Kardos Gyula Emlékverseny 2011 – 10. évfolyam

1.) Egy hiperbola *csúcsérintőinek* nevezik a fókuszokat összekötő egyenesre merőleges két érintőt. Bizonyítsd be, hogy egy hiperbola tetszőleges, a csúcsérintőktől különböző érintőjének a két csúcsérintő közé eső szakasza mindkét fókuszból derékszögben látszik.

2.) Az $\mathbf{A}$ mátrixról tudjuk, hogy

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

az $\mathbf{A}$ inverzéről pedig, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Határozd meg az $\mathbf{A}$ mátrixot.
(b) Legyen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Keress olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre teljesül az $\mathbf{AX}$=$\mathbf{BA}$ egyenlőség,

3.) Az alábbi két állításról döntsd el, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, bizonyítsd be, ha pedig hamis, akkor mutass ellenpéldát.
(A) Ha $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}$=$\mathbf{0}$.
(B) Ha $\mathbf{X}^4 = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$.
A $\mathbf{0}$ a nullmátrixot jelöli, amelyre tehát

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan $\mathbf{X}$ mátrix, amelyre $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$.
(b) Bizonyítsd be, hogy pontosan **két** olyan $\mathbf{X}$ mátrix van, amelyre $\mathbf{X}^2 = \mathbf{B}$.
(c) Bizonyítsd be, hogy pontosan **négy** olyan $\mathbf{X}$ mátrix van, amelyre $\mathbf{X}^2 = \mathbf{C}$.

5.) Bizonyítsd be, hogy az $f : x \mapsto \frac{1}{x},\ x \neq 0$ függvény grafikonja hiperbola. Hol vannak a fókuszai és milyen hosszú a valós féltengely (a)?