

Kardos Gyula Emlékverseny 2011 – 12. évfolyam

1.) Bizonyítsd be, hogy az $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely (a)?

2.) A két alábbi állításról dönts el, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, bizonyítsd be, ha pedig hamis, akkor mutass ellenpéldát.

(A) Ha $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

(B) Ha $\mathbf{X}^4 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$.

3.) Az \mathbf{X} mátrixról tudjuk, hogy a négyzete az egységmátrix. Milyen értékeket vehet fel $|\mathbf{X}|$, az \mathbf{X} mátrix determinánsa? Bizonyítsd be, hogy ha $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ és $|\mathbf{X}|$ értéke 1, akkor \mathbf{X} vagy az egységmátrix, vagy pedig az egységmátrix ellentettje.

4.) Legyen

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy pontosan két olyan egyenes van, amelyet a \mathbf{T} transzformáció önmagára képez le.

(b) Bizonyítsd be, hogy az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenletű h hiperbolát a \mathbf{T} transzformáció önmagára képezi le. (Ez azt is jelenti, hogy a h minden pontja előáll valamely h -beli pont képeként.)

(c) Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan, **egész számokból** álló m, n számpár van, amelyre $m^2 - 2n^2 = 1$.

5.) Mi azon P pontok halmaza a derékszögű koordinátarendszerben, amelyekből az $y = x^2$ egyenletű parabolához egymással 30° -os szöget bezáró érintők húzhatók? (A feladatban két érintő hajlásszögét az általuk meghatározott szögtartományok közül annak a mérőszámként értelmezzük, amelyik tartalmazza a parabolát.)