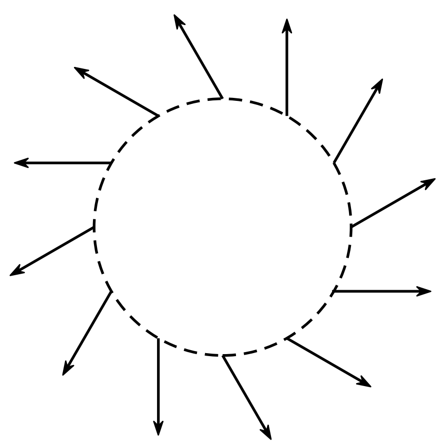
Tudományos népszerűsítő előadások a Fazekasban

Szűcs András

Levesek és sünök

Topológia



A 2007. november 20-án elhangzott előadást lejegyezte

Peregi Tamás

A problémák, amikkel foglalkozni fogunk

Rejtély, hogy mitől olyan hatékony eszköze a világ megértésének a matematika a fizikusok kezében - így összegezhető egy Nobel díjas magyar fizikus, Wigner Jenő egyik írása. E rejtély egyik nyitja minden bizonnyal az, hogy a matematika segítségével nagyon különböző jelenségek mögött fedezhetjük fel ugyanazt a struktúrát. Lássunk néhány példát, amikor a matematikai struktúra azonossága azonnal nyilvánvaló, és olyat is, ahol ez rejtettebb!

Első példapár:

1A. „A levest nem lehet tökéletesen megkeverni" Egy (lapos) fakanállal nem lehet a levest úgy megkeverni, hogy egyetlen molekula se maradjon helyben.

1B. Az asztalon előttünk fekszik egy papírlap. Ezt felvesszük, összegyűrjük, majd ugyanazon helyre visszahelyezzük. Ekkor biztosan lesz olyan pontja a papírlapnak, mely ugyanoda kerül vissza.

Második példapár:

2A. „A sündisznót nem lehet megfésülni." Vagyis nem lehet az összegömbölyödött sündisznó tüskéit a gömb érintősíkjába úgy belefésülni, hogy sehol se keletkezzen „forgója."

2B. A Földön minden pillanatban van olyan pont, ahol nem fúj a szél.

Harmadik példapár:

3A. Mindig létezik a Földön két átellenes pont, ahol a hőmérséklet értékei is megegyeznek egymással és a tengerszint feletti magasság értékei is (vagy bármely két fizikai állapotjellemző értékei).

3B. Egy három komponensből (kenyér, hús, sajt) álló szendvics egyetlen vágással elfelezhető. Vagyis, ha adott a térben három (véges kiterjedésű) test, akkor létezik olyan sík, mely mindhármat két egyenlő térfogatú részre osztja.

A legmeglepőbb azonban az, hogy az itt felsorolt problémák *mindegyike* egyazon matematikai fogalomnak, az ún. „forgásnak" a segítségével oldható meg. Ez mutatja igazán, hogy a matematikai absztrakció milyen hatékony eszköz abban, hogy a problémák lényegét meglássuk.

A használt jelölések

A következő jelöléseket fogjuk használni:

R^2: a kétdimenziós sík

$D^2 = \{x \in R^2 : |x| \leq 1\}$, azaz a kétdimenziós zárt körlemez

$S^1 = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$, azaz a körvonal

R^3: a háromdimenziós sík

$D^3 = \{x \in R^3 : |x| \leq 1\}$, azaz a háromdimenziós tömör gömb

$S^2 = \{x \in R^3 : |x| = 1\}$, azaz a gömbfelület

Első példapár:

1B. A papírlap topológiailag megfeleltethető egy körlapnak. Mivel a papír összegyűrése nyilvánvalóan folytonos transzformáció, az állítást a következőképp fogalmazhatjuk meg:

1. tétel (Brouwer fixpont-tétele): *Minden $f : D^2 \to D^2$ folytonos függvénynek van fixpontja, vagyis van olyan $x \in D^2$, melyre $f(x) = x$.*

Az 1A. állítás Brouwer fixpont-tételének háromdimenzós formájával ekvivalens: *Minden $f : D^3 \to D^3$ folytonos függvénynek van fixpontja.*

(Amennyiben egy nagyon szegény ember leveséről van szó, akinek éppen egyetlen molekula vastagságú levese van csak, a kétdimenziós tétel alkalmazható.)

Második példapár:

2A. Képzeljük el a sünit úgy, mint egy gömböt, a tüskéit pedig a gömbfelület pontjaiból kiinduló egységvektoroknak, amelyekről megköveteljük, hogy benne legyenek a gömbfelület kezdőpontjukbeli érintősíkjában, és folytonosan függjenek a kezdőpontjuktól! (A folytonosság azért kritérium, mert egy fésűvel nyilván csak folytonos változást tudunk előidézni.) Azt állítjuk, hogy ez az elrendezés lehetetlen. Másképpen megfogalmazva:

2. tétel (Sündisznó-tétel): *Az S^2 gömbfelületen nem létezik olyan folytonos $v(x)$ érintő vektormező, amelyik sehol se lenne 0.*

2B. A gömbnek tekintett Föld minden pontjában vegyük fel a szélirányt és -erőt jelző vektort! Ekkor látható, hogy a 2B. állítás a sündisznó-tétellel ekvivalens.

Harmadik példapár:

Ennél a példapárnál jóval nehezebb a közös matematikai hátteret felfedezni.

A közös háttér az úgynevezett Borsuk-Ulam-tétel:

3. tétel (Borsuk-Ulam-tétel): *Minden $f : S^2 \to R^2$ folytonos függvényre van olyan $x \in S^2$, melyre $f(x) = f(-x)$*

A 3A. állítás könnyedén megfeleltethető ennek a tételnek: Legyen x a Föld felszínének egy tetszőleges pontja, és legyen $f(x) = (T(x), h(x))$, ahol $T(x)$ az x pontbeli hőmérséklet és $h(x)$ a tenger feletti magasság ugyanitt. A Borsuk-Ulam-tételből közvetlenül következik az állítás.

A 3B. állítás és a Borsuk-Ulam-tétel közötti kapcsolatot kicsit nehezebben lehet megragadni. Legyen $S(x)$ az a sík, amelyik merőleges x-re és felezi a „sajtot". Legyen $K(x)$ a „kenyeret" felező sík, és legyen $H(x)$ a „húst" felező sík!

Legyen $d\big(K(x), H(x)\big)$ a $K(x)$ és $H(x)$ síkok előjeles távolsága! (A távolság akkor pozitív, ha a $H(x)$ sík a $K(x)$ síktól az x vektor irányába esik.) Hasonlóan, legyen $d\big(K(x), S(x)\big)$ a $K(x)$ és $S(x)$ síkok előjeles távolsága!

Legyen $f(x) = \Big(d\big(K(x), H(x)\big) \quad , \quad d\big(K(x), S(x)\big)\Big)$!

Az előjeles távolság definíciója miatt nyilván $f(-x) = -f(x)$.

A Borsuk-Ulam-tétel miatt van olyan $x_0 \in S^2$, amelyre $f(x_0) = f(-x_0)$

Az előző két sor alapján $2 \cdot f(x_0) = f(-x_0) + -f(-x_0) = (0;0)$, emiatt

$$f(x_0) = (0;0)$$

, azaz a három sík ($S(x)$, $K(x)$ és $H(x)$) egybeesik, így van olyan sík, amelyik mindhárom testet felezi.

(Brouwer fixpont-tételét és a sündisznó-tételt a későbbiekben bizonyítani fogjuk, a Borsuk-Ulam-tétel bizonyítása megtalálható az „Új matematikai mozaik” című kiadványban.)

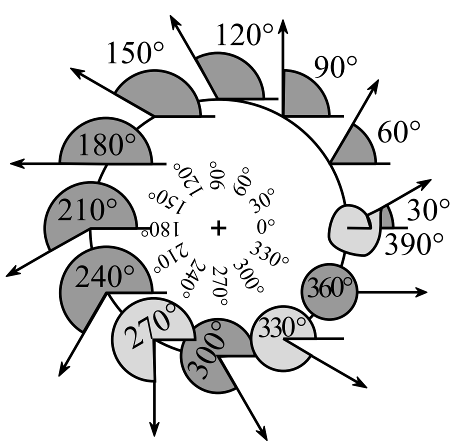
Egy segédeszköz: vektormező forgása

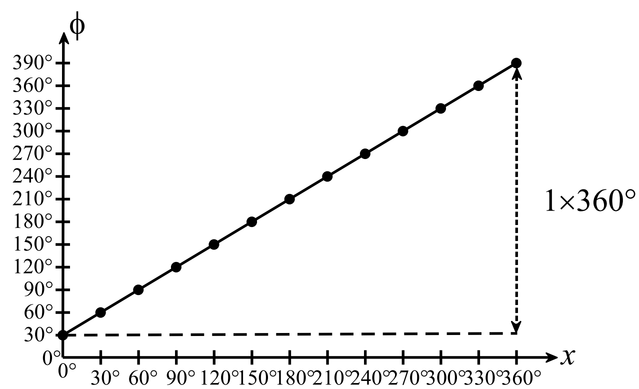
Rhene Thom Fields-medálos matematikus egyszer azt mondta: „Mindig találunk stupid alakokat a tételek bizonyítására”. Azt akarta ezzel kifejezni, hogy a matematikában számos esetben a jó fogalmak megtalálása a lényeges lépés, ezután a bizonyítás már nem igényel akkora erőfeszítést. Ilyen „jó fogalom” például a következőkben definiálandó forgás.

Tekintsünk egy S^1 körvonalat, és egy rajta értelmezett folytonos $v(x)$ vektormezőt!

Legyen a $v(x)$ vektor vízszintessel bezárt szöge $\varphi(v(x))$!

Induljunk ki az S^1 körvonal egyik pontjából, és induljunk el körbe a vonalon! Mivel $v(x)$ folytonosan változik, $\varphi(v(x))$ is folytonosan változik, amíg vissza nem érünk a kezdőpontba. Mivel azonban $\varphi(v(x))$ csak modulo 2π van meghatározva, lehet, hogy a kezdeti és a végső $\varphi(v(x))$ értékek nem egyenlők, hanem $2k\pi$-vel eltérnek, ahol k egy egész szám. Ezt a k értéket nevezzük a vektormező forgásának.





A definíciót úgy is elmondhatjuk, hogy vágjuk el az S^1 körvonalat az egyik pontjánál, és terítsük ki egy koordináta-rendszer x tengelyére! Amennyiben egy egységnyi sugarú körből indultunk ki, a szakasz hossza a kör kerületével, vagyis 2π-vel lesz egyelő. Mérjük az y tengelyen $\varphi(v(x))$ értékét! Mivel $\varphi(v(0))$ és $\varphi(v(2\pi))$ értéke modulo 2π megegyezik, különbségük $2k\pi$ alakú, ahol k egész. Ezt a k értéket nevezzük a vektormező forgásának.

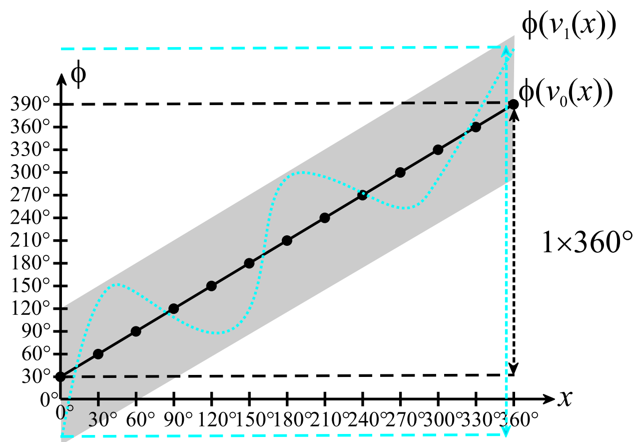
1. lemma

A D^2 körlemezen értelmezett sehol sem nulla vektormező által a körvonalon meghatározott vektormező forgása 0.

Legyen k a körvonalon értelmezett vektormező forgása! Ha egy kicsit kisebb sugarú kört vizsgálunk, akkor a folytonosság miatt az ezen a körön értelmezett vektormező vektorai alig térnek el az eredeti kör vektoraitól, így φ-grafikonjuk is az eredeti vektormező φ-grafikonjának igen kicsiny környezetébe esik. Emiatt kezdő- és végpontjuk is közel esik az eredeti végpontokhoz, így a kisebb körön értelmezett vektormező forgása is k. A gondolatmenet megismétléséből következik, hogy bármilyen kicsi sugarú körön értelmezett vektormező forgása is k lesz. A középpont elegendően kicsiny környezetében azonban $v(x)$ már szinte teljesen konstans, így ott a vektormező forgása 0. A fentiekből következik, hogy $k = 0$, azaz a körvonal forgása 0.

2. lemma

Ha az S^1-en értelmezett v_0 és v_1 vektormezők olyanok, hogy minden $x \in S^1$-re a $v_0(x)$ és $v_1(x)$ vektorok által bezárt szög kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$, akkor v_0 és v_1 forgása megegyezik.



A $\phi(v_1(x))$ grafikon lehetetlen, mert: $\phi(v_1(0)) \not\equiv \phi(v_1(2\pi)) \pmod{2\pi}$, de mutatja, hogy v_1 forgása nem lehet más, mint v_0 forgása

Rajzoljuk fel $v_0(x)$ φ-grafikonját! A feltétel miatt $v_1(x)$ φ-grafikonja ennek $\frac{\pi}{2}$ sugarú környezetébe esik. Legyen a v_0 mező forgása k_0, v_1 forgása k_1! Ekkor $\Delta\varphi(v_0) = \varphi(v_0(2\pi)) - \varphi(v_0(0)) = 2k_0\pi$. Mivel a $\varphi(v_1(x))$ grafikon a $\varphi(v_0(x))$ grafikon $\frac{\pi}{2}$ sugarú környezetébe esik, következik, hogy

$$\Delta\varphi(v_0) - \pi \leq \Delta\varphi(v_1) \leq \Delta\varphi(v_0) + \pi$$

azaz:

$$2k_0\pi - \pi \leq 2k_1\pi \leq 2k_0\pi + \pi$$

Mivel k_0 és k_1 egészek, következik, hogy $k_0 = k_1$.

Brouwer fixpont-tételének bizonyítása

Az előző pontban bizonyítottak alapján a fixpont-tétel bizonyítása már egyszerű.

Tegyük fel, hogy sikerült egy olyan $f: D^2 \to D^2$ folytonos függvényt találni, amelyiknek egyetlen fixpontja sincs! Tekintsük a $v(x) = f(x) - x$ vektormezőt! Mivel $f(x)$-nek nincs fixpontja, $v(x)$ semmilyen $x \in D^2$-re sem nulla.

Az 1. lemma szerint a D^2 kerületén értelmezett $v(x)$ vektormező forgása 0.

Tekintsük az $u(x) = -x$ vektomezőt S^1-en! ($u(x)$ az x pontból a középpontba mutató vektor.) u forgása nyilvánvalóan ± 1, attól függően, hogy milyen körüljárási irány szerint haladunk. Mivel $u(x)$ minden $x \in S^1$-re $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb szöget zár be $v(x)$-szel, a 2. lemma alapján következik, hogy u forgása 0. Ez ellentmondás, így a kezdeti feltevésünk hamis, vagyis nem találhatunk fixpontmentes $f(x)$ függvényt. A tétel tehát igaz.

A sündisznó-tétel bizonyítása

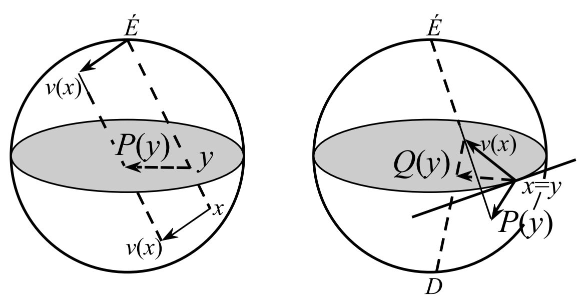
Tegyük fel, hogy sikerült megfésülni a sündisznót, azaz sikerült találni az S^2 gömbfelületen egy olyan folytonos $v(x)$ érintő vektormezőt, amelyik sehol sem nulla!

Jelöljük ki az S^2 gömbfelület egyik egyenlítőjét, és a hozzá tartozó északi és déli sarkokat! Definiáljunk az egyenlítő síkjának és a gömbnek a metszetében fekvő D^2 körlemezen egy $P(y)$ vektormezőt az alábbi módon: legyen x a déli félteke egyik pontja! (Beleértve az egyenlítőt is.) Kössük össze x-et az északi sarkkal! Ahol az összekötő egyenes metszi az egyenlítő síkját, jelöljük y-nal! Toljuk el az összekötő egyenest a $v(x)$ vektorral! Az y-ból az eltolt egyenes és az egyenlítő síkjának metszeteként keletkezett pontba mutató vektor legyen $P(y)$! Mivel $v(x)$ sehol sem nulla, következik, hogy $P(y)$ sem nulla sehol sem.

Definiáljuk a $Q(y)$ vektormezőt ugyanilyen módon, csakhogy az északi félteke pontjait kötögessük össze a déli pólussal!

Az egyenlítő pontjaiban $y = x$.

A kapott $P(y)$ és $Q(y)$ vektormezőket vizsgálva az 1. lemma következtében igaz, hogy $P(y)$ és $Q(y)$ forgása az egyenlítő mentén 0.



Egy kis térgeometriával könnyedén belátható, hogy az egyenlítő pontjaiban $P(y)$ és $Q(y)$ szögfelezője éppen az egyenlítőkör érintője. Ennek forgása körüljárási iránytól függően nyilván ± 1. Mivel azonban $P(y)$ és $Q(y)$ szöge legfeljebb π, következik, hogy $P(y)$ és az érintő szöge legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, így a 2. lemma alapján az érintő forgása 0. Ez ellentmondás, így a kezdeti feltevésünk hamis, tehát a sündisznó-tétel igaz.

Hogyan segítsünk a sündisznónkon?

A kérdés a továbbiakban az, hogyan tudnánk segíteni szépítkezni kívánó sündisznónkon. A problémára kétféle megodlás is létezik, az egyik nagyon drasztikus, a másik kevésbé.

A drasztikus megoldások kedvelői számára járható út az, hogy a sündisznót valami hegyes tárggyal keresztüldöfjük. Ennek hatására sündisznónk topológiailag tórusszá (úszógumi alakú test) alakul, amelyet már könnyedén meg lehet fésülni. Vigyázni kell azonban, nehogy túlságosan magával ragadjon minket a segíteni akarás vágya, és többször is keresztüldöfjük a szerencsétlen sündisznót! Ekkor ugyanis soha többé az életben nem lesz képes megfésülködni, ezt a Poincaré-Hopf-tétel egyik speciális esete garantálja:

Adott egy felület, és rajta egy véges sok helyen nulla érintő vektormező. Minden nullahely kicsiny környezetében felvehetünk egy kört, amelyen értelmezhető a forgás. A forgások összege megegyezik a felület Euler-karakterisztikájával.

Mi is az az Euler-karakterisztika? Bizonyítható, hogy amennyiben a felületet felbontjuk háromszögekre, és kiszámoljuk a $c - e + \ell$ értéket, ahol c a csúcsok száma, e az élek száma és ℓ a háromszögek száma, akkor a felbontástól függetlenül ugyanazt az értéket kapjuk. Ezt az értéket nevezzük a felület Euler-karakterisztikájának.

Bizonyítható az is, hogy egy p-személyes úszógumi-felület (azaz egy p-szer átszúrt sün) Euler-karakterisztikája $2 - 2p$.

Vagyis ha egy p-szer átszúrt sündisznót megpróbálunk megfésülni, akkor a forgóinál kiszámolt forgások összege $2 - 2p$ lesz. Ha tehát sikerült forgómentesen megfésülni, akkor, mivel a 0 tagú összeg értéke 0, következik, hogy $p = 1$. Fentiek szerint csak az egyszeresen átszúrt sündisznó fésülhető meg.

A kevésbé drasztikus olvasók megkönnyebbülten vehetik tudomásul, hogy sünike megfésülésére van egy fájdalommentes megoldás is, amelynek során kedvenc háziállatunk világszemlélete is tágulhat: elég megnövelni a dimenzióját. Itt is vigyázni kell azonban: ha páratlan sokszor növeljük meg, azaz egy olyan S^n felületű sündisznót próbálunk megfésülni, ahol n páratlan, sikerrel járunk, ha viszont páros sokszor növeljük meg, és így n páros lesz, segítő szándékunk kudarcba fog fulladni. (Természetesen az is megoldás, ha a sündisznó dimenzóját 1-gyel csökkentjük, azaz S^1-nek tekintjük. Így már könnyedén megfésülhetjük, ám a dimenzió elvesztése miatt valószínűleg zúgolódni fog.)

Ajánlott irodalom

Szűcs András: *A sündisznó megfésülése és egyéb gyakorlati problémák*, az „Új Matematikai mozaik”-ban, Typotex, 2002, 395-412. o., vagy az interneten: http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b124/ch-18.html

Stipsicz András: *Csomók és invariánsaik*, http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/

Moussong Gábor: *A Poincaré-sejtés*, http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/

W. G. Chinn – N. E. Steenrod: *Bevezetés a topológiába*, Gondolat kiadó, 1980