az

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 5 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A 2.3 fejezetben láttuk, hogy ennek mátrix-alakja $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, ahol $\mathbf{A}$ az egyenletrendszer mátrixa, $\mathbf{u} = \binom{x}{y}$ és $\mathbf{b} = \binom{5}{3}$. Az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, az inverzét is felírtuk:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Szorozzuk most meg az $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ egyenlőséget **balról** ezzel az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixszal:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Au}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

A bal oldal a mátrixszorzás asszociativitása miatt $\underbrace{(\mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A})}_{\mathbf{I}}\mathbf{u}$, az $\mathbf{u}$ vektort valójában az $\mathbf{I}$ egységmátrixszal szorozzuk: az eredmény $\mathbf{Iu} = \mathbf{u}$. Eszerint

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},\ \text{vagyis}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 11/6$; $y = 7/6$.

Tulajdonképpen betartottam, amit igértem: éppenséggel **ez** az értelme annak a maga helyén (2.3 fejezet) talán ködös programnak, miszerint "próbáljuk lemásolni a $2x = 3$ egyenlet "megoldását" : ahogy az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva megkapjuk x értékét. Ennek az algebrai lépésnek most olyasmi felelne meg, ha az $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ egyenlet mindkét oldalát *el lehetne "osztani"* $\mathbf{A}$-val! "

Most már világos, hogy ez miként valósul meg ebben a környezetben: a mátrix egyenlet mindkét oldalát meg kell szorozni balról az $\mathbf{A}$ mátrix inverzével. Innen nézve még az a régi történet, a 2-vel való közönséges osztás is kap egy új árnyalatot: az nem más, mint a 2 *inverzével*, a 2^{-1}-gyel való szorzás. "Nem is tudtam, hogy prózában beszélek." mondja Moliére hőse a Képzelt beteg-ben, és milyen igaza van... :)

4) *Lineáris transzformációk és mátrixok*

Most a 2×2-es mátrixokat, mint a sík geometriai transzformációit vizsgáljuk. Az eredmények kiterjeszthetők a 3×3-as mátrixokra, illetve – immár a szemléletes geometriai jelentés nélkül – magasabb rendű négyzetes mátrixokra is. A sík pontjait most is az oszlop formában felírt helyvektorukkal azonosítjuk.

A mátrixával adott $\mathbf{A}$ transzformáció a síknak az az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{Au}$ leképezése, amely az $\mathbf{u}$ vektorhoz(ponthoz) az az alábbi módon kiszámolt $\mathbf{Au}$ vektort(pontot) rendeli:

$$\text{ha } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{és } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \text{akkor } \mathbf{Au} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}.$$

Ez nem más, mint a 2×2-es $\mathbf{A}$ és a 2×1-es $\mathbf{u}$ mátrixok szorzata.

Ahogy egy $P(x_P; y_P)$ pontot és a $\mathbf{p} = \binom{x_P}{y_P}$ vektort[27] azonosnak tekintünk, úgy most és a továbbiakban **tekintsünk azonosnak** egy $\mathbf{A}$ mátrixot és a mátrix által a fentiek szerint meghatározott transzformációt!

4.1 *Linearitás*

Ennek a transzformációnak a legfontosabb algebrai tulajdonságai a következők:

1.) $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$: a nullvektor képe a nullvektor;

2.) $\mathbf{A}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \mathbf{Au} \pm \mathbf{Av}$;

3.) $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{Au}$ minden λ valós számra;

[27] A P pont helyvektorát rögzített koordinátarendszer, illetve bázisvektorok esetén.

4.) $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v})=\lambda\mathbf{A}\mathbf{u}+\mu\mathbf{A}\mathbf{v}$ minden λ,μ valós számra[28].

Az **A** transzformáció tehát megtartja a lineáris kombinácót: vektorok lineáris kombinációjának a képe a képvektorok megfelelő lineáris kombinációja. Ennek megfelelően magát a mátrixként megadott transzformációt is lineárisnak nevezik. Lineárisan összefüggő vektorok képe is lineárisan összefüggő, sőt, az **A** transzformáció "szóról szóra" megtartja a sík pontjai között fennálló *lineáris kapcsolatokat*: szakasz felezőpontjának a képe például a képpontok által meghatározott – esetleg elfajuló – szakasz felezőpontja, háromszög súlypontjának a képe pedig a képpontok által meghatározott – esetleg elfajuló – háromszög súlypontja. Egyenes képe általában egyenes – elfajuló esetben egyetlen pont – és ha egy egyenes képe egyenes, akkor a képegyenesen megmaradnak az osztásarányok. Ez azt jelenti, hogy ha a P,Q,R pontok egy egyenesen vannak, akkor az **Ap, Aq, Ar** pontok is egy egyenesen vannak és mondjuk a PQ/PR arány egyenlő a megfelelő képpontok által meghatározott szakaszok arányával.[29] Az adott egyenes mentén tehát a lineáris transzformáció **hasonlóságként** viselkedik: megtartja a "belső" arányokat. Az összkép azért nehezebben áttekinthető, mert ennek az egyenesenkénti hasonlóságnak az *aránya* egyenesről egyenesre más.

4.1 feladat A **B** lineáris transzformáció az $\mathbf{u}=\binom{2}{3}$ vektort a $\mathbf{Bu}=\binom{-4}{18}$, a $\mathbf{v}=\binom{-1}{2}$ vektort pedig a $\mathbf{Bv}=\binom{-5}{5}$ vektorba viszi. Mi lesz az $\binom{1}{1}$ vektor képe?
4.2. feladat A **C** transzformáció az $\mathbf{i}=\binom{1}{0}$ bázisvektort a $\mathbf{Ci}=\binom{1}{3}$, a $\mathbf{j}=\binom{0}{1}$ bázisvektort a $\mathbf{Cj}=\binom{-2}{4}$ vektorba viszi. Mi lesz az $\binom{1}{1}$ vektor képe? Mi a kapcsolat a két transzformáció, **B** és a **C** között?

Az **A** transzformáció linearitásának fontos következménye, hogy két lineárisan független vektor képe egyértelműen meghatározza az **A** transzformációt, illetve a mátrixát. Vagy másképp: ha **u** és **v** lineárisan független (nem párhuzamos) vektorok a síkban, és az **A**, illetve **B** lineáris transzformációkra (mátrixokra) **Au**=**Bu** és **Av**=**Bv**, akkor a két transzformáció egyenlő, azaz a sík minden **w** vektorára **Aw**=**Bw**, a két mátrix, **A** és **B** egyenlő. Vagy másképpen:

I. Ha két lineáris transzformáció *függvényként* **egyenlő, akkor a** *formájuk* **– a megfelelő mátrix – is azonos.**

4.2 *Transzformációk kompozíciója és a mátrixszorzás*

Láttuk, hogy a mátrixszorzás asszociativitása azt is jelenti, hogy tetszőleges **A, B** mátrixokra és a **u** vektorra **(AB)u=A(Bu)**. Eszerint ha

[28] A 4. azonosság természetetesen magában foglalja az 1. 2. 3. azonosságokat.
[29] Ezek a kapcsolatok ugyanis lineárisak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \text{ akkor}$$

az $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ transzformáció mátrixa, amely tehát a sík tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorához/pontjához az $\mathbf{A}(\mathbf{Bu})$ vektort/pontot rendeli, éppen a két mátrix $\mathbf{AB}$ szorzata:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

4.3 feladat Igazoljuk ezt az összefüggést úgy is, hogy ellenőrizzük a bázisvektorok képét.

II. Két transzformáció kompozíciójának a mátrixa a transzformációk mátrixának a szorzata!

Az $\mathbf{A}$ transzformáció inverze definíció szerint olyan transzformáció, amelynek az $\mathbf{A}$ transzformációval vett kompozíciója a sík identikus $\mathbf{I}$ transzformációja: $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. A fentiek szerint ennek a kapcsolatnak a mátrix formája: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

III. Egy transzformáció inverzének a mátrixa a transzformáció mátrixának az inverze!

Az **I., II., III.** észrevételek alapján jogosan tekintünk azonosnak egy mátrixot és az általa leírt lineáris transzformációt: az algebrai és a függvénytani/geometriai jelentés azonossá válik.

Megjegyzések 1.) Ilyesmit a számegyenesen is láthatunk. (Ha feltűnik egyáltalán.) A 2 **szám** például *azonosítható* a a számegyenes egy olyan **transzformációjával**, amelynek során az x számhoz a kétszeresét, $2x$-et rendeljük. Ez a transzformáció az egydimenziós helyvektorok – a valós számok – körében lineáris. Ha pedig az $x \mapsto 3x$ transzformációt tekintjük, akkor a két transzformáció kompozíciója, az $x \mapsto (3 \circ 2)x$, amelyik persze azonos az $x \mapsto (3 \cdot 2)x$ transzformációval. Ezeknek a transzformációknak van inverze, mégpedig a 2 (illetve a 3) algebrai inverzével, a 2^{-1}-el (illetve a 3^{-1}-el) való szorzás. Egy adott a számmal való szorzás a számegyenes lineáris transzformációjaként pontosan akkor invertálható, ha a-nak van inverze, azaz reciproka, tehát $a \neq 0$. A számegyenesen persze minden egyszerűbb, a számok szorzása például kommutatív, a mátrixoké pedig nem az. A síkon több a hely: ott az $a \neq 0$ feltételből $|\mathbf{A}| \neq 0$ lesz.

2.) Igazság szerint ez a "*transzformáció* $\mapsto$ *mátrix*" megfeleltetés újabb példa a szorzási tétellel kapcsolatban már emlegetett *homomorfizmusra*. Ennek során a transzformációk körében értelmezett kompozíció műveletének a mátrixok körében értelmezett szorzás[30] felel meg. Egy homomorfizmus tehát nem csak az objektumok, hanem a köztük végzett művelet között is kapcsolatot létesít; ebben az értelemben használtam a szorzási tételről beszélve a

[30]Ez a háttere a mátrixszorzás elsőre talán mesterkéltnek, de mindenképpen bonyolultnak tűnő értelmezésének. Ezek a kapcsolatok **tényleg** bonyolultak.

"nyelvtanmegőrző szótár" metaforáját: ahogyan a szavakból a nyelvtan törvényei szerint formálódnak a mondatok, egy ilyen szótár az egyik nyelv értelmes mondatait a másik nyelv értelmes mondataivá fordítja le. A bonyolultabb rendszert az egyszerűbb struktúrában lehet tanulmányozni.

3.) Mivel különböző transzformációknak különböző mátrixok felelnek meg[31], esetünkben a két nyelv, a transzormációké és a mátrixoké, egyenértékű: bármelyiküket használjuk is, lényegében ugyanazt mondjuk. Ilyen alapon tekintjük "azonosnak" a mátrixokat és a sík lineáris transzformációit.[32] Az ilyen kölcsönösen egyértelmű homomorfizmusokat *izomorfizmusnak* nevezik. Izomorf struktúrákat algebrai szempontból nem tudunk megkülönböztetni.

4.3 *Egy kis geometria*

Egy lineáris transzformáció hatását jól szemlélhetjük az $OIKJ$ egységnégyzeten:

$$O(0;0), I(1;0), J(0,1), K(1;1),$$

a megfelelő helyvektorok pedig

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $O' = O$ és ha $I \mapsto I', J \mapsto J', K \mapsto K'$, akkor a megfelelő helyvektorokra

$$\mathbf{i}' = \mathbf{A}\mathbf{i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{c_1} \text{ és } \mathbf{j}' = \mathbf{A}\mathbf{j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{c_2},$$

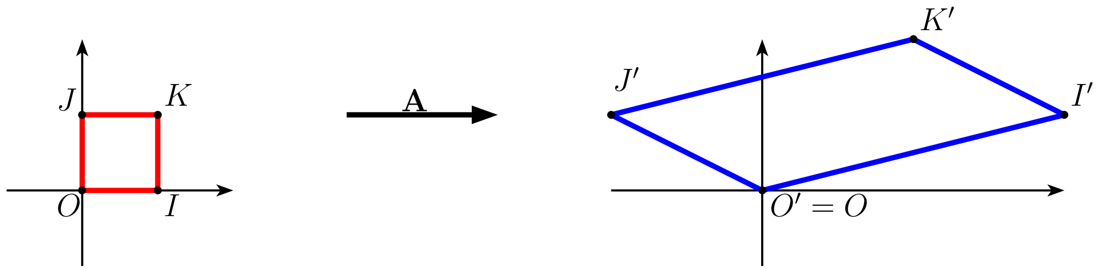
a linearitás miatt, vagy közvetlen számolással pedig:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{A}\mathbf{k} = \mathbf{A}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{A}\mathbf{i} + \mathbf{A}\mathbf{j} = \mathbf{c_1} + \mathbf{c_2} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ oszlopvektorok által kifeszített – esetleg elfajuló – vektorparalelogramma negyedik csúcsa. Az $\mathbf{A}$ transzformáció tehát az $OIKJ$ egységnégyzetet az – általában nem elfajuló – $OI'K'J'$ **paralelogrammába** képezi le.

[31] Ez csak úgy igaz, ha rögzített bázisban dolgozunk: esetünkben ez az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisvektorokat jelenti.

[32] Vigyázat: ez a megfeleltetés nem terjed ki a mátrixok összeadására; annak nincs "természetes" megfelelője a sík transzformációi között.



3. ábra

Ez persze nem csak a négyzet és a paralelogramma csúcsaira igaz: az egységnégyzet tetszőleges pontja a paralelogramma "megfelelő" pontjába kerül.

4.4 feladat Fogalmazzuk meg pontosan, mit jelent ebben az esetben a "megfelelő"!

Vegyük észre, hogy az **A mátrix oszlopaiban éppen az i, j bázisvektorok képe áll!** Ebből a linearitás miatt következik, hogy tetszőleges **u** vektor képe az oszlopvektoroknak az **u** komponenseivel elkészített lineáris kombinációja:

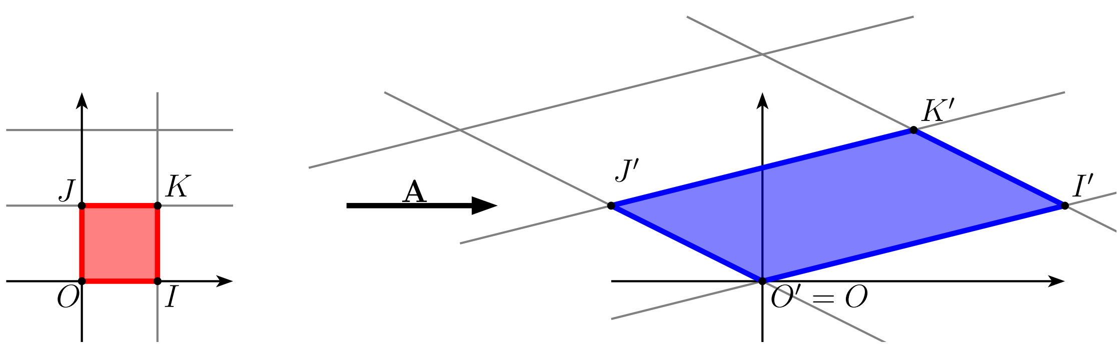
$$\text{ha } \mathbf{u} = \binom{u_1}{u_2} \quad \text{akkor} \quad \mathbf{Au} = u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2}.$$

Megfordítva, ha egy lineáris transzformáció során ismerjük az **i, j** *bázisvektorok* képét, akkor a transzformáció mátrixa nyomban felírható.

Az (1) egyenletrendszer **A** mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

így az **A** transzformáció során $I'(4;2), J'(-2;1), K'(2;2)$.



4. ábra

Az ábrán látható, hogy a négyzetrács egyenesei párhuzamos egyenesekbe mennek át, maga a négyzetrács pedig egy paralelogrammarácsba.

4.5 feladat (a) Mire képezi le az $\mathbf{A}$ transzformáció az alábbi egyeneseket: az x-tengely, az y-tengely, $y = 2x, y = x, y = 0.5x, x + y = 1$?
(b) A sík milyen részhalmazának a képe az $y = 3x$ egyenes, illetve a $2x + y = 1$ egyenes?
(c) Igazoljuk, hogy a $\mathbf{A}$ transzformáció során a sík tetszőleges egyenesének a képe egyenes, illetve hogy párhuzamos egyenesek képe párhuzamos.
(d) Igaz-e, hogy az $\mathbf{A}$ transzformáció során merőleges egyenesek képe merőleges?

Az $\mathbf{A}$ mátrix $|\mathbf{A}|$ determinánsa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Láttuk, hogy egy determináns értéke az oszlop/sor vektorok által kifeszített vektorparalelogramma előjeles területe. Ez a paralelogramma most éppen az $OIKJ$ egységnégyzet képe: az $OI'K'J'$!

Mivel a transzformáció mátrixának, illetve determinánsának oszlopaiban a bázisvektorok képei állnak, ez minden lineáris transzformációra teljesül: az $OI'K'J'$ paralelogramma előjeles területe $|\mathbf{A}|$. Ez a terület aszerint pozitív vagy negatív, hogy ennek a paralelogrammának a a körüljárása a csúcsok $O, I', K'J'$ felsorolásában pozitív-e vagy pedig negatív, az $\mathbf{A}$ transzformáció megtartja-e a körüljárást vagy sem.

Ebből általánosabban az is következik, hogy ha egy t területű $\mathcal{T}$ tartományt az $\mathbf{A}$ transzformáció a t' területű $\mathcal{T}'$ tartományba visz, akkor

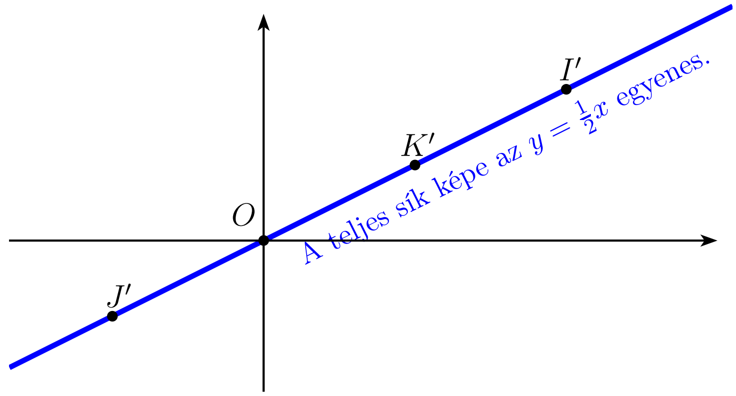
$$t' = |\mathbf{A}| \cdot t.$$

4.6 feladat Bizonyítsuk be most a szorzási tételt! (ld a **3.13 feladatot)**

Legyen az $\mathbf{S}$ transzformáció mátrixa

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben $I'(4;2), K'(2;1), J'(-2;-1)$.



5. ábra

Ezek a pontok az origón átmenő 1/2 meredekségű egyenesen vannak, a sík minden pontja erre az $2y - x = 0$ egyenesre kerül. Ez nem meglepő, hiszen a sík tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának a képe $u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2}$ és a $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ vektorok most párhuzamosak, .

4.7 feladat (a) Mi lesz a $\mathbf{S}$ transzformáció során az alábbi egyenesek képe: $x - y = 0; x - y = 1; y = 2x + 1$.
(b) Hol vannak azok a pontok, amelyek a képe az origó?
(c) Vannak-e olyan egyenesek, amelyek képe az $\mathbf{S}$ transzformáció során egyetlen pont?

Az $\mathbf{S}$ mátrix szinguláris, (a determinánsa nulla) így a mátrixnak nincs inverze: nem létezik olyan mátrix, amellyel az $\mathbf{S}$-et szorozva az egységmátrixot kapjuk. Ez az algebrai tény most az **S transzformáció** függvény-természetéből is kiolvasható: a síkon értelmezett $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{Su}$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, nincs tehát inverze! Ezzel összhangban a determináns nulla értéke miatt most bármely tartomány képének nulla a területe.

5. *Speciális transzformációk és mátrixaik*

Az alábbiakban megadjuk néhány közismert transzformáció mátrixát. Felírásuk módja a fentiek alapján egyszerű: az **i, j** bázisvektorok képeit írjuk a mátrix oszlopaiba. Ez a módszer persze csak akkor jogos, ha valahonnan tudjuk, hogy a szóban forgó transzformáció valóban lineáris, azaz megtartja a lineáris kombinációt! Ennek bizonyítása az egyes esetekben az elemi geometria hatásköre, mi ezt most fogadjuk el bizonyítás nélkül!

$$\text{Identitás:}\ \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Origó középpontú } \lambda\text{-arányú középpontos hasonlóság: } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

A középpontos hasonlóság mátrixai éppen a skalármátrixok. A determinánsuk λ^2, így az alakzat és képének területére imént felírt

$$t' = |\mathbf{A}| \cdot t$$

általános eredményben egy régi, nagyon hasznos iskolai tétel természetes általánosítása ismerhető fel. Mi ez a tétel?

5.1 feladat Írjuk föl az origó körüli $+90°$-os, illetve $-90°$-os forgatás mátrixát.

$$\text{Origó körüli } \alpha\text{-szögű forgatás: } \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5.2 feladat (*klasszikus...*) Írjuk föl az origó körüli $\alpha + \beta$ szögű forgatás mátrixát mint az α és a β szögű forgatások mátrixának a szorzatát. Értelmezzük az eredményt!

5.3 feladat Mennyi a forgatás mátrixának a determinánsa? Értelmezzük az eredményt!

5.4 feladat Írjuk fel a koordinátatengelyekre vonatkozó tükrözések mátrixát.

5.5 feladat Írjuk fel az $y = x$, illetve az $y = -x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükrözések mátrixát.

5.6 feladat Igazoljuk, hogy az origón átmenő α irányszögű egyenesre[33] vonatkozó tükrözés mátrixa

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Ennek az eredménynek a felhasználásával igazoljuk, hogy két metsző tengelyre vonatkozó tükrözés kompozíciója egy forgatás a tengelyek metszéspontja körül. Mekkora ennek a forgatásnak a szöge? Mi történik, ha felcseréljük a tükrözések sorrendjét?

5.7 feladat– fontos!!! Végezzük el az origón átmenő α irányszögű egyenesre vonatkozó tükrözést három lépésben: először forgassuk el a síkot az origó körül úgy, hogy a tükrözés tengelye az x-tengelyre kerüljön, aztán tükrözzünk az x-tengelyre – ez könnyű– végül forgassuk vissza a síkot az eredeti helyzetébe! Írjuk fel ennek alapján az origón átmenő α irányszögű egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixát **három** mátrix szorzataként.Vessük össze az eredményt az **5.6 feladat** mátrixával.

5.8 feladat Mennyi egy tengelyes tükrözés mátrixának a determinánsa? Értelmezzük az eredményt!

5.9 feladat Mennyi egy tengelyes tükrözés mátrixának a négyzete? Értelmezzük az eredményt!

$$x\text{-tengelyre vonatkozó } \lambda\text{-arányú merőleges affinitás: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

[33] $\alpha \neq 90°$ esetén az $y = \tan\alpha \cdot x$ egyenletű egyenesről van szó.

5.10 feladat Mi egy x-tengelyű λ-arányú és egy y-tengelyű, ugyancsak λ-arányú merőleges affinitás kompozíciója?

5.11 feladat A felsorolt transzformációk közül kimaradt az eltolás. Mi lehet ennek az oka?