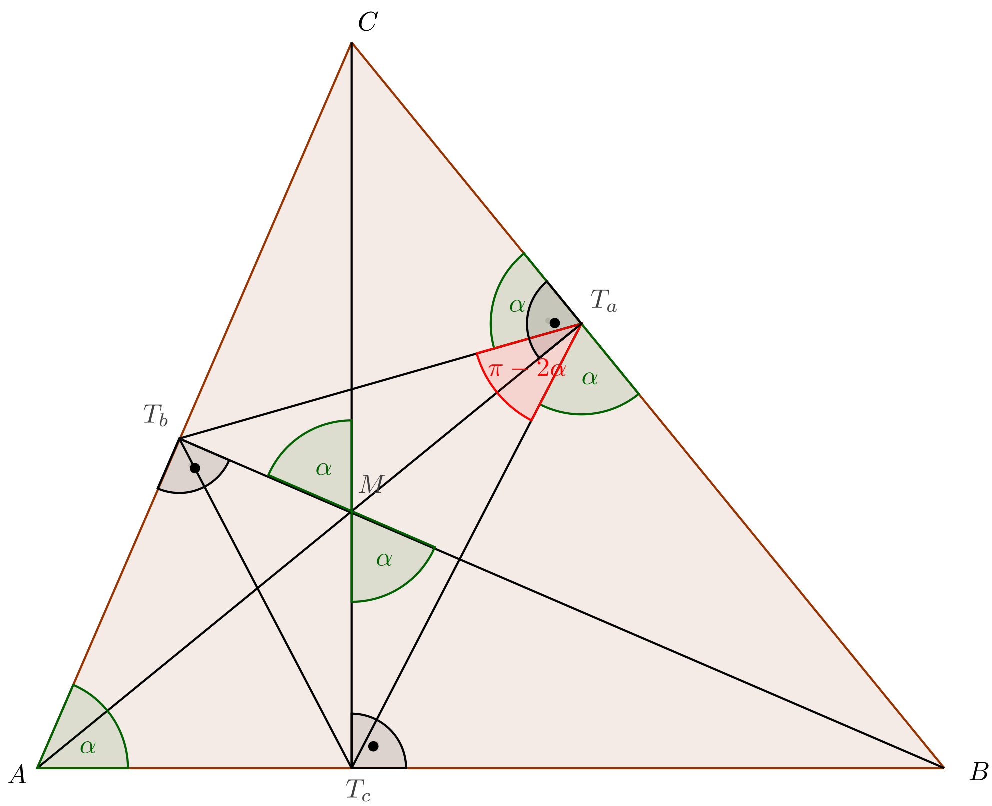
Talpponti háromszögek kaotikussága

Garay Barnabás 2009. november 24-én tartott előadásának első részét lejegyezte Bartha Zsolt

2010. szeptember 26.

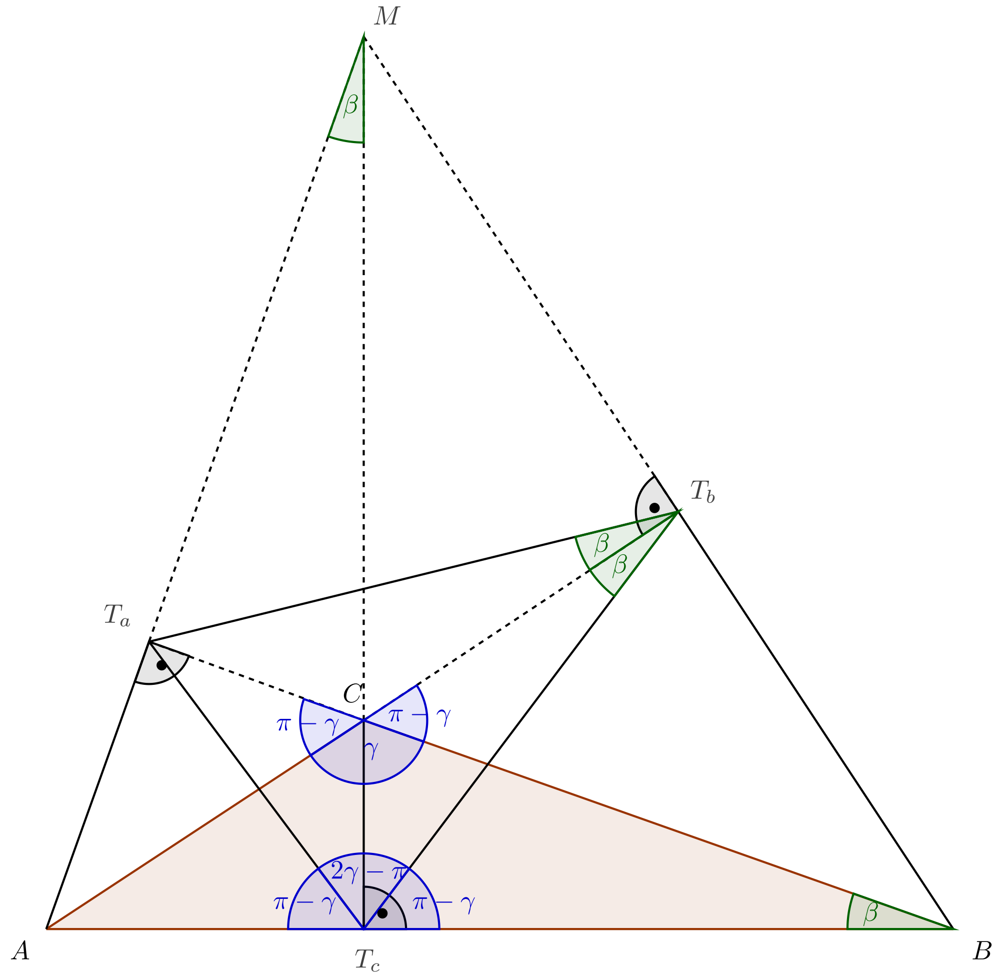
Tekintsünk egy tetszőleges, nem derékszögű ABC háromszöget, és bocsássunk merőlegest mindhárom csúcsából a vele szemközti oldal egyenesére. Az így kapott talppontok (T_a, T_b illetve T_c) által meghatározott háromszöget az ABC háromszög talpponti háromszögének nevezzük. Az a leképezés, amely egy háromszöghöz a talpponti háromszögét rendeli (hasonlóság erejéig, tehát a szögekre vagyunk kíváncsiak) érdekes tulajdonságokkal bír, például kaotikus, azaz sokszor alkalmazva bizonyos értelemben kezelhetetlenné válik. Vizsgáljuk meg ezért alaposabban ezt a transzformációt.

Számoljuk ki a $T_aT_bT_c$ háromszög szögeit az ABC háromszög szögeinek (α, β, γ) ismeretében. Két esetet kell elkülönítenünk aszerint, hogy ABC hegyesszögű vagy tompaszögű.



1. ábra. Hegyesszögű háromszög

Ha ABC hegyesszögű, akkor az M magasságpontja a háromszögön belül van (lásd az 1. ábrát). A T_cMB szög megegyezik a BAC szöggel, azaz α-val, mivel merőleges szárú szögek. A derékszögek miatt a BT_cMT_a négyszög húrnégyszög, így a kerületi szögek tétele miatt $T_cT_aB\sphericalangle = T_cMB\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóan, a CT_aMT_b négyszög is húrnégyszög, így $CT_aT_b\sphericalangle = CMT_b\sphericalangle = \alpha$. A $T_bT_aT_c$ szög nagysága tehát $\pi - 2\alpha$. Hasonlóan belátható, hogy a talpponti háromszög T_b-nél levő szöge $\pi - 2\beta$, a T_c-nél levő szöge $\pi - 2\gamma$ nagyságú.



2. ábra. Tompaszögű háromszög

Ha ABC tompaszögű, akkor a magasságpontja a háromszögön kívül van. Legyen például γ tompaszög (lásd a 2. ábrát). A BCT_b és az ACT_a szögek az ACB szöghöz tartozó külső szögek, így $\pi - \gamma$ nagyságúak. A derékszögek miatt BT_cCT_b és AT_cCT_a húrnégyszögek, emiatt $BT_cT_b\sphericalangle = BCT_b\sphericalangle = \pi - \gamma$ és $AT_cT_a\sphericalangle = ACT_a\sphericalangle = \pi-\gamma$, így $T_aT_cT_b\sphericalangle = \pi-2(\pi-\gamma) = 2\gamma-\pi$. A $T_aT_bT_c$ szög nagysága pedig a következőképpen adódik: ismét a BT_cCT_b húrnégyszögben $T_cT_bC\sphericalangle = T_cBC\sphericalangle = \beta$. $AMT_c\sphericalangle = T_aBA\sphericalangle = \beta$, mert merőleges szárú szögek, és mivel T_aCT_bM is húrnégyszög, $T_aT_bC\sphericalangle = T_aMC\sphericalangle = \beta$. Így $T_aT_bT_c\sphericalangle = 2\beta$. Hasonlóan belátható, hogy $T_cT_aT_b\sphericalangle = 2\alpha$.

Tekintsünk az ABC háromszögre úgy, mint egy $\underline{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ponthármasra. Legyen T az a leképezés, amely az ABC háromszöghöz a talpponti háromszögét, $T_aT_bT_c$-t rendeli. Az elmondottak alapján tehát:

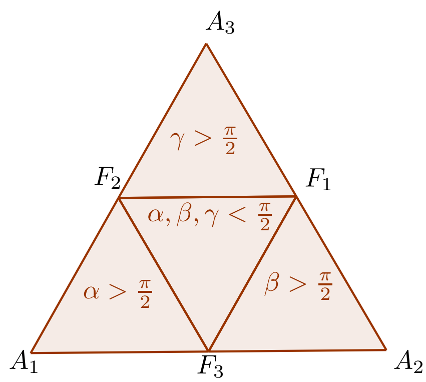
$$T(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} (\pi-2\alpha, \pi-2\beta, \pi-2\gamma) & \text{ha } \alpha,\beta,\gamma < \frac{\pi}{2}, \\ (2\alpha-\pi, 2\beta, 2\gamma) & \text{ha } \alpha > \frac{\pi}{2}, \\ (2\alpha, 2\beta-\pi, 2\gamma) & \text{ha } \beta > \frac{\pi}{2}, \\ (2\alpha, 2\beta, 2\gamma-\pi) & \text{ha } \gamma > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Szemléltessük eredményünket a következőképpen: tekintsünk egy $A_1A_2A_3$ szabályos háromszöget (egy adott síkban). Ekkor a sík egy tetszőleges P pontjához tartozik egy (a,b,c) ponthármas, melyre $a+b+c=1$ és ha az A_1,A_2,A_3 csúcsokat rendre a-val, b-vel és c-vel súlyozzuk, akkor a kapott pontrendszer súlypontja P. Úgy is mondhatjuk: válasszunk egy origót (O) a síkon kívül, és legyen $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$ és $\overrightarrow{OA_3}=\mathbf{a}_3$. Ekkor az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, így a sík minden P pontjához tartozik pontosan egy (a,b,c) számhármas, melyre $\overrightarrow{OP}=a\mathbf{a}_1+b\mathbf{a}_2+c\mathbf{a}_3$, továbbá belátható, hogy ekkor $a+b+c=1$. (A sík pontjainak ezt a fajta koordinátázását súlyponti vagy baricentrikus koordinátázásnak nevezik.) A sík egy (fentiek szerinti) (a,b,c) koordinátájú pontjához rendeljük az $(a\pi,b\pi,c\pi)$ ponthármast. Ennek a három számnak az összege minden pontra π, így ha a, b, c pozitívak, ez a pont egyértelműen jelölheti azt a háromszöget, amelynek a szögei $a\pi$, $b\pi$ és $c\pi$. Könnyen látható, hogy az A_1, A_2, A_3 pontokhoz rendre a $(\pi,0,0)$, $(0,\pi,0)$, $(0,0,\pi)$ ponthármast rendeljük, továbbá azok a pontok, melyek mindhárom koordinátája pozitív, az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében vannak. Nézzük meg, hová visz egy ilyen pontot a T leképezés.

Ha az ABC háromszög tompaszögű, például α tompaszög, akkor a fentiek szerint a háromszögnek megfelelő $\underline{x}$ pont képe: $T(\underline{x})=T(\alpha,\beta,\gamma)=(2\alpha-\pi,2\beta,2\gamma)$. Ebből $\underline{x}=\frac{T(\underline{x})+(\pi,0,0)}{2}$, azaz $\underline{x}$ az $A_1T(\underline{x})$ szakasz felezőpontja. A T leképezés tehát a pontot A_1-ből kétszeresére nagyítja. Ugyanígy látható, hogy ha β vagy γ a tompaszög, akkor a leképezés A_2-ből illetve A_3-ból nagyít kétszeresére.

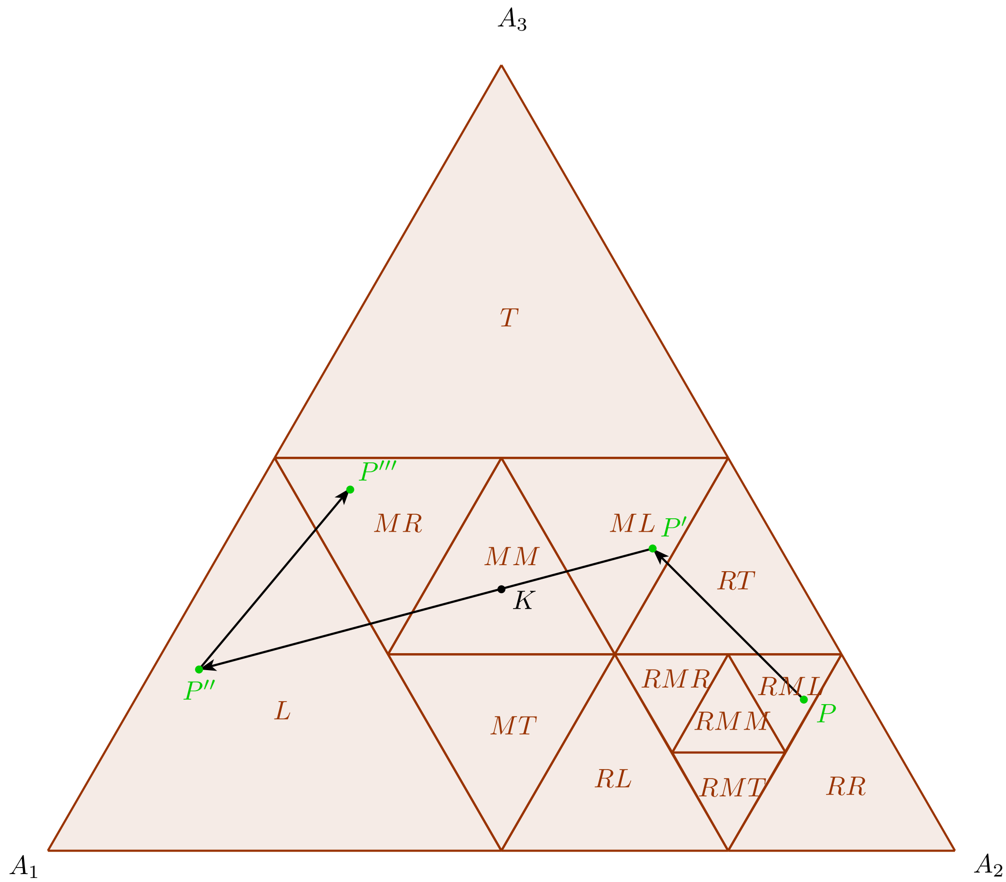
Ha ABC hegyesszögű, akkor az $\underline{x}$ pont képe: $T(\underline{x})=(\pi-2\alpha,\pi-2\beta,\pi-2\gamma)$. Ekkor azt írhatjuk fel, hogy $\frac{T(\underline{x})+2\underline{x}}{3}=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, ami épp az $A_1A_2A_3$ háromszög középpontja (K). Tehát ebben az esetben a T leképezés az $A_1A_2A_3$ háromszög középpontjából történő -2 arányú nagyítás.

Hol vannak az egyes eseteknek megfelelő pontok az $A_1A_2A_3$ háromszögen? Ha például $\alpha>\frac{\pi}{2}$, akkor a koordinátázás során A_1-nek $\frac{1}{2}$-nél nagyobb súlyt adunk, tehát többet, mint A_2-nek és A_3-nak együtt. Így a súlypontnak A_1-hez közelebb kell lennie, mint az A_2A_3 oldalhoz. Ez azt jelenti, hogy ha F_1,F_2,F_3 jelölik rendre az A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 oldalak felzőpontját, akkor az ABC háromszögnek megfelelő pont az $A_1F_3F_2$ háromszög belsejében van. Hasonlóan, a B-nél tompaszögű háromszögnek megfelelő pont az $A_2F_1F_3$ háromszög, a C-nél tompaszögűnek megfelelő az $A_3F_2F_1$ háromszög belsejében van. A hegyesszögű háromszögeknek megfelelő pontok pedig a maradék területen, az $F_1F_2F_3$ háromszög belsejében vannak. (Lásd a 3. ábrát.) Az $F_1F_2F_3$ háromszög határán lévő pontok a derékszögű háromszögeknek felelnek meg, ezekkel nem foglalkozunk.



3. ábra. Az ABC-nek megfelelő pont elhelyezkedése

Próbáljuk most meg leírni egy adott pont pályáját, amint egymás után alkalmazzuk rá sokszor a T transzformációt. Ehhez a következő leírást fogjuk használni a pontok helyzetére: Osszuk fel az $A_1A_2A_3$ háromszöget 4 egyenlő részre (ahogy a 3. ábrán látható). Jelölje a felső háromszöget T(top), a bal alsót L(left), a jobb alsót R(right), a középsőt pedig M(middle). Ezután mindegyik kis háromszöget osszuk ugyanígy fel 4 egyenlő részre, és a jelölésükhöz használjuk ugyanezt a rendszert: például a felső háromszög jobb alsó háromszögét TR-rel fogjuk jelölni. A közéső háromszög esetében a másik irányból kell az ábrára nézni (hogy az is felfele álljon), és úgy megadni az elnevezéseket. (Például a középső háromszög jobb felső háromszöge olyan, mint a többinek a bal alsó, így ML-lel jelöljük.) Ezután ezeket a kis háromszögeket ismét négy egyenlő részre osztjuk, és így tovább, az elnevezésnél mindig hozzáadva a megfelelő betűt a háromszög nevéhez, hogy megkapjuk a részei nevét. Mivel a háromszögek mérete nullához tart, egy pontot egyértelműen megadhatunk egy T, L, R és M betűkből álló végtelen sorozattal: $MLMRTR\dots$ az a pont, amely benne van az M háromszögben, ezen belül, az ML háromszögben, ezen belül is az MLM háromszögben, és így tovább. Vegyük észre, hogy a T leképezés a T, L, R, M háromszögek mindegyikét a teljes háromszögbe képezi, azon belül viszont megtartja a tagozódást: például a TL háromszög pontjai az L háromszög pontjaiba képződnek, az $MRLLTR$ háromszög pontjai az $RLLTR$ háromszög pontjaiba (és minden ilyen pont előáll valamely pont képeként). Ezért a pontokra ezt a leírást használva nagyon egyszerűen megadhatjuk egy pont T általi képét: a neki megfelelő betűsorozatból elvesszük az első betűt.



4. ábra. A háromszög felosztása és egy pont pályája a T leképezés ismételt végrehajtása során

Ezek alapján már megfogalmazhatjuk, mit jelent az, hogy a T leképezés kaotikus. Ha egy pontról például tudjuk, hogy $RRTMLT$-ben van, de azt nem tudjuk, hogy ezen belül melyik háromszögben (tehát 6 szintnyi pontossággal ismerjük a helyzetét), akkor a T leképezés 6-szori alkalmazása után semmit nem fogunk tudni a helyzetéről, az az $A_1A_2A_3$ háromszög tetszőleges pontja lehet. Tehát ha valamilyen adott hibahatárral ismerjük a pont helyzetét (és a gyakorlatban a mérőeszközeink korlátai miatt nem ismerhetjük teljesen pontosan), akkor akármilyen kicsi is ez a hibahatár, a leképezés bizonyos számú alkalmazása után már semmit nem fogunk tudni a pont elhelyezkedéséről. A kaotikusságot másképp is megfogalmazhatjuk: ha kiválasztunk egy pontot az $A_1A_2A_3$ háromszögből, akkor az 1 valószínűséggel olyan lesz, hogy a pályája (miközben végtelen sokszor ismételjük meg rá a T leképezést) egyenletesen járja be az $A_1A_2A_3$ háromszöget.

Az előzőeket használva egy másik érdekes dolgot is megfigyelhetünk. Egy leképezést vizsgálva felvetődik a kérdés, hogy van-e olyan pont amire n-szer egymás után alkalmazva a leképezést visszajutunk a kiindulási ponthoz, más szóval milyen n-ekre van n hosszú ciklusa a leképezésnek. A T leképezésünket vizsgálva erre könnyen választ adhatunk a fentiek segítségével: tetszőleges n-re van ciklus. Vegyünk ugyanis egy n hosszú sorozatot az L, T, R, M betűkből, például $n = 3$-ra az RML-et és ezt írjuk egymás után végtelenszer. Ez a betűsorozat meghatároz egy pontot, amelyre 3-szor alkalmazva a leképezést ugyanazt az $RMLRMLRML\ldots$ pontot kapjuk, amiből kiindultunk. Ha pedig olyan pontot szeretnénk találni, amelyre adott n-re n-szer alkalmazva a leképezést önmagát kapjuk, de kevesebbszer alkalmazva nem, ilyet is könnyen megadhatunk: ekkor a választott n hosszú sorozat nem állhat egy rövidebb szakasz ismétlődéséből.