# **Kardos Gyula Emlékverseny 2011** – 11. évfolyam

**1.)** Az $\mathbf{A}$ mátrixról tudjuk, hogy
$$\mathbf{A}\binom{1}{0}=\binom{1}{0},$$
az $\mathbf{A}$ inverzéről pedig, hogy
$$\mathbf{A}^{-1}\binom{2}{1}=\binom{9}{1}.$$
Oldd meg az $\mathbf{AX}$=$\mathbf{BA}$ "mátrix-egyenletet", ha
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.)** Bizonyítsd be, hogy az $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely ( $a$ )?

**3.)** Legyen $e$ egy adott hiperbola tetszőleges érintője, az $e$ egyenesnek a fókuszoktól mért távolságai pedig rendre $d_1$ és $d_2$. Bizonyítsd be, hogy a $d_1 d_2$ szorzat értéke nem függ az $e$ érintő megválasztásától.

**4.)** Legyen
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$
($a$) Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{XY}=\mathbf{M}$ egyenlőség végtelen sok $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ mátrixra teljesül.
($b$) Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ olyan mátrixok, amelyekre $\mathbf{AB}=\mathbf{M}$. Határozd meg a $(\mathbf{BA})^2$ mátrixot.

**5.)** Legyen
$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
($a$) Legyen $\mathcal{F}$ az $\{F_0(0;1), F_1(1;1), F_2(1;2), F_3(2,3), F_4(3;5)\ldots F_n(f_n;f_{n+1}),\ldots\}$ pontok halmaza a derékszögű koordinátarendszerben, ahol $f_n$ az $n$-edik Fibonacci számot jelöli. Mi az $\mathcal{F}$ halmaz képe az $\mathbf{F}$ transzformáció során?
($b$) Bizonyítsd be, hogy létezik két egymásra merőleges, az origón átmenő egyenes, amelyet az $\mathbf{F}$ transzformáció önmagára képez le. Milyen transzformációja az $\mathbf{F}$ ezeknek az egyeneseknek?
($c$) Jelölje $f$ a ($b$)-részbeli két egyenes közül azt, amelyiknek a meredeksége pozitív. Milyen viszonyban van az $\mathcal{F}$ ponthalmaz és az $f$ egyenes? Mi következik ebből az $F_{n+1}/F_n$ arányra?