A Kardos Gyula Matematika Verseny feladatainak megoldásai

Összeállította: *Dr Kiss Géza*

10. osztály

1. feladat Mutassuk meg, hogy ha b páros, a pedig páratlan pozitív egész szám, akkor az $\frac{a}{b}$ tört nem írható fel véges sok páratlan nevezőjű törzstört összegeként!

Megoldás: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az $\frac{a}{b}$ felírható véges sok páratlan nevezőjű törzstört összegeként.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}.$$

Hozzuk a törzstörteket közös nevezőre. Mivel az összes nevező páratlan, ezért az esetleges egyszerűsítések után is egy páratlan nevezőjű törtet kapunk összegként. Viszont a páros nevezőjű $\frac{a}{b}$ tört számlálója páratlan, így további egyszerűsítések, vagy bővítések során sem lehet a nevezője páratlan. Ellentmondásra jutottunk, a feladat állítását igazoltuk.

Több megoldás alapján

2. feladat Írjuk fel a $\frac{2}{9}$-et az összes lehetséges módon két törzstört összegeként!

1. Megoldás:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Beszorzás és rendezés után:

$$2xy = 9x + 9y.$$

Most a szorzattá alakíthatóság érdekében szorozuk meg az egyenletet kettővel és egy konstans hozzáadásával alakítsuk a baloldalt szorzattá:

$$4xy - 18x - 18y = 0$$

$$(2x - 9)(2y - 9) = 81$$

A 81 osztópárjai adják a lehetséges megoldásokat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük továbbá, hogy $x \leq y$.

$$2x - 9 = 1, 2y - 9 = 81, x = 5, y = 45,$$

$$2x - 9 = 3, 2y - 9 = 27, x = 6, y = 18,$$

$$2x - 9 = 9, 2y - 9 = 9, x = y = 9.$$

Az összes felbontás:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$

2. Megoldás: A $\frac{2}{9}$ tört természetesen felírható az $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$ alakban. Ahhoz, hogy az összeg ne változzon az egyik nevezőt növelnünk, a másikat csökkentenünk kell. Vizsgáljuk sorban azokat az eseteket, amelyekben mindig 1-gyel csökkentjük a nevezőt:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{x}=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{16}{72}-\frac{9}{72}=\frac{7}{72}\Rightarrow x\notin\mathbf{N}$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{y}=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{14}{63}-\frac{9}{63}=\frac{5}{63}\Rightarrow y\notin\mathbf{N}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{12}{54}-\frac{9}{54}=\frac{3}{54}\Rightarrow z=18$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{v}=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{1}{v}=\frac{10}{45}-\frac{9}{45}=\frac{1}{45}\Rightarrow v=45.$$

A többi esetet nem kell vizsgálnunk, hiszen már $\frac{1}{4}>\frac{2}{9}$. Tehát a lehetséges felírások:

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$$

Mándoki Réka és Dezsényi Balázs megoldása alapján

3. Megoldás: A $\frac{2}{9}$ tört az $\frac{1}{5}<\frac{2}{9}<\frac{1}{4}$ törzstörtek között helyezkedik el. A ,,mohó algoritmust" alkalmazva az első törzstört tehát az $\frac{1}{5}$ lehet. Feltehetjük, hogy a két törzstört csökkenő sorrendben van.

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},\qquad x_1\le x_2.$$

Emiatt $\frac{1}{x_1}$ felvehető legkisebb értéke $\frac{2}{9}$ fele, az $\frac{1}{9}$. Tehát $5\le x_1\le 9$ Ezután a 2. Megoldás szerinti esetek vizsgálata következik.

Fésűs Luca megoldásának vázlata

3. feladat Mutassuk meg, hogy ha b nem osztható 3-mal és van $3k-1$ alakú prímosztója, akkor a $\frac{3}{b}$ tört felírható két különböző nevezőjű törzstört összegeként!

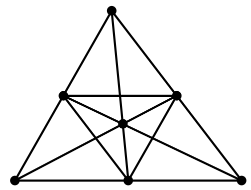
Megoldás: Ha $p=3k-1$ ez a feltételezett prím, akkor $b=dp$ jelöléssel:

$$\frac{1}{kd}+\frac{1}{kd(3k-1)}=\frac{3k-1+1}{kd(3k-1)}=\frac{3k}{kd(3k-1)}=\frac{3}{d(3k-1)}=\frac{3}{b}$$

Megjegyzés: Hoksza Zsolt kicsit elbonyolítva a tényezőket megadta a pontos felbontást. Mándoki Réka megsejtette konkrét számpéldákon ezt a megoldási lehetőséget, majd az általános esetet felírva ellenőrízte sejtése helyességét.

4. feladat Adjunk meg a síkon úgy 7 pontot, hogy pontosan 9 egyenest határozzanak meg!

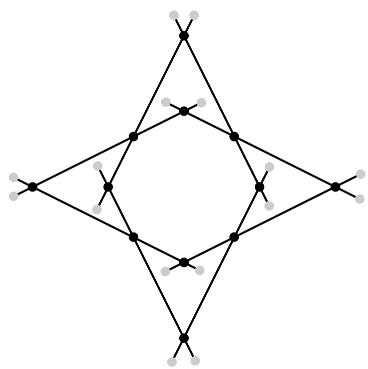
Megoldás: Vegyük a hét pontot a következőképpen: egy háromszög csúcsai, oldalfelezőpontjai és súlypontja. Ezek meghatározzák az oldalegyeneseket, a súlyvonalakat és a középvonalakat, összesen kilenc egyenest.



Megjegyzés: Mindegyik megoldás lényegében ugyanezt a konstrukciót követte. Fésüs Luca megoldásában a háromszög tetszőleges belső pontja és a Ceva-féle szakaszok oldalakkal vett metszéspontjai szerepelnek.

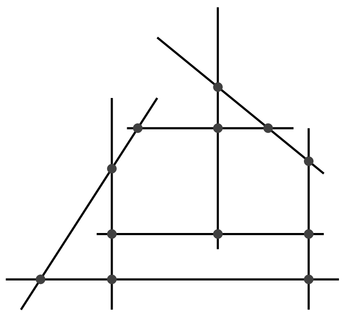
5. feladat Elhelyezhető-e a síkon nyolc szakasz úgy, hogy mindegyik szakasz pontosan három másikat messen?

I. Megoldás: Elhelyezhető nyolc szakasz a kívánt módon. Például a mellékelt módon. (Kosztolányi József- Makay Géza - Pintér Klára - Pintér Lajos: Matematikai Problémakalauz I. 195. -196. old.)



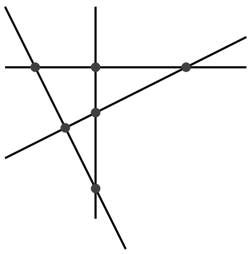
Megjegyzés: A fentivel lényegében egyező konstrukciót adott Verrasztó Zsolt.

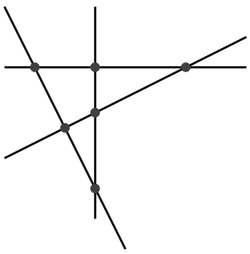
2. Megoldás: Hasonló felépítésű, bár ettől kicsit eltérő érdekes konstrukció is született.



Krausz Máté első konstrukciója

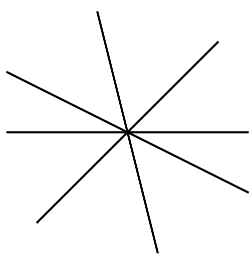
3. Megoldás: Két diszjunkt részből álló konstrukcióra is két példát láthattunk.

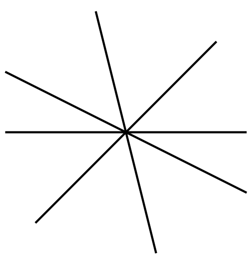




Dezsényi Balázs, Mándoki Réka és Horváth Dániel megoldása

4. Megoldás: Ugyanez a gondolat még egyszerűbb formában jelenik meg a következő konstrukcióban:





Hoksza Zsolt, Krausz Máté és Németh Nikolett megoldása

11. osztály

1. feladat Írjuk fel a $\frac{3}{7}$-et három különböző nevezőjű törzstört összegeként!

1. Megoldás: Az ilyen típusú feladatoknál célszerű módszer a ,,mohó" algoritmus. Ennek megfelelően a felírandó törtből kivonjuk a legnagyobb olyan törzstörtet, amely kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{3}{7}$. Ezt addig folytatjuk míg törzstörtet nem kapunk.

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2},$$
$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}.$$
$$\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{12},$$
$$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{22-21}{231} = \frac{1}{231}.$$

Ezzel megkaptuk a $\frac{3}{7}$ egy lehetséges felbontását:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Ayhan Dániel megoldása

2. Megoldás: A témakörben gyakran használt átalakítás segítségével adható ötletesen egy másik felbontás. Ez az azonos átalakítás az egész egyiptomi törtek témában sok helyen szerepet játszik:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Írjuk fel az $\frac{1}{7}$ törtet ennek segítségével két tört összegeként.

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}.$$

Most szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel.

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{8} + \frac{2}{56} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Ezzel kapjuk a $\frac{3}{7}$ egy másik felbontását:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Daku Gergely megoldása

3. Megoldás: Ennek a felbontásnak a megtalálására egy másik lehetőség is kínálkozik. Legyen az egyik törzstört az $\frac{1}{7}$, ekkor meg kell oldanunk a

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

diofantoszi egyenletet. A beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy

$$2xy - 7x - 7y = 0.$$

Most szorozzuk meg az egyenletet 2-vel és adjunk mindkét oldalhoz 49-et.

$$4xy - 14x - 14y + 49 = 49,$$

$$2x(2y - 7) - 7(2y - 7) = 49,$$

$$(2x - 7)(2y - 7) = 49.$$

Innen az osztópárokból már kiolvashatók az egyenlet pozitív egész megoldásai.

$$2x - 7 = 1, 2y - 7 = 49 \Rightarrow x = 4, y = 28,$$

$$2x - 7 = 7, 2y - 7 = 7 \Rightarrow x = 14, y = 14.$$

Ezek közül az első felel meg a feladat feltételeinek:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

4. Megoldás: Más megközelítéssel is találkoztunk.

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \; a \neq b \neq c.$$

Mivel

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} = \frac{1}{7}$$

biztosan van legalább egy olyan tört, amely nagyobb, mint $\frac{1}{7}$. Legyen ez az $\frac{1}{a}$. Ekkor

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{7} - \frac{1}{6} = \frac{11}{42}.$$

Az előző gondolatmenet szerint

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} = \frac{11}{84}, \; \frac{1}{8} < \frac{11}{84} < \frac{1}{7}.$$

Az egyik tört legalább $\frac{1}{7}$, legyen ez az $\frac{1}{b}$. Ekkor végigpróbálva a $b = 7, 6, 5, 4$ eseteket $b = 4$ re kapunk a maradékra törzstörtet.

$$\frac{11}{42} - \frac{1}{4} = \frac{22 - 21}{84} = \frac{1}{84}.$$

Egy újabb felbontást kaptunk:

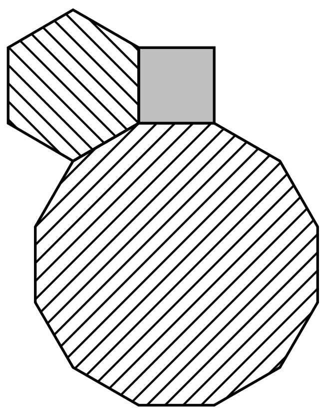
$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{84}.$$

Ezt a módszert folytatva még további felbontások is nyerhetők:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}.$$

Varga Nátán megoldása

2. feladat Egy-egy egységnyi oldalú négyzet, szabályos hatszög és szabályos tizenkétszög elhelyezhető egymás mellé úgy, hogy egy csúcsuknál összeérjenek és körülötte átfedés és hézag nélkül lefedjék a sík csúcs körüli tartományát, egy egységnyi sugarú körlapot.



Mely három különböző oldalszámú szabályos sokszöggel tehető meg még ugyanez? Adjuk meg az összes megoldást!

Eredmény: Összesen két megoldás van a feladat szövegében megadott példával együtt. Ezek:

$$(4, 5, 20), \qquad (4, 6, 12).$$

Ha a csúcsok körüli *egység* sugarú körlapokat le kell fednünk, akkor nem használhatunk szabályos háromszögeket, csak háromnál nagyobb oldalszámú sokszögek jönnek szóba. Ha megengedjük a háromszögeket, tehát pld megelégszünk a csúcsok körüli *fél egység* sugarú körlapok lefedésével, akkor még az alábbi megoldásokat kapjuk:

$$(3, 7, 42), \qquad (3, 8, 24), \qquad (3, 9, 18), \qquad (3, 10, 15).$$

A megoldók zöme – a kitűzők eredeti szándéka szerint – ezeket a lehetőségeket is felsorolta.

Megoldás: A szabályos n-szög egy belső szöge $\frac{n-2}{n}\pi$, így a szabályos n-, m-, k-szögeket pontosan akkor lehet egymás mellé helyezni a kívánt módon, ha

$$\frac{n-2}{n}\pi + \frac{m-2}{m}\pi + \frac{k-2}{k}\pi = 2\pi,$$

azaz ha

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

Legyenek a sokszögek oldalszámai úgy betűzve, hogy nagyságrendi sorrendjük: $k < m < n$. Ekkor szükségképpen $k \leq 6$. A feladatban szereplő további feltétel alapján $k, m, n > 3$, mert különben a sokszögek nem fednék le az egység sugarú körlapot. Vegyük sorra a lehetőségeket!

Ha $k = 6$, akkor a nagyságrendek miatt $n = m = 6$, tehát a sokszögek nem különbözők.

Ha $k = 5$, akkor $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{10}$, így $5 < m < 7$, azaz $m = 6$, de ez nem ad megoldást, a különbség nem törzstört:

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{2}{15}.$$

Ha $k = 4$, akkor $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$, így $4 < m < 8$, ezek között két olyan megoldás van, amelyekben a számok különbözőek.

$$m = 5, \qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}, \qquad n = 20,$$

$$m = 6, \qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, \qquad n = 12.$$

Ha $m = 7$, akkor

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28},$$

nem kapunk megoldást.

Varga Nátán megoldása alapján

3. feladat Írjuk fel a $\frac{5}{121}$ törtet legalább kétféleképpen három különböző törzstört összegeként!

1. Megoldás: Írjuk fel először az $\frac{5}{11}$-et mohó algoritmussal.

$$\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{4}{33} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}.$$

Most mindegyik tört nevezőjét szorozva 11-gyel egy kívánt felbontást kapunk. A $\frac{4}{33}$ törtet másképpen is két összeadandóra tudjuk bontani:

$$\frac{4}{33} = \frac{3}{33} + \frac{1}{33} = \frac{1}{11} + \frac{1}{33}.$$

A két felbontás:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{99} + \frac{1}{1089} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

2. Megoldás: Írjuk fel az előző feladatban már használt módszerrel az $\frac{1}{11}$ törtet.

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{11 \cdot 12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{132}.$$

Most szorozva $\frac{4}{11}$-del kapjuk, hogy

$$\frac{4}{121} = \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{132} = \frac{1}{33} + \frac{1}{363}.$$

Ehhez hozzáadva az $\frac{1}{121}$-et épen egy helyes felbontást kapunk.

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Egy másik felbontás némi próbálkozás után is adódik akkor, ha az egyik törtet $\frac{1}{27}$-nek választjuk. Ekkor ugyanis

$$\frac{5}{121} - \frac{1}{27} = \frac{270 - 242}{27 \cdot 242} = \frac{28}{27 \cdot 242} = \frac{27}{27 \cdot 242} + \frac{1}{27 \cdot 242}.$$

Az újabb felbontás:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{27} + \frac{1}{242} + \frac{1}{6534}.$$

Daku Gergely megoldása alapján

Megjegyzések: A második megoldás sem teljesen légből kapott, hiszen a ,,mohó" algoritmus $\frac{1}{25}$-től indul, így viszonylag gyorsan eljuthatunk az $\frac{1}{27}$-del történő próbálkozásig. Az átlagokkal történő nagyságrendi becslés módszerét alkalmazta ebben a feladatban is Varga Nátán. Tetemes számolással egy az eddigiektől eltérő felbontást is kapott:

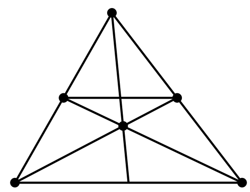
$$\frac{5}{121} = \frac{1}{44} + \frac{1}{55} + \frac{1}{2420}.$$

A számokból látható, hogy ehhez a felbontáshoz is eljuthatunk, ha előbb az $\frac{5}{11}$-et bontjuk három törzstört összegére.

$$\frac{5}{11} - \frac{1}{4} = \frac{9}{44} \qquad \text{és} \qquad \frac{9}{44} - \frac{1}{5} = \frac{1}{220}.$$

4. feladat Adjunk meg a síkon hat pontot úgy, hogy pontosan 7 egyenest határozzanak meg!

Megoldás: Vegyünk egy hegyesszöget. Legyen a szög csúcsa az egyik adott pont, továbbá helyezzünk el mindkét szögszáron még két-két pontot. A hatodik pont legyen ez utóbbi négy pont által meghatározott konvex négyszög átlóinak metszéspontja. Könnyen látható, hogy ez a konstrukció éppen hét egyenest határoz meg. Másrészt, ha egy egyenesen két pont helyett három van, akkor ez a maximális egyenesek számát kettővel csökkenti. Az előbbi konstrukcióban négy ilyen „három pontos" egyenes szerepel, tehát az egyenesek száma 8-cal csökken. $\binom{6}{2} - 8 = 7$.



Megjegyzés: A versenyzők mindegyike lényegében ugyanezt a konstrukciót adta.

5. feladat Adott a síkon n darab pont. Igazoljuk, hogy azoknak az egyeneseknek a száma, amelyek pontosan három pontot tartalmaznak a megadottak közül biztosan kisebb, mint $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$.

Megoldás: Azoknak az egyeneseknek a száma, amelyek 3 pontot tartalmaznak, akkor lenne maximális, ha mindegyik egyenes három pontot tartalmazna, továbbá mindegyik pont mindegyik másikkal össze lenne kötve. Ebben az esetben a két pont által meghatározott egyenesek száma $\binom{n}{2}$. Mivel minden egyenesen 3 pont lenne és három közül kettőt 3-féleképpen lehet kiválasztani, így valójában minden egyenest háromszor számolnánk. Ekkor az egyenesek száma $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ lehetne. Ezzel szemben Gallai tétele kimondja, hogy ha n darab pont nincs mind egy egyenesen, akkor biztosan van olyan egyenes, amely a megadott pontok közül pontosan kettőt tartalmaz. Ezért olyan eset a feladat feltételei mellett nem állhat fenn, hogy mindegyik egyenesen 3 pont van, éppen ezért a három pontot tartalmazó egyenesek száma biztosan kisebb lesz, mint $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$. Az $n \leq 3$ eset kivételt képez. Ha $n < 3$, akkor nincs ilyen egyenes, míg amennyiben az öszesen három pont egy egyenesre esik, a három pontot tartalmazó egyenesek száma pontosan $\frac{1}{3}\binom{n}{2} = 1$. Tehát a feladat állítása ezekben az esetekben nem teljesül.

Ayhan Dániel megoldása

12. osztály

1. feladat Igazoljuk, hogy azok a törtek, amelyek $\frac{2}{b}$ alakúak, ahol b egynél nagyobb páratlan szám, felírhatók két különböző törzstört összegeként!

1. Megoldás: Legyen $b = 2k + 1$ és válasszuk meg az első törzstörtet a ,,mohó" algoritmussal. Ennek a nevezője $k + 1$.

$$\frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{2k+2-2k-1}{(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$$

Felírtuk a $\frac{2}{b}$-t két törzstört összegeként:

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Megjegyzés: Bárány Ambrus és Gonyecz Ádám megadja a jó végeredményt és azt ellenőrzi. Kindrat László általánosan kezdi el megoldani a $\frac{2}{2k+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ difantoszi egyenletet. A megoldás közben egy speciális esetként adódik a fenti felbontás.

2. Megoldás: Használjuk fel ismét azt a tényt, hogy $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Tudjuk, hogy ráadásul $b = 2k + 1$, páratlan szám.

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b(b+1)}.$$

Most helyettesítsünk $b = 2k + 1$-et és szorozzuk az egyenlőséget 2-vel.

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{b+1} + \frac{2}{b(b+1)} = \frac{2}{2k+2} + \frac{2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Király Balázs megoldása alapján

2. feladat Mutassuk meg, hogy ha az egynél nagyobb b pozitív egész számnak mindegyik prímosztója $6k + 1$ alakú, akkor $\frac{3}{b}$ tört nem írható fel két törzstört összegeként!

1. Megoldás: Tegyük fel indirekt, hogy az állítással ellentétben

$$\frac{3}{b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Legyen d az m és n számok legnagyobb közös osztója. Ekkor

$$\frac{3d}{b} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{s+t}{st},$$

ahol s és t már relatív prímek. Mivel b páratlan, ezért s és t is szükségképpen páratlanok. Tudjuk, hogy $s + t$ osztható 3-mal, ezért az egyik 1 a másik -1 maradékot ad 3-mal osztva. Legyen például $s \equiv -1 \mod 3$. Ekkor az s-nek van $6k - 1$ alakú prímosztója. Valamilyen r pozitív egészre $s + t = 3dr$ és $st = br$. Mivel p osztója s-nek, ezért p osztója b-nek, vagy r-nek. Ha b-nek osztója, akkor az ellentmondás. Ha r-nek osztója, akkor mivel s és $3dr$ közös osztója, ezért t-nek is osztója lenne, ez azonban ellentmondás azzal, hogy s és t relatív prímek.

2. Megoldás: A (1) egyenletben átszorozva és még hárommal szorozva a következő összefüggéshez juthatunk:

$$(3m - b)(3n - b) = b^2. \tag{2}$$

Ha b minden prímosztója $(6k+1)$ alakú, akkor b maga is ilyen alakú, így páratlan is, tehát (1)-ben m és n páros, így a bal oldal mindkét tényezője $(6k - 1)$ alakú. De b-vel együtt b^2 minden osztója is $(6k + 1)$ alakú, így minden osztója is ilyen alakú. Ez ellentmondás, mert (2) szerint a bal oldali tényezők a b^2 osztói.

3. Megoldás: Erdős Pál irodalomként megadott magyar nyelvű cikkében hivatkozik Nakayama 1940-es években elért eredményére. Eszerint az $a < b$ esetben az $\frac{a}{b}$ tört akkor és csak akkor írható fel két törzstört összegeként, ha találhatók olyan k_1, k_2, k_3 egész számok, melyekre $b = k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 \cdot a - k_1 \cdot d)$, ahol d az a és b egészek legnagyobb közös osztója. Ebben az esetben $a = 3$, továbbá a b szám mindegyik prímosztója $6k+1$ alakú, tehát $d = 1$. A Nakayama tételében szereplő formula így egyszerűbb alakban írható.

$$b = k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 \cdot 3 - k_1).$$

Rendezzük át ezt az összefüggést.

$$3k_3 = \frac{b}{k_1 \cdot k_2} + k_1 = \frac{b + k_1^2 \cdot k_2}{k_1 \cdot k_2}.$$

Tudjuk, hogy k_1 és k_2 osztói b-nek. A b-nek mindegyik osztója $6k + 1$ alakú. Ezek szerint a $(b + k_1^2 \cdot k_2)$ kifejezés értéke 6-tal osztva 2 maradékot ad. Ezzel elentmondásra jutottunk, mert k_3 csak abban az esetben lehetne egész szám, amikor $b + k_1^2 \cdot k_2$ osztható 3-mal. Ez nem teljesül, tehát nincsenek ilyen k_1, k_2, k_3 egész számok, a $\frac{3}{b}$ tört nem írható fel két törzstört összegeként.

Megjegyzés: Ez a megoldás bár nehéz, részleteiben nem ismertetett tételre támaszkodik, mégis nagyon dicséretes és közlésre érdemes, mert a kiadott irodalom teljes és nagyon alapos áttanulmányozására utal.

Gonyecz Ádám megoldása

3. feladat Tegyük fel, hogy pozitv $\frac{a}{b} < 1$ törtet felírtuk a ,,mohó algoritmussal" az $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ pozitív egészek reciprokösszegeként. Legyen $d = m_1^2 - m_1$. Mutassuk meg, hogy $m_2 > d, m_3 > d^2, m_4 > d^4, \ldots, m_k > d^{2^{k-2}}$.

Megoldás: k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m_2 \le d$, akkor

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1(m_1-1)} \le \frac{a}{b},$$

ebből következik, hogy

$$\frac{1}{m_1-1} \le \frac{a}{b},$$

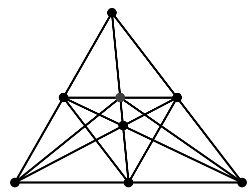
ez viszont ellentmond m_1 választásának. Tegyük fel most, hogy k-ig $m_k > d^{2^{k-2}}$, és legyen $R = \frac{a}{b} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{m_j}$. Ekkor

$$R - \frac{1}{m_k} < \frac{1}{m_k - 1} - \frac{1}{m_k} = \frac{1}{m_k(m_k-1)} < \frac{1}{(m_k-1)^2} \le \frac{1}{\left(d^{2^{k-2}}\right)^2} = \frac{1}{d^{2^{k-1}}},$$

és ebből már következik, hogy $m_{k+1} > d^{2^{k-1}}$.

4. feladat Megadható-e a síkon 8 pont úgy, hogy pontosan 11 egyenest határozzanak meg?

Megoldás: A 8 pont általánosan elhelyezve legfeljebb 28 egyenest határozhat meg. Vegyük egy teljes négyoldal hat csúcsát és két átlós pontját. Ekkor csak egy olyan egyenes van, amelyen négy pont helyezkedik el és pontosan 6 olyan egyenes, amelyen három pont. Ezek az egyenesek számát 5-tel, illetve $6 \cdot 2 = 12$-vel csökkentik. $28 - 5 - 12 = 11$.



Fogalmazhatjuk a fenti konstrukciót úgy is, hogy egy háromszög csúcsai, oldalfelező pontjai, súlypontja továbbá egyik középvonalának a harmadik súlyvonallal vett metszéspontja legyen a megadott 8 pont.

Megjegyzés: Bárány Ambrus, Gonyecz Ádám és Kindrat László mindhárman ugyanezt a konstrukciót adták.

5. feladat Adott a síkon n darab pont úgy, hogy nem illeszkednek mind egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy meghatároznak legalább n darab olyan egyenest, amelyek mindegyike legalább két pontot tartalmaz a megadottak közül!

1. Megoldás: (Kosztolányi József- Makay Géza - Pintér Klára - Pintér Lajos: Matematikai Problémakalauz I. 201. -202. old.)

Könnyen látható, hogy az n mint alsó korlát nem javítható, hiszen ha a pontok egy kivételével egy egyenesre illeszkednek, akkor a ponthalmaz által meghatározott egyenesek száma éppen n.

A továbbiakban belátjuk, hogy az egyenesek száma nem lehet kisebb n-nél. Jelölje az adott pontok halmazát Q, az általuk meghatározott egyenesek halmazát ε. Gallai tételének értelmében van olyan $e \in \varepsilon$ egyenes, amelyre pontosan két Q-beli pont illeszkedik. Jelölje P_1 az egyik ilyen pontot. Hagyjuk el P_1-et Q-ból, és hagyjuk el ε-ból az összes olyan P_1-re illeszkedő egyenest, amelyik pontosan két Q-beli pontot tartalmaz. Jelölje az így kapott ponthalmazt Q_1, az így kapott egyeneshalmazt pedig ε_1 Nyilván $|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| - 1$. Ha Q_1 pontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor $|\varepsilon| = n$. Ha Q_1 pontjai nem illeszkednek mind egy egyenesre, akkor van olyan $e_1 \in \varepsilon_1$ egyenes, amelyik pontosan két Q_1-beli pontot tartalmaz. Ha P_2 jelöli az egyiket, akkor hagyjuk el P_2-t és az összes olyan P_2-re illeszkedő egyenest, amelyik pontosan két Q_1-beli pontot tartalmaz. Az új ponthalmazt jelölje Q_2, az új egyeneshalmazt ε_2. Ha Q_2 pontjai mind egy egyenesre illeszkednek, akkor $|\varepsilon_1| = n - 1$ és $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| + 1 = n$. Ha Q_2 elemei nem illeszkednek mind egy egyenesre, akkor az előzőekhez hasonlóan konstruáljuk meg a Q_3 és ε_3 halmazokat, majd folytassuk az eljárást mindaddig, amíg Q_k pontjai egy egyenesre nem illeszkednek. (Ez legfeljebb $n-2$ lépés után bekövetkezik.) Ekkor $|\varepsilon_{k-1}| = n - (k-1)$. Mivel $|\varepsilon_{k-1}| \leq |\varepsilon| - (k-1)$, ezért

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_{k-1}| + k - 1 = n - (k-1) + (k-1) = n.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

2. Megoldás: Gallai tétele értelmében tudjuk, hogy ha adott a síkon n darab pont úgy, hogy nem illeszkednek mind egy egyenesre, akkor létezik legalább egy olyan egyenes, amely az n pont közül pontosan 2-t tartalmaz. Az ilyen egyeneseket nevezzük *közönséges egyenes*eknek. Bizonyítandó, hogy a nem egy egyenesre illeszkedő n darab pont biztosan meghatároz legalább n darab egyenest, amelyek mindegyike legalább két pontot tartalmaz a megadottak közül. Bizonyítsunk teljes indukcióval. $n = 3$-ra az állítás igaz, mivel 3 nem egy egyenesre illeszkedő pont háromszöget határoz meg, ennek három oldalegyenese a 3 egyenes. Tegyük fel, hogy n darab pontra teljesül az állítás, vagyis, hogy az n darab pont legalább n darab egyenest határoz meg. Bizonyítsuk most, hogy az állítás $n+1$ pont esetén is igaz. Az $n+1$ pont nincs mind egy egyenesen, ezért Gallai tétele szerint biztosan van legalább egy közönséges egyenes. Tekintsük valamelyik (,vagy az egyetlen) közönséges egyenest. A rajta elhelyezkedő két pont közül hagyjuk el az egyiket, így n pontunk maradt a síkon. Két eset lehetséges:

- Amennyiben ez a megmaradó n pont egy egyenesen van, akkor az $n+1$-edik ponttal összekötve kapunk n darab különböző egyenest, az $n+1$-edik egyenes pedig az, amelyik az n darab pontot tartalmazza. Ebben az esetben tehát teljesül az állítás.
- Amennyiben ez az n darab pont nincs mind egy egyenesen, használjuk az indukciós feltevést. Az n pont eszerint biztosan meghatároz legalább n darab egyenest. Az $n+1$-edik egyenes a kiemelt közönséges egyenes. Ezzel erre az esetre is bizonyítottuk az álítás helyességét.

Bárány Ambrus megoldása