Függvények, 11–12. évfolyam

Hraskó András és Surányi László

2014. június 19.

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Harmadfokú függvények

1.1. A harmadfokú függvény

Ebben a fejezetben a harmadfokú függvény grafikonjának egyszerű geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A másodfokú függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus, és ez egyszerű függvénytranszformációval következik abból, hogy az x^2 függvény páros függvény, így tengelyesen szimmetrikus. Az x^3 függvény páratlan, tehát az origóra középpontosan szimmetrikus. Ezért azt remélnénk, hogy minden harmadfokú függvény középpontosan szimmetrikus. Csakhogy itt a helyzet bonyolultabb, mert nem kaphatunk meg minden harmadfokú függvényt az x^3 függvényből. A másodfokú függvénynél a "teljes négyzetté alakítás" alapján tudunk minden másodfokú függvényt előállítani az x^2 függvényből. Először tehát azt vizsgáljuk meg, hogy a hasonló eljárás segítségével mennyire egyszerűsíthető a harmadfokú függvény alakja.

Ezután a függvény konvexitási tartományait, majd a monotonitási tartományait keressük meg. Mindkettőhöz használni fogjuk a differenciahányadost:

Definíció. Az x és y pontokban értelmezett f függvénynek e két ponthoz tartozó *differenciahányadosa* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Szavakkal: a függvény grafikonjának az x és y abszcisszájú pontokhoz tartozó pontjait összekötő húr meredeksége.

Használni fogjuk a következő egyszerű tényeket:

Tétel. Az (a, b) intervallumon értelmezett f függvény ebben az intervallumban pontosan akkor nő monotonan (szigorúan monotonan), ha az intervallum bármely rögzített x pontjára az $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ függvény nem negatív (pozitív). Ezt a függvényt az f függvénynek az x pontjához tartozó differenciahányados függvényének nevezzük. Az f függvény pontosan akkor konvex ezen az intervallumon, ha minden x ponthoz tartozó differenciahányados függvény monoton nő.

A csökkenésre és a konkavitásra vonatkozó állításokat -1-gyel való szorzással kapjuk a fenti tételből.

1.2. A harmadfokú függvény szimmetriája

1.1. (S) Igazoljuk, hogy alkalmas $x_\prime = x + t$ választással az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény $a(x_1^3 + px_1 + q$ alakra hozható

1.2. (M) Az 1.1 feladat szerint elég az $y = x^3 + px + q$ függvény grafikonjának a geometriai tulajdonságát vizsgálnunk.

Igazoljuk, hogy az $y = x^3 + px + q$ függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus és keressük meg a szimmetria középpontját!

1.3. (S) Van-e szimmetria középpontja az általános ax^3+bx^2+cx+d harmadfokú függvénynek (a nem nulla)?

1.3. A harmadfokú függvény konvexitása

1.4. (M) Igazoljuk, hogy az $x^3 + px$ függvény a szimmetria középpontja "után" a grafikon konvex (a grafikon fölötti tartomány konvex), "előtte" konkáv (azaz a grafikon alatti tartomány konvex).

1.5. (S) állapítsuk meg az általános $ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvény (a nem nulla) konvexitási (és konkávitási) tartományait!

1.4. A harmadfokú függvény valós gyökeinek száma I.

1.6. (M) Igazoljuk, hogy ha az $x^3 - ax^2 + bx - c$ polinomban $a^2 < 3b$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.7. (S) Igazoljuk, hogy ha az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomban $b^2 < 3ac$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.5. A harmadfokú függvény monotonitása és helyi szélsőértékei

1.8. (M) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x számra $-5x^3 - 2x^2 + 3x \leq \frac{16}{27}$.

1.9. (M) Igazoljuk, hogy minden nem negatív x számra $x(4 - x^2 \leq \frac{16}{3\sqrt{3}}$.

Mikor áll fenn az egyenlőség?

1.10. (S) Bizonyítsuk be, hogy
$x(p-x^2) \leq \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$,
ha x pozitív. Egyenlőség $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ esetén van.

1.11. (M) Tekintsük most az $x^3 - px + q$ harmadfokú függvényt. A **??** feladatban láttuk, hogy ennek a függvénynek egyetlen inflexiós pontja van, mégpedig az $x = 0$ abszcisszájú pontban. A monotonitásáról a következőket tudjuk:

Ha $p \leq 0$, akkor ez a függvény szigorúan monotonan növekszik az egész számegyenesen.

Ha $p > 0$, akkor eddig azt láttuk be, hogy a pozitív félegyenesen az ellentettjének pontosan egy maximuma van, az $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ pontban. (Lásd az 1.10, tehát ennek a függvénynek a pozitív félegyenesen ugyanitt minimuma van.

Bizonyítsuk be, hogy a függvény a $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon szigorúan monotonan csökken, az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen szigorúan monotonan növekszik.

A negatív félegyenesen pont fordítva viselkedik a függvény, mert páratlan.

1.6. Összefoglalás és még egy geometriai tulajdonság

1.12. (S) Összefoglalás.

Tekintsük az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvényt, ahol a nem nulla. Igazoljuk a következőket:

Az f függvény szimmetrikus a $\frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontjára. Ha a pozitív, akkor a kisebb abszcisszájú pontok alkotta félegyenesen konkáv, az ellenkező félegyenesen konvex. Ha a negatív, akkor pont fordítva.

Ha $b^2\ 3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az egész számegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken). Ezekben az esetekben pontosan egy nullhelye van a függvénynek. (Egyenlőség esetén lehet háromszoros nullhely is.)

Ha $b^2 > 3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az f függvény

az $x \leq \frac{-b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_0$ félegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken), az $x_0 \leq \frac{-b}{3a} + \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_1$ intervallumon szigorúan monotonan csökken (nő), az $x_1 < x$ félegyenesen ismét szigorúan nő (csökken).

1.13. (S) Az 1.12 jelöléseit használva húzzunk párhuzamost az x-tengellyel az x_0 abszcisszájú ponton át, messe ez másodszor az $x_0^{'}$ abszcisszájú pontban a függvény grafikonját. Hasonlóan definiáljuk az $x_1^{'}$ pontot. Bizonyítsuk be, hogy
$x_0^{'} = -2x_0$ és $x_1^{'} = -2x_1$.

Mivel x_0 és x_1 egyenlő távol van $\frac{-b}{3a}$-tól (a szimmetria középpont abszcisszájától), ezért a fenti állítás geometriailag azt jelenti, hogy az 1.1 ábrán szereplő négy téglalap egybevágó.

E megjegyzés alapján kipróbálhatjuk, tudunk-e spontán módon olyan függvénygrafikont rajzolni, amelyik hasonlít egy harmadfokú függvényére.

1.14. (S) Milyen valós q számokra van három gyöke az $x^3 - px + q$ polinomnak?

2. FEJEZET
Az érintő

2.1. [12] Határozzuk meg az $y = x^2+2x+2$ parabola $x = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

2.2. [12] Határozzuk meg az $y = 1 + x \ln x$ görbéhez egységnyi ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét!

2.3. [12] Határozzuk meg az $y = x^3 + 1$ görbe azon érintőinek egyenletét, melyek az $y = 3x + 1$ egyenessel párhuzamosak!

2.4. [12] Mekkora területű háromszöget alkot a koordinátatengelyekkel az $xy = 1$ hiperbola $x = a$ abszcisszájú pontjához húzott érintője?

3. FEJEZET
Függvényvizsgálat

A fejezet nagyrészt a Somogyi László által a budapesti István Gimnázium speciális matematika tagozatos osztályában 1984-85-ben tartott órák jegyzete alapján készült.

3.1. (M) Vizsgáljuk az

$f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$ $f_2(x) = e^{8x-x^2-14}$ $f_3(x) = xe^{-x}$

$f_4(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ $f_5(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{10}$ $f_6(x) = x \ln^2 x$

függvényeket az alábbi szempontok szerint:
I. Értelmezési tartomány meghatározása;
II. Globális tulajdonságok: paritás, szimmetria, periódus;
III. Zérushely, előjel;
IV. Határérték az ÉT „szélein”;
V. Derivált;
VI. A derivált előjele, lokális és globális szélsőértékek, monotonitási intervallumok;
VII. Értékkészlet;
VIII. Második derivált;
IX. A második derivált előjele, konvexitás;
X. Grafikon megrajzolása.

3.2. Vizsgáljuk az

$g_1(x) = \ln^2 x - 4 \ln x$ $g_2(x) = e^x(3 - x^2)$

$g_3(x) = \sin x + \cos 2x$ $g_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

$g_5(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ $g_6(x) = \ln \sin x$

függvényeket a 3.1. feladatban leírt szempontok szerint!

4. FEJEZET
Szélsőérték

4.1. (M) [6] Adott egyenes körkúpba írjunk maximális felszínű hengert!

4.2. [4] 1 literes henger alakú bádog edényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk a méreteit, hogy a legkevesebb bádogra legyen szükségünk?

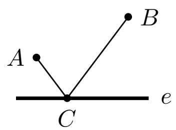
4.3. [4] Egy négyzet alakú papírlapból a maximális térfogatú nyitott dobozt akarjuk készíteni. A sarkokon kis négyzeteket vágunk le, és az oldalt keletkező részeket felhajtjuk. Határozzuk meg a nagy és a levágandó kis négyzet oldalának arányát!

4.4. [4] Hogyan lehet A-tól B-be az e egyenes érintésével az ACB alakú legrövidebb úton eljutni (az 1. ábra)?

4.5. [4] A-ból B-be akarunk jutni a legrövidebb idő alatt; az e egyenesig c_A egyenletes sebességgel haladunk, az e egyenesen túl pedig c_B egyenletes sebességgel (az 1. ábra). Milyen úton menjünk?

4.6. [4] Egy r sugarú kerek asztal közepe fölött van egy föl- és letolható lámpa. Milyen magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy az asztal körül ülők a legjobban lássanak? (A fénytanból ismeretes, hogy a fényerősség a távolság négyzetével fordítottan, a fénysugaraknak az asztal síkjával alkotott szöge szinuszával pedig egyenesen arányos.)

4.7. [4] Adva van egy r sugarú körlap (itatós papirosból). Mekkora nyílású körcikket vágjunk ki belőle, hogy a készítendő tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen?



4.4.1. ábra.

4.8. [4] Tapasztalásból tudják a mérnökök, hogy adott hosszúságú gerenda hordképessége egyenesen arányos a szélességével és a vastagságának a négyzetével. Hogyan vágjunk ki egy henger alakú fatörzsből olyan gerendát, melynek hordképessége maximális?

4.9. [4] n galvánelemből állítunk elő telepet, éspedig olyan módon, hogy x elemet párhuzamosan és így $y = \frac{n}{x}$ csoportot sorba kapcsolunk. Hogyan kell az x-et megválasztanunk, hogy az így keletkező telep áramerőssége maximális legyen?

4.10. [4] Egy adott körbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van maximális területe?

4.11. [4] Hogyan kell egy adott gömbbe olyan hengert állítani, amelynek térfogata maximális?

4.12. [4] Egy adott egyenes körkúpba helyezhető körhengerek közül melyiknek van maximális térfogata? (A henger alapja a kúp alapján legyen.)

4.13. [4] Melyik az a négyzetalapú maximális

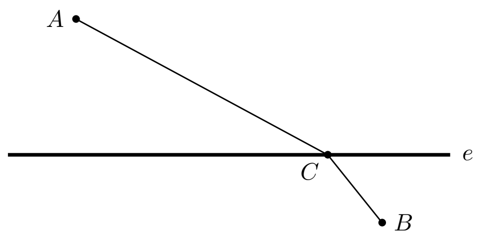
a) térfogatú, **b)** felületű

gúla, melynek mindegyik oldaléle a hosszúságú?

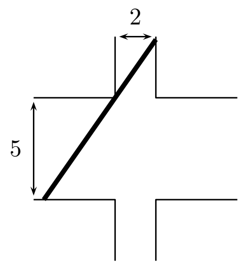
4.14. Határozzuk meg az $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots$ sorozat legnagyobb elemét!

4.15. *Milyen hosszú kamion fordulhat be a kereszteződésben?*

Legfeljebb milyen hosszú lehet az a szakasz, amely áttolható egy 5 egység szélességű sávból egy arra merőleges 2 egység szélességű sávba (lásd az 1. ábrát)?



4.5.1. ábra.



4.15.1. ábra.

5. FEJEZET
Egyenlőtlenségek

5.1. [10] Adjuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásainak számát az a paraméter függvényében!

a) $x^3 - 3x = a$, **b)** $3x^5 - 50x^3 + 135x = a$,

c) $x^2e^x = a$, **d)** $a^x = x$,

5.2. [10] Mely a valós számokhoz található olyan b pozitív paraméterérték, amelyre az $x^2 + a = 2b\ln x$ egyenletnek pontosan egy megoldása van (x-ben)?

5.3. (S) [10] Mutassuk meg, hogy ha az a, b pozitív számok összege 1, akkor bármely x, y számokra teljesül az $x^a y^b \le ax + by$ egyenlőtlenség!

5.4. Mutassuk meg, hogy $0 \le x$ esetén

a) $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Mely x számok esetén konvergens az $l_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ sorozat?

e) Határozzuk meg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ végtelen sor összegét!

f) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $-1 < x < 0$ esetén?

5.5. [13] Igazoljuk, hogy $0 < x_1 < x_2$ esetén

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

5.6. Mutassuk meg, hogy $0 \le x$ esetén

a) $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ és $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$.

b) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ és $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban, b)-ben és c)-ben $x < 0$ esetén?

e) Mutassuk meg, hogy az

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

sorozatok tetszőleges x valós szám esetén konvergensek és határértékük $\sin x$ illetve $\cos x$.

5.7. Igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén

a) $1 + x < e^x$; **b)** $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$!

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $x < 0$ esetén?

5.8. **a)** Igazoljuk, hogy $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\mathrm{tg} x \ge x + \frac{x^3}{3}$.

b) Adjunk meg minél nagyobb olyan a valós számot, amelyre $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\mathrm{tg} x \ge x + \frac{x^3}{3} + ax^5$.

5.9. Igazoljuk, hogy $0 \le x < 1$ esetén $1 + \frac{x}{2} \ge \sqrt{1+x} \ge 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

5.10. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a $(0;\infty)$ jobbról végtelen intervallumon alulról nézve (szigorúan) konvex!

b) Igazoljuk a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.11. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény alulról nézve (szigorúan) konvex $\mathbb{R}$-en!

b) Igazoljuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.12. (M) Melyik háromszögben

a) maximális **b)** minimális

a

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

kifejezés értéke, ahol α, β és γ a háromszög három belső szögét jelöli?

5.13. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek

a) maximális **b)** minimális

a kerülete?

5.14. Adott sugarú körbe írt n-szögek közül melyiknek

a) maximális **b)** minimális

a kerülete?

5.15. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek
a) maximális **b)** minimális
a területe?

5.16. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyikben maximális az oldalak négyzetösszege?

5.17. (M) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség bármely valós a, b, c számokra teljesül!

6. FEJEZET

Alapvető integrálok

6.1. Trigonometriai alapösszefüggések ismétlése

6.1. (M) Fejezzük ki $\cos\alpha$-t
a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ és $\sin\frac{\alpha}{2}$; **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}$;
c) $\sin\frac{\alpha}{2}$; **d)** $tg\frac{\alpha}{2}$
függvényeként!

6.2. (M) Fejezzük ki $ch\alpha$-t
a) $ch\frac{\alpha}{2}$ és $sh\frac{\alpha}{2}$; **b)** $ch\frac{\alpha}{2}$;
c) $sh\frac{\alpha}{2}$; **d)** $th\frac{\alpha}{2}$
függvényeként!

6.3. (M) Fejezzük ki $\sin\alpha$-t
a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ és $\sin\frac{\alpha}{2}$; **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}$;
c) $\sin\frac{\alpha}{2}$; **d)** $tg\frac{\alpha}{2}$
függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.4. (M) Fejezzük ki $sh\alpha$-t
a) $ch\frac{\alpha}{2}$ és $sh\frac{\alpha}{2}$; **b)** $ch\frac{\alpha}{2}$;
c) $sh\frac{\alpha}{2}$; **d)** $th\frac{\alpha}{2}$
függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.5. (M) Fejezzük ki
a) $tg\alpha$-t $tg\frac{\alpha}{2}$;
b) $th\alpha$-t $th\frac{\alpha}{2}$
függvényeként!

6.6. (MS) *arshx logaritmikus alakja*
Fejezzük ki a $arshx$ értékét x-szel a logaritmusfüggvény segítségével!

6.2. Parciális integrálás

6.7. (M)
a) Számítsuk ki az $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ integrált!
b) Mutassuk meg, hogy az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogyó!
c) (*Wallis formula*)
Legyen

$$J_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} = \frac{\pi}{2}$.

6.3. Parciális törtekre bontás

6.8. (M) Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!
a) $\int \frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2}dx$
b) $\int \frac{3x^3-11x^2+10x-1}{(x-2)^2}dx$
c) $\int \frac{x^3-x^2+9x+7}{(x^2+2x+2)(x^2-x+1)}dx$
d) $\int \frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)}dx$

6.4. Helyettesítéses integrálás

6.9. (M) Adjuk meg az $\int\sqrt{1-x^2}dx$ határozatlan integrált!

6.10. (M) Adjuk meg az $\int\sqrt{1+x^2}dx$ határozatlan integrált!

6.11. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{1}{\sin x}dx$ határozatlan integrált!

6.12. (S) Adjuk meg az $\int\frac{1}{shx}dx$ határozatlan integrált!

6.13. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{1}{\sqrt{1+x}+(\sqrt{1+x})^3}dx$ határozatlan integrált!

6.14. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ határozatlan integrált!

6.15. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{1}{1+\sin x}dx$ határozatlan integrált!

6.16. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{1}{(1+e^x)^2}dx$ határozatlan integrált!

6.17. (MS) Adjuk meg az $\int\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$ határozatlan integrált!

6.18. (MS) Adjuk meg az $\int_2^5\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ határozott integrált!

7. FEJEZET
Görbék

7.1. Görbék paraméterezése

7.1. Melyik nevezetes görbe paraméterezését adja meg a $\gamma(t) = (cht; sht)$ képlet?

7.2. (M) *ciklois*
Egy kerék csúszásmentesen gördül az egyenes talajon. Írjuk le a kerék egy pontjának pályáját!
Tegyük fel, hogy a kerék a számegyenes origójából indul, és kezdetben a vizsgált pont épp az origóban van. A t időpillanatban a kerék érintési pontja a számegyenesen legyen épp t-ben. Adjuk meg a mozgó pont koordinátáit t függvényében!

7.3. (M) *Asztrois*
Egy r sugarú kör belsejében csúszásmentesen gördül egy negyedakkora sugarú kör. A kisebb kör egy pontjának pályáját elemezzük. Legyen a nagy kör középpontja a koordinátarendszer origója, és a $t = 0$ időpontban a vizsgált mozgó pont legyen a két kör érintési pontja, a $\gamma(0) = (r; 0)$ pont.
a) Vázoljuk a görbét!
b) Tételezzük fel, hogy t idő alatt a két kör érintési pontja az origó körül t radián szöget fordult el. Írjuk fel a vizsgált pont koordinátáit!
c) Algebrai görbe-e az asztrois? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.4. (M) *Arkhimédeszi spirális*
Egy pont egyenletesen mozog egy egyenesen, amely egyenletesen forog egy pontja körül. Írjuk le a mozgó pont pályáját!
a) Vázoljuk a görbét!
b) Legyen kezdetben a forgó egyenes az x-tengely, rajta a mozgó pont kezdetben az origó, a forgási középpont pedig mindig az origó. Jelölje a az egyenesen való haladási sebesség és az egyenes forgási szögsebességének hányadosát. Paraméterezzük a spirálist az egyenes origó körüli elfordulásának θ szögével!

c) Algebrai görbe-e az Arkhimédeszi spirális? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.5. (M) *Bernoulli-féle Lemniszkáta*
a) Alább négy definíciót olvashatunk. Mutassuk meg, hogy mind a négy ugyanazt a görbét definiálja!

Def. 1. Azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontoktól való távolságának szorzata $\frac{1}{2}$.

Def. 2. Az $ABCD$ rúdszerkezet az AB, BC, CD, DA rudakból és az A, B, C, D pontokban található csuklókból áll. Az AB, CD rudak hossza $\sqrt{2}$ egység, míg a BC, DA rudaké 1 egység. Az A, B pontokat az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontokhoz rögzítjük, míg C és D mozog. Hol helyezkedhet el a CD szakasz felezőpontja amikor a szerkezet átmetszi önmagát?

Def. 3. Invertáljuk az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolát az origó körüli egység sugarú körre!

Def. 4. Állítsunk merőlegest az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola érintőire az origóból. Mi a talppontok mértani helye?

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta egyenlete Descartes koordinátarendszerben:

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2. \tag{1}$$

c) Adjuk meg a P pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy illeszkedik a fenti lemniszkátára és az origótól való távolsága t!

7.6. (M) *Logaritmikus spirál*
A logaritmikus spirál egyenlete polárkoordinátákban: $r = a \cdot e^{b\phi}$, ahol a és b konstansok.

a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges α, β szögek esetén a görbe $\phi \in [0; \alpha]$ íve hasonló a $\phi \in [\beta, \beta + \alpha]$ ívhez!

b) Vázoljuk a spirált!

7.2. Görbék tulajdonságai

7.7. (M) Számítsuk ki az origó középpontú egység sugarú kör $x \in [0; \xi]$ intervallum fölötti ívének hosszát az integrálszámítás segítségével!

7.8. Számítsuk ki a 7.2. feladatban megadott ciklois $t_1 = 2, t_2 = 3$ paraméterértékek közés eső részének területét!

7.9. (M) Számítsuk ki a 7.3. feladatban megadott asztrois
a) teljes ívének hosszát;
b) által határolt tartomány területét!
c) Mutassuk meg, hogy az asztrois érintőjének a koordinátatengelyek közé eső darabja állandó hosszúságú! (A fal mellett lecsúszó pálca asztroist érint.)

7.10. A sík egy pontját megadja az origótól való r távolsága és helyvektorának az x-tengely pozitív félegyenesével bezárt φ (polár)szöge. Azt mondjuk, hogy megadtuk a görbe *poláris egyenletét*, ha meghatároztuk az $r(\varphi)$ függvényt, tehát kifejeztük a sugarat a polárszög függvényében.
a)
Fejezzük ki a $r(\varphi)$ poláris egyenlettel megadott görbe $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ közti ívének hosszát!

7.11. (M) *Arkhimédeszi spirális*
a) Határozzuk meg a 7.4. feladatban megadott Arkhimédeszi spirális első teljes (a $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ értékek közé eső) ívének hosszát!
b) Számítsuk ki a sugár és az érintő szögét, azaz adjuk meg a φ paraméter függvényében a az origót a görbe φ paraméterű P_φ pontjával összekötő egyenes és a spirál P_φ pontjához húzott érintő egyenes szögét!
c) *A kör négyszögesítése*
Adott egy Arkhimédeszi spirál a síkon és egy kör. Szerkesszük a körrel egyenlő területű téglalapot!
d) *Szögharmadolás*
Adott egy Arkhimédeszi spirál a síkon és egy szög. Szerkesszük meg a szög harmadát!

7.12. Forgassuk meg az $y = x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt tartományt az $x = 0$ és $x = 1$ értékek között az x-tengely körül és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát!

7.13. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény x-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástes $1 \le x \le 2$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát!

7.14. *Hengerek áthatása*
Két r sugarú körhenger úgy helyezkedik el, hogy forgástengelyük egy síkban fekszik és merőleges egymásra. Határozzuk meg a két henger közös részének térfogatát!

7.15. *Paraméterezett görbe forgatása*
Adjuk meg a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ paraméterezett görbe $t = \alpha$, $t = \beta$ paraméterértékekhez tartozó pontjai közti ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát (feltételezzük, hogy ott y az x függvénye)!

7.16. (M) *Parabola ívhossza*
Számítsuk ki az $y = x^2$ normálparabola $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.17. (M) *Exponenciális fv. grafikonjának ívhossza*
Számítsuk ki az $y = e^x$ exponenciális függvény $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.18. (M) *Ciklois ívhossza, területe*
Határozzuk meg egy teljes ciklois ív (lásd a 7.2. feladatot)
a) hosszát;
b) alatti terület nagyságát!

7.19. (M) *Logaritmikus spirál*
a) Határozzuk meg, hogy az $r = a \cdot e^{b\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirál (lásd a 7.6. feladatot) mekkora szöget zár be azzal a sugáregyenessel, amit éppen metsz! (Tehát a görbe adott pontbeli érintőjének és a pontot az origóval összekötő egyenesnek a szögét kell meghatározni.)

b) Számítsuk ki a görbe egy teljes ívének, a $\varphi \in [0; 2\pi]$ paramétertartományhoz tartozó ívnek a hosszát!

8. FEJEZET
Furcsa függvények

8.1. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
a) függvény, **b)** folytonos függvény,
amelyre $f(x)$ pontosan akkor racionális, ha $f(x+1)$ irracionális?

8.2. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek lokális szélsőértékhelyei:
a) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 0$ (maximum), $X_2 = 2$ (minimum);
b) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 2$ (minimum);
és más lokális szélsőértékhelye nincs? Van-e a mindenhol deriválható függvények között ilyen?

8.3. (M) Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ szám egy környezetében értelmezett függvény. Tekintsük a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

határértékeket. Szemléltessük jelentésüket! Melyikük létezéséből következtethetünk a másik létezésére? Milyen kapcsolat van a két határérték között, ha mindkettő létezik?

8.4. Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében értelmezett, x_0-ban differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy ha $\{\alpha_n\} \subset U$, $\{\beta_n\} \subset U$ tetszőleges sorozatok, melyekre $\alpha_k \neq \beta_k$ $(k \in \mathbb{N})$ és

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = x_0,$$

akkor

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(\alpha_k) - f(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k} = f'(x_0).$$

8.5. Az alábbi függvények 0-n kívül minden valós számon értelmezettek. Közülük melyiket lehet úgy értelmezni 0-ban, hogy ott
a) folytonos **b)** differenciálható
legyen?

$$f_1(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = x\sin\frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = x^2\sin\frac{1}{x}.$$

8.6. Az 1 ábrán a g függvény grafikonja látható. A grafikon darabjai 3 ill. (-3) meredekségű szakaszok, végpontjaik az x-tengelyen ill. az $y = x$ egyenesen vannak. Legyen $g(0) = 0$.
a) Mutassuk meg, hogy g a $[-4; 4]$ intervallumban folytonos!
b) Mutassuk meg, hogy g a $(-4; 4)$ intervallumban végtelen sok helyen nem differenciálható!
Jelöle $G(x)$ a g függvény grafikonja az x tengely és az $x = -4$ egyenes által határolt rész előjeles területét (az x tengely alatti területrészek negatívan, az a fölöttiek pozitívan számolandók). Tehát pl $G(-4) = G(4) = 0$.
c) Mutassuk meg, hogy G a $(-4; 4)$ intervallum minden pontjában differenciálható!
d) Határozzuk meg $G'(0)$ értékét!
e) Mutassuk meg, hogy G-nek minimuma van 0-ban, de a 0 egyik bal oldali környezetében sem igaz, hogy $G'(x) < 0$!

8.7. [7] Mutassuk meg, hogy a

$$h(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x - x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

függvény
a) a 0-ban differenciálható;
b) $h'(0) > 0$;
c) 0 egyik környezetében sem monoton.

8.8. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek folytonosak illetve differenciálhatóak az

a) $x = 0$, **b)** $x = 1$, **c)** $x = \sqrt{2}$

pontban!
I. $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$
II. $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

III. $f_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

IV. $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^3}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, (p,q) = 1, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

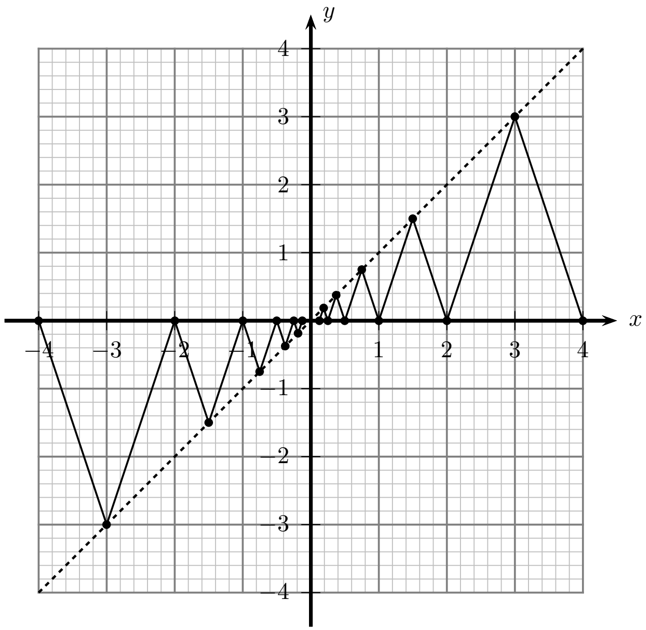
8.9. Van-e olyan függvény, amely az $[0;1]$ intervallumon folytonos, kontinum sok helyen zérus, de nincs olyan nem üres nyílt intervallum, amelyen azonosan 0?

8.10. (M) [5] *Van-der-Waerden függvénye*

A φ_0 függvény grafikonja az 1. ábra felső részén látható, φ_0 periódusa 1, értékkészlete a $[0; \frac{1}{2}]$ intervallum. A grafikon szimmetrikus az $x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ egyenesekre. Legyen $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi_0(2^n x)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. A φ_1, φ_2 függvények grafikonja feketével húzva látható az alábbi ábra középső ill. alsó részén. Legyen továbbá

$$\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x).$$

a) Rajzoljuk meg a Φ_1, Φ_2, Φ_3 függvények grafikonját!



8.6.1. ábra.

b) Mutassuk meg, hogy Φ_k grafikonja egyenes szakaszokból áll és ezek meredeksége olyan egész, amelynek paritása $(k+1)$ paritásával egyezik meg.

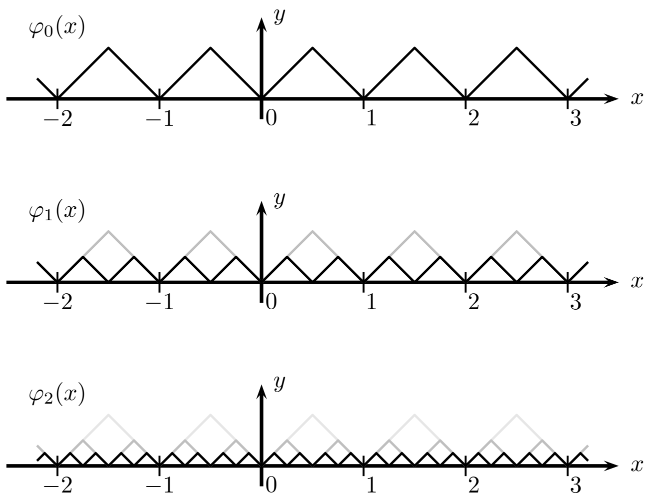
c) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$ határérték minden $x \in \mathbb{R}$-re létezik!

d) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$-ben folytonos!

e) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény semelyik $x \in \mathbb{R}$-ben sem differenciálható!

f) Határozzuk meg $\Phi(x)$ maximumát!

g) Adjuk meg $\Phi(x)$ összes maximumhelyét!



8.10.1. ábra.

9. FEJEZET

Vegyes feladatok

9.1. [9] Az f folytonos és monoton növekedő függvény a $[0;1]$ intervallumban értelmezett, és értékkészlete is ugyanez az intervallum, továbbá $f(0)=0$, $f(1)=1$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény grafikonját le lehet fedni n darab egyenként $\frac{1}{n^2}$ területű téglalappal (a téglalapok oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel)!

9.2. (M) [11] *Stirling formula*

Alább a logaritmus görbe alatti, 1 és n abszcisszák közés eső I_n területének vizsgálatából $n!$ értékére nyerünk aszimptotikus formulát.

Legyen $i \in \mathbb{N}^+$ esetén $A_i(i;0)$, $B_i(i;\ln i)$, valamint jelölje C_i a logaritmus görbe B_{i+1}-beli érintőjének i abszcisszájú pontját és S_i, T_i, t_i rendre az $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ négyszög, a $B_iB_{i+1}C_i$ háromszög (az ábrán a szürke és fekete tartomány együtt) illetve a B_iB_{i+1} húr és a logaritmusgörbe közti tartomány (az 1. ábrán a fekete tartomány) területét.

a) Fejezzük ki n-nel I_n értékét!
b) Fejezzük ki i-vel S_i értékét!
c) Fejezzük ki $n!$ értékét az I_n-re és S_i-re kapott formulákból és a t_i területekkel!
d) Mutassuk meg, hogy a $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ sorozat konvergens!
e) Mutassuk meg, hogy a $\tau'_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ sorozat konvergens!
f) Határozzuk meg a $c_n = \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n$ sorozat határértékét ($c_n = 1 - \tau'_n$)!
g) Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1. \qquad (1)$$

9.3. (M) [6] *Egy fűrészfog*

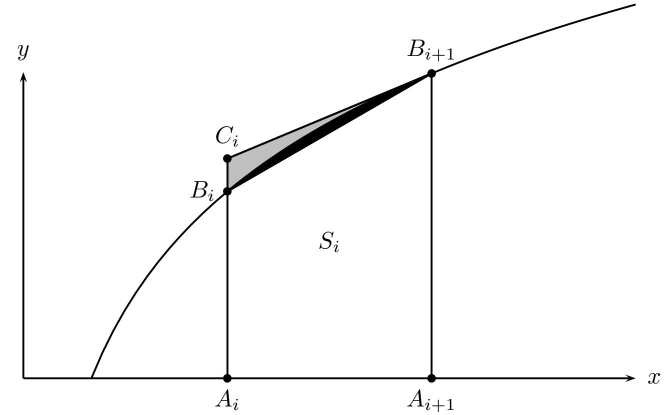
Alább (lásd az 1. ábrát) egy „fűrészfogat” vizsgálunk, amely végtelen sok f„fog”-ból áll. A fogak az x tengely $[0;1]$ intervalluma és az $y=x$ függvény grafikonja között találhatók. A fogak derékszögű háromszögek, melyek két befogója vízszintes illetve függőleges az ábra szerint. A háromszög átfogója az origó felé haladva egyre

meredekebb. A legnagyobb, az $(1;1)$ pontban cégződő fűrészfog bal oldala 2 meredekségű, a következő fog bal oldala már 4 meredekségű, majd 6 meredekségű fog következik, és így tovább.

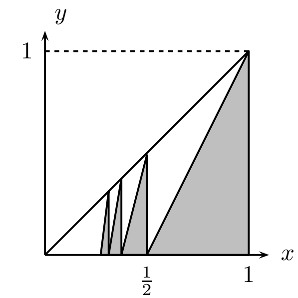
a) Mutassuk meg, hogy a fogazat (a ferde átfogók x tengellyel alkotott metszéspontjai) tartanak az origóhoz ($x=0$-hoz)!

b) Határozzuk meg a háromszögek területének összegét!

9.1. Elliptikus integrálok



9.2.1. ábra.



9.3.1. ábra.

9.4. (M) Ez a feladat az $I_0(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrálról szól, amely az origó középpontú egységkör azon ívének hosszát adja meg,amelynek x tengelyre eső vetülete a $[0;\xi]$ intervallum. A primitívfüggvény felhasználása nélkül számítsuk ki az

a) $x = \sqrt{1-u^2}$,

b) $x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}$ $\quad (0 \le x, \xi \le \frac{1}{\sqrt{2}})$

helyettesítéssel adódó új integrandusokat $(0 \le u, z \le 1)$, és az integrálás határait. Értelmezzük a kapott eredményt!

9.5. (*Fagnano a lemniszkátáról*)

a) Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-féle lemniszkáta (lásd a 7.5. feladatot) origóból induló τ hosszú húrjához tartozó ívének hossza (lásd az 1. ábrát):

$$\int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{1}$$

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú és a

$$CN = \tau' = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}$$

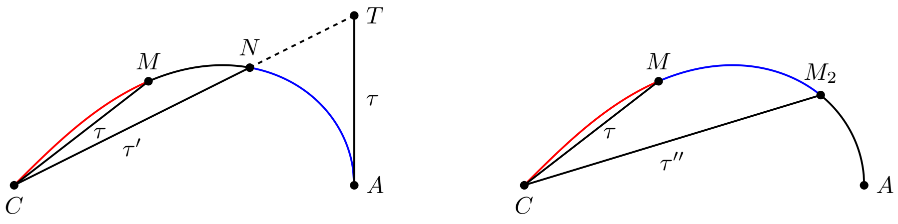
hosszúságú húrhoz tartozó ívek negyedívre egészítik ki egymást, azaz a $\widehat{CM}$ ív az $\widehat{AN}$ ívvel, a $\widehat{CN}$ ív pedig az $\widehat{AM}$ ívvel egyenlő hosszú.

c) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú húrhoz tartozó ív hosszának kétszeresével egyenlő a

$$CM_2 = \tau'' = \frac{2\tau\sqrt{1-\tau^4}}{1+\tau^4}$$

hosszúságú húrhoz tartozó ív hossza.

d) Mutassuk meg, hogy ha a lemniszkáta CA tengelyére merőlegest állítunk az A végpontban és erre felmérjük az $AT = CM$ szakaszt, akkor a CT félegyenes kimetszi a lemniszkátából azt az N pontot, amelyre a $\widehat{CM}$, $\widehat{NA}$ lemniszkátaívek egyenlő hosszúak.



9.5.1. ábra.

9.6. (M) (*Fagnano és az ellipszis*)

a) Tekintsük a C középpontú r sugarú k kör $\widehat{AB}$ negyedkörívét és rajta a tetszőlegesen felvett M pontot (lásd az 1. ábrát). A k kör M-beli érintőjén vegyük fel a H, K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H-tól M felé helyezkedjék el H-tól r távolságra. Messe a K-n át húzott CB-vel párhuzamos egyenes a negyedkörívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy a kör $\widehat{BM}$, $\widehat{NA}$ ívei egyenlők.

b) (*Fagnano pont, mint extrémum*)

Most egy k ellipszist vizsgálunk, melynek középpontja C, fél nagytengelye CA, fél kistengelye CB. Tekintsük az ellipszis $\widehat{AB}$ negyedívén egy tetszőleges M pontot és legyen a C középpont merőleges vetülete az ellipszis M-beli érintőjén T. Határozzuk meg az MT szakasz hosszának maximumát!

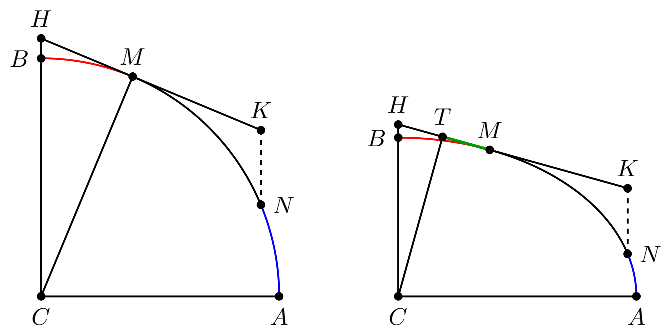
c) Tekintsük még az ellipszis M-beli érintőjén a H, K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H-tól M felé helyezkedjék el H-tól a CA fél nagytengellyel egyenlő távolságra. Messe a K-n át húzott CB-vel párhuzamos egyenes a negyed ellipszisívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy az ellipszis $\widehat{BM}$, $\widehat{NA}$ íveinek különbsége a TM szakasz hosszával egyenlő.

d) (*Fagnano pont, mint kerületfelező*)

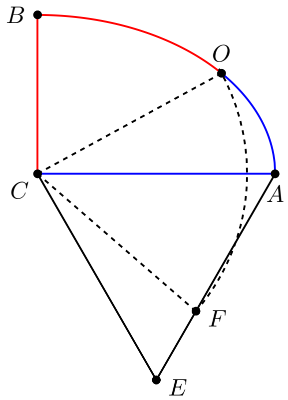
Ha az ACB ellipszisnegyed CA féltengelyére egy CAE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk (lásd a 2. ábrát), és az AE oldalra felmérjük az $AF = CB$ féltengelyt, akkor a C középpontú F-en átmenő kör a $\widehat{BA}$ ellipszisívet egy olyan O pontban metszi, amelyre

$$CA + \widehat{AO} = CB + \widehat{BO},$$

tehát a CA, CB féltengelyek és a BC ív alkotta zárt görbe kerületét felezi a CO egyenes.



9.6.1. ábra.



9.6.2. ábra.

Megoldások

1. Harmadfokú függvények

1.2. Az $y = x^3 + px$ függvény páratlan függvény, tehát van szimmetria középpontja: az origó. Ezt kell q-val "feltolni". Tehát a függvény a $(0|q)$ pontra szimmetrikus.

1.4. Deriválással természetesen könnyen adódik az állítás. De belátható elemien is. Most ez következik.

Nyilván elég az egyik állítást belátni. Pozitív x-ekre az x^3 függvény grafikonja konvex, a lineáris függvény pedig az egész számegyenesen konvex (és konkáv is!). Két konvex függvény összege is konvex.

Az x^3 függvény konvexitása a pozitív félegyenesen "elemien" (deriválás nélkül) a következőképpen látható be. Legyen z_0 rögzített pozitív szám, z pedig fusson a pozitív félegyenesen. A z_0 és a z abszcisszájú pontot összekötő szakasz meredeksége $\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0} = z^2 + zz_0 + z_0^2$. A konvexitás ekvivalens azzal, hogy z növekedésével ez a meredekség növekszik, ami viszont nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi gondolat közvetlenül az $x^3 + px + q$ függvényre is alkalmazható. Ebben az esetben a meredekséghez a konstans p érték adódik hozzá, ami nem változtat a növekedésen.

1.6. Ha volna két valós gyök, akkor a hozzájuk tartozó két gyöktényező szorzatát, akkor egy elsőfokú valós együtthatós polinomot kapunk, amelynek valós a gyöke. Ha tehát volna két valós gyök, akkor három is volna. Ebben az esetben a három gyök összege a volna, a kettős szorzatok összege pedig b. A gyökök négyzetösszege a^2-2b és három valós szám négyzetösszege legalább akkora, mint a kettős szorzataik összege, tehát a^2 nem kisebb $3b$-nél.

Beláttuk, hogy a polinomnak legfeljebb egy valós gyöke van. Azt viszont tudjuk, hogy a valós együtthatós harmadfokú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

1.8. A feladat könnyen megoldható deriválással, de itt most egy elemi utat mutatunk.

Az egyenlőtlenség bal oldala szorzattá alakítható, s ekkor azt kell belátnunk, hogy

$x(1+x)(3-5x) \le \frac{16}{27}$.

A bal oldalon három tényezős szorzat áll, tehát megpróbálkozhatunk a számtani és mértani közép közötti összefüggés alkalmazásával. Ha x pozitív, akkor a bal oldalon vagy minden tényező pozitív (ha $x < \frac{3}{5}$, vagy az utolsó tényező nulla, vagy negatív, ekkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehető tehát, hogy $x < 0{,}6$ és minden tényező pozitív, ez tehát nem akadálya az alkalmazásnak. Nagyobb baj, hogy a három tényező összege nem állandó. Ezen segíthetünk, ha például az utolsó tényezőt a-val, az elsőt $5a-1$-gyel szorozzuk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$(5a-1)x(1+x)(3a-5ax) \le \frac{(1+3a)^3}{27}$,

vagy másképp

$x(1+x)(3-5x) \le \frac{(1+3a)^3}{27a(5a-1}$.

Eddig a-t tetszőleges pozitív számnak választhattuk. A legélesebb becslést nyilván akkor kapjuk, ha egyenlőség is lehet. Ez a számtani és mértani közép között akkor áll fenn, ha a bal oldalon minden tényező egyenlő. Az első két tényező akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{1}{5a-2}$, a második és a harmadik akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{3a-1}{5a+1}$. Olyan a-t kell keresnünk, amelyre ez a két érték egyenlő. Így a

$15a^2 - 16a + 1 = 0$

egyenlethez jutunk, amelynek egyik megoldása $a = 1$. (A másik megoldás az $\frac{1}{15}$, ez negatív x értéket ad, ezért nem jó.) Behelyettesítve éppen a feladat állítását kapjuk.

1.9.

1. megoldás. Az állítás kijön deriválással, a bal oldal minimumát kell megkeresni pozitív x-ekre. Mi most ismét elemi megoldást mutatunk. Sőt, kettőt is. Az első pontosan úgy "működik", mint az 1.10 megoldása.

Az egyenlőtlenség bal oldala $x(2+x)(2-x)$ alakban írható. Ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget akarjuk alkalmazni. Ebben az alakban biztos nem jutunk eredményre, hiszen a három szám tényező összege nem állandó.

Ezen azonban tudunk segíteni, ha az első tényezőt megszorozzuk egy a pozitív számmal, a másodikat pedig egy b pozitív számmal, amelyekre igaz, hogy

$1 + a = b$.

Ha ez teljesül, akkor a három tényező összege állandó, így - legalábbis minden nulla és kettő közötti x-re alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés, és azt kapjuk, hogy

$ax(2+x)(2b-2x) \le 8(1+b)^3$,

vagyis

$x(4-x^2) \le \frac{2+a)^3}{27a(1+a)}$.

Megjegyezzük még, hogy ha $x > 2$, akkor a bal oldal negatív, tehát a fenti egyenlőtlenség akkor is teljesül.

Eddig a-t tetszőlegesen választottuk. De hogyan válasszuk meg a-t, hogy a lehető legjobb felső becslést kapjuk? Ezt akkor kapjuk, ha van olyan pozitív x, amelyre a három tényező, ax, $2+x$ és $2b-2x$ egyenlő, azaz

$ax = 2 + x = 2 + 2a - (1+a)x$.

Az első egyenletből $x = \frac{2}{a-1}$. A másodikból $x = \frac{2a}{2+a}$. Ennek a két értéknek kell egyenlőnek lennie. Ez $a^2 - 2a - 2 = 0$ esetén teljesül. Az egyenlet pozitív megoldása

$a = 1 + \sqrt{3}$.

Ezt behelyettesítve az $x(4-x^2)$-re kapott becslésbe pontosan a feladat állítását kapjuk.

Egyenlőség akkor van, amikor $x = \frac{2}{a-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. megoldás. A nulla és kettő közötti x-ek esetében a "szerepek" ügyesebben is kiosztatók, ha a feladat bal oldalán álló szorzatot

$x\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2}$

alakba írjuk fel. Itt két tényező már eleve egyenlő, és elég az x tényezőt szoroznunk egy a számmal. Ekkor a számtani és mértani közép közötti összefüggés azt adja, hogy

$$ax\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{a^2x^2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} \le \left(\frac{a^2x^2+8-2x^2}{3}\right)^{1},5.$$

Ha itt a-t $\sqrt{2}$-nek választjuk, akkor a jobb oldal állandó, $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, és ha az egyenlőtlenséget elosztjuk $a = \sqrt{2}$-vel éppen a feladat állítását kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $2x^2 = 4 - x^2$, azaz $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

1.11. Az $f(x) = x^3 - px + q$ függvénynek egy tetszőleges x ponthoz tartozó differenciahányados függvénye $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = y^2 + yx + x - p$. A $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon ez mindig negatív, így itt az f függvény szigorúan monotonan csökken. Az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen ez az érték mindig pozitív, így itt az f függvény szigorúan monotonan nő.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Függvényvizsgálat

3.1. $f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$

I. ÉT: $x > 0$. **II.** –

III. $f_1(x) \begin{cases} < 0, & \text{, ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{, ha } x = 1; \\ > 0, & \text{, ha } 1 < x. \end{cases}$

IV. Határértékek:

$\lim_{x\to 0+} f_1(x) = -\infty$, mert $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} x = 0$, de $x > 0$.

$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0$, mert korábban vettük ($\ln x$ lassabban nő, mint x).

V. $f_1'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - (x)'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$;

VI. $f_1'(x) \begin{cases} < 0, & \text{, ha } e < x; \\ = 0, & \text{, ha } x = e; \\ > 0, & \text{, ha } x < e. \end{cases}$

A derivált $e \approx 2{,}71828$-ban előjelet vált (+-ból −), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e \approx 0{,}36788$.

$(0, e)$-ben f_1 szig. mon. nő, (e, ∞)-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty; \frac{1}{e}]$.

VIII. $f_1''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1-\ln x)'x^2 - (x^2)'(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$;

IX. $f_1''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < e^{\frac{3}{2}}; \\ = 0, & \text{ha } x = e^{\frac{3}{2}}; \\ > 0, & \text{ha } e^{\frac{3}{2}} < x. \end{cases}$

$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48169$.

$f_1(x)$ alulról konkáv $(0; e^{\frac{3}{2}})$-ben, míg alulról konvex $(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$-ben.

X. Grafikon: lásd az 1. ábrát!

$f_2(x) = e^{8x - x^2 - 14}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** $f_2(x) = e^{-(x-4)^2+2}$, így a grafikon $x = 4$-re szimmetrikus: $f_2(x_1) = f_2(x_2)$, ha $\frac{x_1+x_2}{2} = 4$.

III. $f_2(x) > 0$, , ha $x \in \mathbb{R}$.

IV. Határértékek:

$\lim_{x\to -\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

V. $f_2'(x) = (8-2x)e^{8x-x^2-14}$;

VI. $f_2'(x) \begin{cases} > 0, & \text{, ha } x > 4; \\ = 0, & \text{, ha } x = 4; \\ < 0, & \text{, ha } 4 < x. \end{cases}$

A derivált $x = 4$-ben előjelet vált (+-ból −), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $e^2 \approx 7{,}3891$. Mindez már a II-ben látott alakból is leolvasható.

$(-\infty, 4)$-ben f_2 szig. mon. nő, $(4, \infty)$-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(0; e^2]$.

VIII. $f_2''(x) = \left((8-2x)e^{8x-x^2-14}\right)' = (8-2x)'e^{8x-x^2-14} + (8-2x)\left(e^{8x-x^2-14}\right)' =$
$= -2\cdot e^{8x-x^2-14} + (8-2x)^2 e^{8x-x^2-14} = \left(4(x-4)^2 - 2\right)e^{8x-x^2-14}$;

$$\textbf{IX.}\ f_2''(x)\begin{cases} >0, & \text{ha } x\in\left(4-\frac{\sqrt2}{2};4+\frac{\sqrt2}{2}\right);\\ =0, & \text{ha } x=4\pm\frac{\sqrt2}{2};\\ >0, & \text{ha } x<4-\frac{\sqrt2}{2}, \text{vagy } 4+\frac{\sqrt2}{2}<x.\end{cases}$$

$4-\frac{\sqrt2}{2}\approx 3{,}2929,\qquad 4+\frac{\sqrt2}{2}\approx 4{,}7071.$

$f_2(x)$ alulról konvex $\left(4-\frac{\sqrt2}{2};4+\frac{\sqrt2}{2}\right)$-ben, míg konkáv $\left(-\infty;4-\frac{\sqrt2}{2}\right)$-ben és konkáv $\left(4+\frac{\sqrt2}{2};\infty\right)$-ben is.

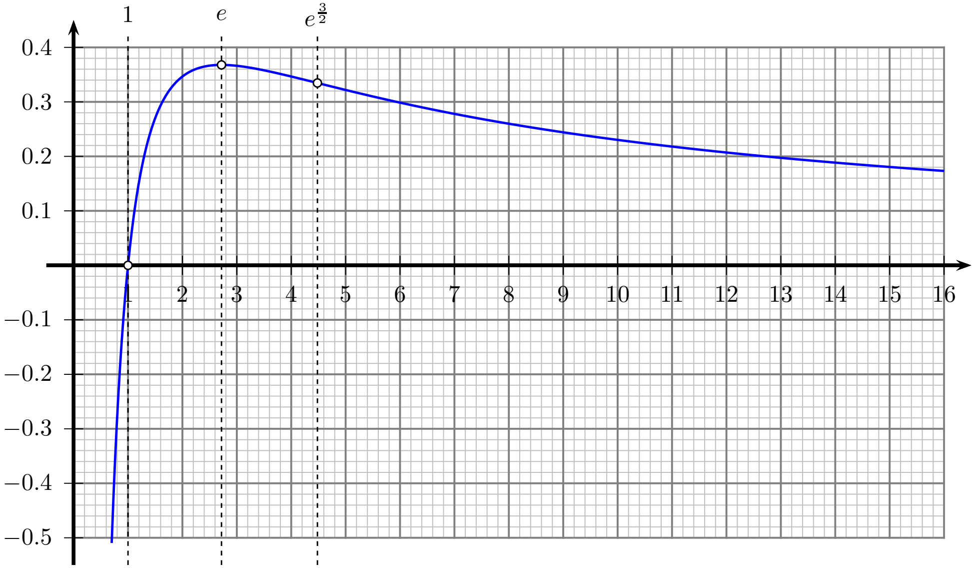
X. Grafikon: lásd a 2. ábrát!

$f_3(x)=xe^{-x}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** –

$$\textbf{III.}\ f_3(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } x<0;\\ =0, & \text{ha } x=0;\\ >0, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$

IV. Határértékek: $\lim_{x\to-\infty} f_3(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to\infty} f_3(x)=0.$



$f_1(x)$	−	0	+	+	+	+	+
$f_1'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f_1''(x)$	−	−	−	−	−	0	+

3.1M.1. ábra.

$$\textbf{V.}\ f_3'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x};\ \textbf{VI.}\ f_3'(x)\begin{matrix} >0, & \text{ha } x<1;\\ =0, & \text{ha } x=1;\\ <0, & \text{ha } 1<x.\end{matrix}$$

A derivált $x=1$-ben előjelet vált ($+$-ból $-$), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e\approx 0{,}36788$.

$(-\infty,1)$-ben f_3 szig. mon. nő, $(1,\infty)$-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty;1/e]$.

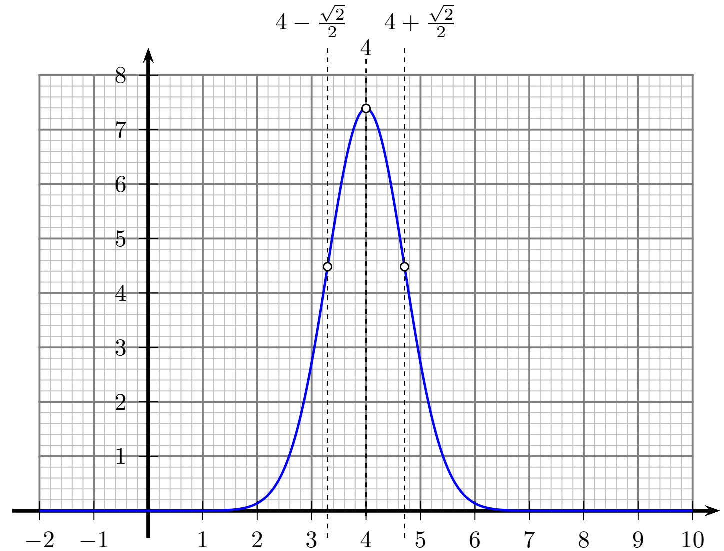
VIII. $f_3''(x)=(x-2)e^{-x}$;

$$\textbf{IX.}\ f_3''(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } x<2;\\ =0, & \text{ha } x=2;\\ >0, & \text{ha } x>2.\end{cases}$$ $f_3(x)$ alulról konvex, ha $x>2$ és alulról konkáv, ha $2<x$.

X. Grafikon: lásd a 3. ábrát!

$f_4(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** páratlan függvény, periódusa 2π. A továbbiakban a $[0;2\pi]$ intervallumban vizsgáljuk.



$f_2(x)$	+	+++++	+
$f_2'(x)$	+	++0−−	−
$f_2''(x)$	−	0+++0	−

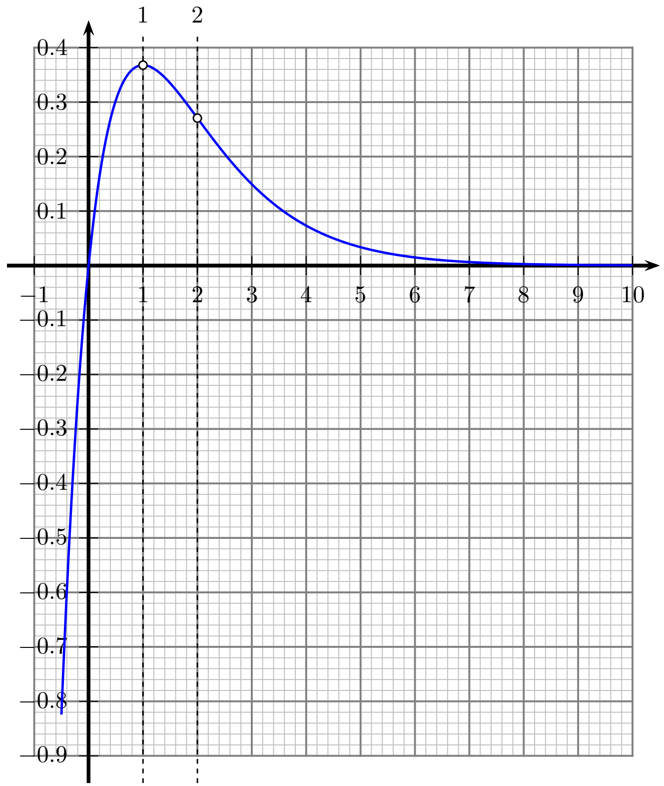
3.1M.2. ábra.

$f_4(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) + \frac{\sin(4\pi-2x)}{2} = -\sin(x) - \frac{\sin 2x}{2} = -f_4(x)$, tehát a grafikon szimmetrikus a $(\pi;0)$ pontra.

III. $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} = \sin x + \sin x\cos x = \sin x(1+\cos x)$

$$\sin x \begin{cases} <0, & \text{ha } \pi<x<2\pi;\\ =0, & \text{ha } x=0 \text{ vagy } \pi;\\ >0, & \text{ha } 0<x<\pi.\end{cases}$$

$$(1+\cos x)\begin{cases} =0, & \text{ha } x=\pi;\\ >0, & \text{egyébként}\ .\end{cases}$$



$f_3(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_3'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f_3''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

3.1M.3. ábra.

$$f_4(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } \pi<x<2\pi;\\ =0, & \text{ha } x=0 \text{ vagy } \pi;\\ >0, & \text{ha } 0<x<\pi.\end{cases}$$

IV. Határértékek: –

V. $f_4'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + 1)$;

VI. $\cos x - \frac{1}{2}\begin{cases} <0, & \text{ha } \frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3};\\ =0, & \text{ha } x=\frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3};\\ >0, & \text{ha } 0<x<\frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}<x<2\pi.\end{cases}$, $(1+\cos x)$ előjele fent olvasható.

$$f_4'(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } \frac{\pi}{3}<x<\pi \text{ vagy } \pi<x<\frac{5\pi}{3};\\ =0, & \text{ha } x=\frac{\pi}{3} \text{ vagy } \pi \text{ vagy } \frac{5\pi}{3};\\ >0, & \text{ha } 0<x<\frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}<x<2\pi.\end{cases}$$

A derivált $x=\frac{\pi}{3}$-ben és $x=\frac{5\pi}{3}$-ben előjelet vált, előbbiben +-ból −-ba, utóbbiban fordítva, így előbbiben maximuma, utóbbiban minimuma van a függvénynek. A globális maximum, értéke $\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}2990$, a minimumé ennek ellentettje.

$(0,\frac{\pi}{3})$-ban f_4 szig. mon. nő, $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$-ben szig. mon. fogy, majd $(\frac{5\pi}{3};\pi)$-ben megint szig mon nő.

VII. ÉK: $[-\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}]$.

VIII. $f_4''(x) = -(1+4\cos x)\sin x$;

IX. $1 + 4\cos x = 0$, ha $x_1 = 1{,}8235$ vagy $x_2 = 4{,}4597$ radiánban.

$f_4''(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } 0<x<x_1 \text{ vagy } \pi<x<x_2;\\ =0, & \text{ha } x=0, x_1, \pi, x_2;\\ >0, & \text{ha } x_1<x<\pi \text{ vagy } x_2<x<2\pi.\end{cases}$ $f_4(x)$ alulról konvex $(x_1;\pi)$-ben és $(x_2;2\pi)$-ben is és alulról konkáv $(0;x_1)$-ben és $(\pi;x_2)$-ben is.

X. Grafikon: lásd a 4. ábrát!

$f_5(x) = \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{10}$

I. ÉT: $\mathbb{R}^+$, de folytonosan kiterjeszthető 0-ra (lásd később). **II.** –

III. $f_5(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } x<10;\\ =0, & \text{ha } x=10;\\ >0, & \text{ha } 10<x.\end{cases}$

IV. Határértékek: $\lim_{x\to 0} f_5(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x\to\infty} f_5(x) = \infty$.

V. $f_5'(x) = x\ln\frac{x}{10} + \frac{x^2}{2}\frac{10}{x}\frac{1}{10} = x\cdot\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{x}{10}\right)$.;

VI. $f_5'(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } 0<x<\frac{10}{\sqrt{e}};\\ =0, & \text{ha } x=\frac{10}{\sqrt{e}};\\ >0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e}}<x.\end{cases}$ $\frac{10}{\sqrt{e}} \approx 6{,}0653$

A derivált $x=\frac{10}{\sqrt{e}}$ előjelet vált, −-ból +-ba, így ott globális minimuma van a függvénynek. A globális minimum értéke $-\frac{25}{e} \approx 9{,}1970$.

$(0,\frac{10}{\sqrt{e}})$-ban f_5 szig. mon. fogy, $(\frac{10}{\sqrt{e}},\infty)$-ben szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[-\frac{25}{e};\infty)$.

VIII. $f_5''(x) = -\frac{3}{2} + \ln\frac{x}{10}$;

IX. $f_5''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e^3}} < x. \end{cases}$ $\qquad \frac{10}{\sqrt{e^3}} \approx 2{,}2313.$

$f_5(x)$ alulról konkáv $(0; \frac{10}{\sqrt{e^3}})$-ben és alulról konvex $(\frac{10}{\sqrt{e^3}}; \infty)$-ben.

X. Grafikon: lásd az 5. ábrát!

$f_6(x) = x\ln^2 x$

I. ÉT: $\mathbb{R}^+$, de folytonosan kiterjeszthető 0-ra. **II.** – **III.** $f_6(x) > 0$ ($f_6(0) = 0$ a folyt. kiterjesztésnél);

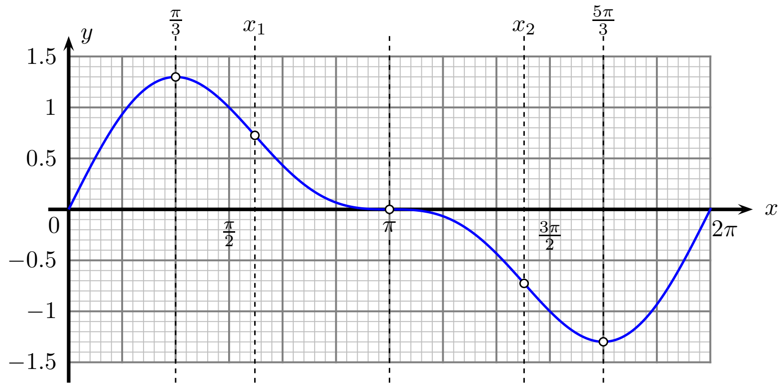
IV. Határértékek: $\lim_{x\to 0} f_6(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x\to\infty} f_6(x) = \infty$.

V. $f_6'(x) = \ln^2 x + x\cdot(2\ln x)\frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x\cdot(2+\ln x)$;

VI. $\ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = 1; \\ > 0, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$ $\qquad 2 + \ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x. \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{e^2} \approx$
≈ 0.1353;

$f_6'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1 < x. \end{cases}$

A derivált $x = \frac{1}{e^2}$-ben és $x = 1$-ben előjelet vált, előbbiben $+$-ból $-$-ba, így



$f_4(x)$	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0
$f_4'(x)$	+	+	0	−	−	−	0	−	−	−	0	+	+
$f_4''(x)$	0	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+	0

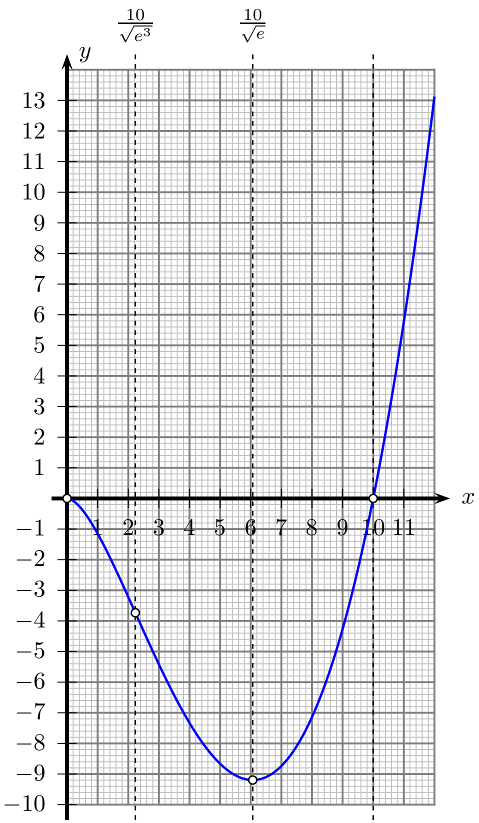
3.1M.4. ábra.

ott lokális maximum van (értéke $\frac{4}{e^2} \approx 0{,}5413$), utóbbiban $-$-ból $+$-ba, így ott lokális minimum van (értéke 0). f_6 előjelét, határértékeit figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy f_6 globális minimuma 0, maximuma nincs.

$(0, \frac{1}{e^2})$-ben f_6 szig. mon. nő, $(\frac{1}{e^2}; 1)$-ben szig. mon. fogy, majd $(1; \infty)$-ben újra szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[0; \infty)$.

VIII. $f_6''(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$;



$f_5(x)$	0	−	−	−	−	−	0	+
$f_5'(x)$	0	−	−	−	0	+	+	+
$f_5''(x)$	$\nexists$	−	0	+	+	+	+	+

3.1M.5. ábra.

IX. $f_6''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{1}{e} < x. \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{e} \approx 0{,}36788.$

$f_6(x)$ alulról konkáv $(0; \frac{1}{e})$-ben és alulról konvex $(\frac{1}{e}; \infty)$-ben.
X. Grafikon: lásd a 6. ábrát!

4. Szélsőérték

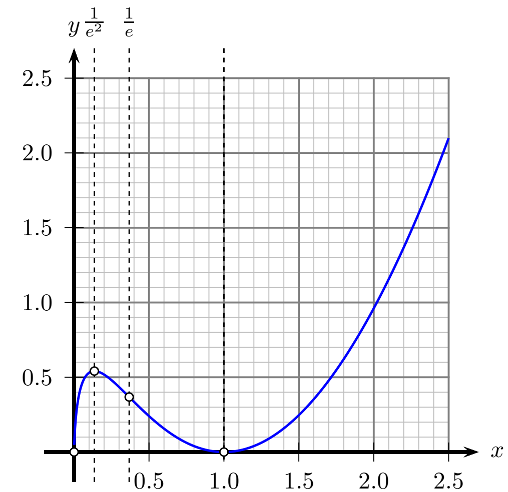
4.1. Legyen a kúp magassága M, alapkörének sugara R. A beírt henger magassága h, alap- és fedőkörének sugara r. A szélsőérték-feladatoknál szokásos módon az elfajuló eseteket is megengedjük. A henger adataira így

$$0 \le h \le M \text{ és } 0 \le r \le R.$$

Tekintsük először a kúp és a henger közös tengelyén átmenő ABC síkmetszetet az 1. ábra szerint.

A henger felszíne

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$



$f_6(x)$	0	+	+	+	+	+	0	+
$f_6'(x)$	$\nexists$	+	0	−	−	−	0	+
$f_6''(x)$	$\nexists$	−	−	−	0	+	+	+

3.1M.6. ábra.

A felszínben szereplő elsőfokú változót, a henger h magasságát kifejezhetjük az r sugár és a kúp adatai segítségével. A síkmetszet jelöléseivel COB és ETB derékszögű háromszögek hasonlók, a befogók aránya

$$\frac{h}{R-r} = \frac{M}{R}.$$

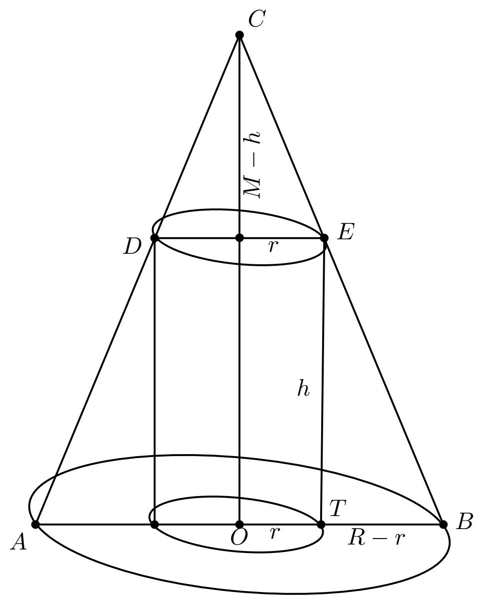
Ezt a kúp alakjára jellemző arányt λ-val jelölve

$$h = \lambda(R-r).$$

Helyettesítsük ezt a h-ra kapott kifejezést a felszín képletébe és a továbbiakban az egyszerűség kedvéért keressük az $f(r) = \frac{A}{2\pi}$ függvény szélsőértékét.

$$f(r) = \frac{A}{2\pi} = r^2 + r\lambda(R-r) = (1-\lambda)r^2 + \lambda R r$$

az r-nek legfeljebb másodfokú függvénye. A függvény értelmezési tartománya a $[0; R]$ intervallum, az elfajuló esetekben pedig $f(0) = 0$ és $f(R) = R^2$. A megoldás több esetre bomlik a főegyüttható, $(1-\lambda)$ előjele szerint.



4.1M.1. ábra.

Ha $\lambda = 1$, azaz a kúp nyílásszöge derékszög, akkor az $f(r)$ függvény lineáris és növekedő; maximumát az értelmezési tartomány legnagyobb elemére veszi fel: $r = R$, $h = 0$. Ekkor a henger elfajuló, $A_{max} = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének kétszeres területe.

A továbbiakban a $\lambda \neq 1$ feltevés mellett másodfokú, a szokásos módon a valós számok halmazára kiterjesztett $f(r)$ függvényt vizsgáljuk. A függvénynek két zérushelye van, $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{\lambda R}{\lambda - 1}$.

Legyen először $0 < \lambda < 1$. Ekkor $f(r)$ főegyütthatója pozitív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek minimuma van. A fügvény 0-tól különböző zérushelye negatív, így f pozitív r-ekre szigorúan monoton nő. A maximumot tehát most is az értelmezési tartomány jobb oldali végpontjában kapjuk, a henger felszíne ilyenkor is az elfajuló esetben maximális.

Legyen most $\lambda > 1$. Ekkor főegyüttható negatív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek maximuma van. Az egyik zérushelye $r = 0$, a másik most pozitív. A válasz most már azon múlik, hogy a kiterjesztett függvény maximumahelye hol van az értelmezési tartományhoz képest. Ez az érték a két zérushely számtani közepe:

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)}.$$

Amennyiben $R \leq r_{max}$, akkor f továbbra is szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon, tehát még ilyenkor is az elfajuló esetben kapjuk a legnagyobb felszínt. Nyomban adódik, hogy az $1 < \lambda$ feltevés mellett ez pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \leq$ ≤ 2.

Végül a $2 < \lambda$ esetben a maximumhely tényleg az értelmezési tartomány belső pontja:

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} < R.$$

Összefoglalva: (lásd a 2. ábrát és a hozzá tartozó interaktív weboldalt!)

Amennyiben a kúp magasságának és sugarának hányadosa $\lambda \leq 2$, akkor a maximális felszínű beírt henger elfajuló és felszíne $A = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének a kétszeres területe. Ha $\lambda > 2$, akkor a maximális felszínű henger sugara

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} = \frac{\frac{M}{R} R}{2(\frac{M}{R} - 1)} = \frac{MR}{2(M - R)}.$$

Végül írjuk fel a maximális felszínű beírt henger felszínét a $2 < \lambda$ esetben.

$$f(r_{max}) = (1 - \lambda)\frac{\lambda^2 R^2}{4(\lambda - 1)^2} + \frac{\lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 R^2}{\lambda - 1}.$$

Így, felhasználva, hogy $M = \lambda R$, a maximális hengerfelszín:

$$A_{max} = 2\pi f(r_{max}) = \frac{\pi \lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{4(\lambda - 1)} \cdot 2\pi RM = \mu \cdot 2\pi RM.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor $0.25 < \mu < 0.5$, a második tényező, $2\pi RM$ pedig a kúp köré írt henger palástjának a felszíne.

Megjegyzés Láttuk, hogy ha $\lambda \leq 2$, akkor az elfajuló esetben kapjuk a maximumot, amelynek értéke az alaplap kétszeres területe, $2T = 2\pi R^2$. Ha a $2 < \lambda$ esetben is R segítségével fejezzük ki a maximális felszínt, akkor

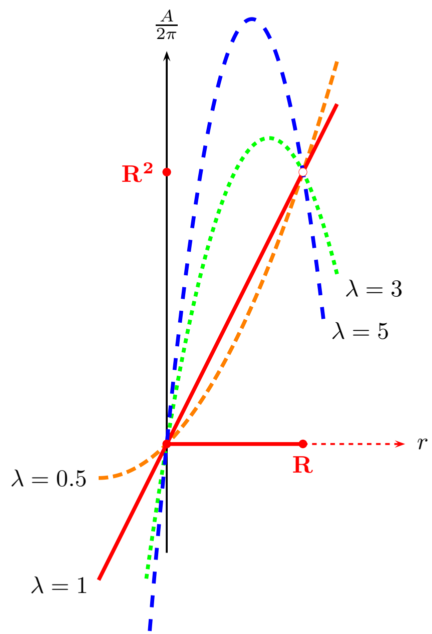
$$A_{max} = \frac{\lambda^2}{4(\lambda - 1)} 2\pi R^2 = \lambda\mu 2T.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy $1 < \lambda\mu$, a maximális hengerfelszín tehát ilyenkor nagyobb mint a kúp alaplapjának kétszeres területe.

5. Egyenlőtlenségek

5.10. a) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, ha $x > 0$.

$$f(r) = (1 - \lambda) r^2 + \lambda R r$$



4.1M.2. ábra.

b) Az alulról nézve konvex függvény húrja a függvénygrafikon fölött helyezkedik el. Ha egy sokszög csúcsai a konvex függvény grafikonján helyezkednek el, akkor a sokszög csúcsaiból álló pontrendszer tömegközéppontja (a sokszög matematikai értelmű súlypontja) a sokszög belsejében, így a függvény grafikonja fölött helyezkednek el (Jensen egyenlőtlenség). Esetünkben, ha a pontok

$$(x_1; \frac{1}{x_1}), \qquad (x_2; \frac{1}{x_2}), \qquad \ldots \qquad (x_n; \frac{1}{x_n}),$$

akkor a súlypont

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \right)$$

, ami tehát a görbe $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ abszcisszához tartozó pontja felett van:

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Ez az összefüggés a harmonikus és számtani közép közti egyenlőtlenség. Az egyenlőség a szigorű konvexitás miatt csak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ esetén teljesül.

5.11. a) $f''(x) = 2 > 0$.
b) Lásd az 5.10 feladatot!

5.12. a) Vegyük észre, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény a $[0; \pi]$ intervallumban alulról konkáv, így a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \le \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) A vizsgált kifejezés értéke bármely valóságos háromszögben pozitív, de ha pl α tart $180°$-hoz, akkor a vizsgált kifejezés 0-hoz tart. Minimum tehát nincs, a legnagyobb alsó korlát a 0.

5.13. Ha a háromszög szögei α, β és γ, oldalai a, b és c, míg köréírt körének sugara R, akkor a Nagy szinusz tétel szerint

$$a = 2R\sin\alpha, \qquad b = 2R\sin\beta, \qquad c = 2R\sin\gamma.$$

Innen alkalmazhatjuk az 5.12 feladat eredményét, a legnagyobb kerületet a szabályos háromszög esetén kapjuk, míg a kerület tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet.

5.15. a) Ha a háromszög szögei α, β és γ, a körülírt kör sugara R, akkor a háromszög területe $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Keressük a

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

szorzat maximumát, ha $0 < \alpha; \beta; \gamma < \pi$ és $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Tekintsük az $f(x) = \ln\sin x$ függvényt! Ez a függvény a $(0; \pi)$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$. A Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\ln\sin\alpha + \ln\sin\beta + \ln\sin\gamma}{3} \le \ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \ln\sin\frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ esetén van. Szorozzunk át és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\ln(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \le \ln\sin^3\frac{\pi}{3}$$

Mivel az ln függvény szigorúan monoton, így e fenti egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \sin^3\frac{\pi}{3}$$

egyenlőtlenséggel. Tehát a szabályos háromszög adja a maximumot.

b) A terület tetszőlegesen kicsiny pozitív szám lehet, ha a háromszög egy szakaszhoz közelít.

5.16. Az 5.15. feladat megoldásának mintájára (a Nagy szinusz tétel alapján) a

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \tag{1}$$

kifejezés maximumát keressük a $(0; \pi)$ intervallumon az $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ feltétel mellett. Tekintsük az $f(x) = \sin^2 x$ függvényt! Ez a függvény a $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x) = 2\cos(2x) < 0$, ha $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Így $\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{3\pi}{4}$ esetén alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{3} \le \sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin^2\frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ esetén van. Ebből kapjuk a

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$$

relációt.

Állítjuk, hogy ha a három szög között van olyan, amelyik nem esik a $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumba, akkor az 1. kifejezés értéke $\frac{9}{4}$-nél kisebb.

Az $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumba nem tartozó szögek szinusza legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ha két ilyen szög is van, akkor az 1. kifejezés értéke legfeljebb $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 < \frac{9}{4}$. Ha csak egy ilyen szög van, legyen α, akkor a másik kettőre alkalmazhatjuk a Jensen egyenlőtlenséget:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma \le 2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Itt $\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$, így az 1. kifejezést felülről becsüli az

$$g(\alpha) = \sin^2\alpha + 2\sin^2\frac{\pi-\alpha}{2} = \sin^2\alpha + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

függvény, amelyet most a $(0; \frac{\pi}{4})$ és a $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$ intervallumon vizsgálunk.

$$g'(\alpha) = 2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha - \frac{1}{2}) > 0, \qquad \text{ha} \qquad \alpha \in (0; \frac{\pi}{4}),$$

illetve $g'(\alpha) < 0$, ha $\alpha \in (\frac{3\pi}{4}; \pi)$. Ezért g monoton nő $(0; \frac{\pi}{4})$-n illetve monoton fogy $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$-n, így g-t a vizsgált intervallumon felülbecsli a $\frac{\pi}{4}$-hez ill. $\frac{3\pi}{4}$-hez tartozó értéke. Az ide tartozó kifejezést azonban a konvex esetnél már vizsgáltuk, láttuk, hogy $\frac{9}{4}$ nagyobb nála.

Az adott sugarú körbe írtháromszögek közül a szabályos háromszögben legnagyobb az oldalak négyzetösszege.

5.17. Feltehetjük, hogy $a, b, c > 0$ és az egyenlőtlenség így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

A

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2, \qquad \left(\frac{c}{b}\right)^2, \qquad \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

törtek pozitívak, szorzatuk 1, így a konvexitás felé terelés miatt érdemes bevezetni az x, y, z változókat a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = e^x, \qquad \left(\frac{c}{b}\right)^2 = e^y, \qquad \left(\frac{a}{c}\right)^2 = e^z$$

relációknak megfelelően. Bizonyítanunk kell, hogy ha $x + y + z = 0$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^z}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

függvényt!

$$f''(x) = \frac{e^x\cdot(e^x-2)}{4\cdot(1+e^x)^{\frac{5}{2}}},$$

így f a $(-\infty; \ln 2]$ intervallumon alulról konkáv, a Jensen egyenlőtlenség alapján teljesül az egyenlőtlenség.

Ha csak az egyik változó – mondjuk x – értéke nagyobb $\ln 2$-nél, akkor a másik kettőre alkalmazható a Jensen egyenlőtlenség, így

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^z}} \le \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{y+z}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}.$$

Vizsgáljuk a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}$$

függvényt! Némi számolás után kapjuk, hogy

$$g'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \left(1 + \frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

így g-nek $x = 0$-ban maximuma van (csak $e^{\frac{x}{2}} - 1$ előjelére kell figyelni), ami igazolja az egyenlőtlenséget.

Most már csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor az x, y, z változók közül kettőnek is legalább $\ln 2$ az értéke. A szimmetria itt feltehetjük, hogy $x \ge y \ge \ln 2 \ge$ $\ge z$. Az $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha$, $\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \beta$, $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \gamma$ jelöléssel tehát $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha \ge \beta \ge 2 \ge \gamma$ és igazolnunk kell, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Itt $\beta \ge 2$, $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta} \ge \frac{1}{\alpha^2}$ így a bal oldalon található kifejezés felülbecsülhető a

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

függvénnyel, amit az $\alpha \ge 2$ halmazon vizsgálunk. $\alpha = 2$-ben $g(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{3}{\sqrt{2}}$ és állítjuk, hogy a függvény a vizsgált halmazon monoton fogy. A derivált negatív, hiszen

$$g'(\alpha) = (1+x)^{-\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\right]$$

az $\alpha = 2$-ben negatív és a $h(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ monoton fogy, amiről deriválással már könnyű meggyőződni.

A levezetésből az is látható, hogy csakis $a = b = c$ esetén áll fenn egyenlőség.

6. Alapvető integrálok

6.1.

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Az utolsó kifejezés $\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ esetén értelmes.

6.2.

$$ch\alpha = ch^2\frac{\alpha}{2} + sh^2\frac{\alpha}{2} = 2ch^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 + 2sh^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+th^2\frac{\alpha}{2}}{1-th^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6.3.

$$\sin\alpha = \begin{array}{l} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 0+4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi+4k\pi \\ -2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 2\pi+4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi+4k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } -\pi+4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi+4k\pi \\ -2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 2\pi+4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi+4k\pi \end{cases} \\ \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ ha } \alpha \neq \pi + k\pi \end{array} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

6.4.

$$sh\alpha = \begin{array}{l} 2sh\frac{\alpha}{2}ch\frac{\alpha}{2} \\ 2sh\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+sh^2\frac{\alpha}{2}} \\ \begin{cases} 2ch\frac{\alpha}{2}\sqrt{ch^2\frac{\alpha}{2}-1} & \text{, ha } 0 \leq \alpha \\ -2ch\frac{\alpha}{2}\sqrt{ch^2\frac{\alpha}{2}-1} & \text{, ha } \alpha \leq 0 \end{cases} \\ \frac{2th\frac{\alpha}{2}}{1-th^2\frac{\alpha}{2}} \end{array}$$

6.5.

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad th\alpha = \frac{2th\frac{\alpha}{2}}{1+th^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6.6. Eredmény: $arshx = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$. Ha ugyanis $t = arshx$, akkor

$$sht = x \Rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = x \pm \sqrt{x^2+1},$$

és $0 < e^x$, így itt csak a pozitív előjel jön számításba.

6.7. a)

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Az $n \geq 2$ esetben parciális integrálással próbálkozunk, az $u' = \sin x$, $v = \sin^{n-1} x$, $u = -\cos x$, $v' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$ szereposztásban:

$$\begin{aligned} I_n = & \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ = & (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned} \tag{2}$$

A módszer közvetlenül nem vezetett eredményre, de (2)-ből rendezéssel rekurziót állíthatunk fel a sorozatra:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{3}$$

Tehát

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad I_4 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}, \qquad I_6 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}, \qquad \ldots$$

$$I_1 = 1, \qquad I_3 = \frac{2}{3}, \qquad I_5 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \qquad I_7 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}, \qquad \ldots$$

azaz

$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \tag{4}$$

b) Mivel a $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumban a sin függvény pozitív, de mindenütt legfeljebb 1, így itt

$$\sin^{n+1} x = \sin^n x \cdot \sin x \geq \sin^n x, \tag{5}$$

hiszen egy nemnegatív számott 1-nél kisebb számmal szorozva az értékét nem növeljük. Ebből következően az integrálokra teljesül a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \tag{6}$$

egyenlőtlenség, azaz az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogy.

c) Fejtsük ki az $I_{2n-1} \leq I_{2n} \leq I_{2n+1}$ relációt!

$$\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \geq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2} \geq \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}, \tag{7}$$

amiből

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)\cdot(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{2n}{2n-1} \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n-1)(2n+1)}, \tag{8}$$

tehát
$$J_{n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\geq\frac{\pi}{2}\geq J_n. \tag{9}$$

A $\{J_n\}$ sorozatról könnyen látható, hogy monoton nő, (9) jobb oldala szerint korlátos, így konvergens és határértéke legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, de (9) bal oldala szerint ez a határérték nem lehet kisebb $\frac{\pi}{2}$-nél, tehát egyenlő vele.

6.8. a) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}. \tag{1}$$

Hozzunk a jobb oldalon közös nevezőre!

$$\frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2}=\frac{a(x+2)(x^2+2x+2)+b(x^2+2x+2)+(cx+d)(x+2)^2}{(x^2+2x+2)(x+2)^2}. \tag{2}$$

Olyan a, b, c, d számokat keresünk, amelyekre a jobb és a bal oldal azonosan egyenlő, azaz

$$x^3+x^2-4x-6=a(x+2)(x^2+2x+2)+b(x^2+2x+2)+(cx+d)(x+2)^2. \tag{3}$$

Bontsuk fel a zárójeleket a jobb oldalon és rendezzük x polinomjává!

$$x^3+x^2-4x-6=(a+c)x^3+(4a+b+4c+d)x^2+(6a+2b+4c+4d)x+(4a+2b+4d). \tag{4}$$

A két polinom akkor azonos, ha együtthatóként azonosak:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & & +c & & = & 1 \\ 4a & +b & +4c & +d & = & 1 \\ 6a & +2b & +4c & +4d & = & -4 \\ 4a & +2b & & +4d & = & -6 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Az ismeretleneket a Gauss-féle kiküszöbölős eljárással fejezzük ki:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & +2b & -2c & +4d & = & -10 \\ & +2b & -4c & +4d & = & -10 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & & -2c & +2d & = & -4 \\ & & -4c & +2d & = & -4 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & & -2c & +2d & = & -4 \\ & & & -2d & = & 4 \end{array}\right\},$$

azaz $d=-2$, $c=0$, $b=-1$, $a=1$. Tehát a kérdezett határozatlan integrál:

$$\int\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{x^2+2x+2}dx=\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-2arctg(x+1)+c,$$

hiszen $\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}$.

Megjegyzés

Az (3) egyenletbe $x=-2$-t helyettesítve számos tag kiesik és kapjuk, hogy $(-2)^3+(-2)^2-4(-2)-6=b((-2)^2+2(-2)+2)$, amiből $b=-1$ gyorsabban adódik.

b) $(x-2)^2=x^2-4x+4$ és $3x^3-11x^2+10x-1=(3x+1)(x^2-4x+4)+2x-5$, így
$$\frac{3x^3-11x^2+10x-1}{(x-2)^2}=3x+1+\frac{2x-5}{(x-2)^2}.$$

Az utóbbi törtet parciális törtekre bontjuk, azaz
$$\frac{2x-5}{(x-2)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}$$
alakra hozzuk. A jobb oldalt közös nevezőre hozva
$$\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{ax-2a+b}{(x-2)^2},$$
azaz $a=2$ és $2a-b=5$-ból $b=-1$, tehát a kérdezett integrál
$$\int 3x+1+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}dx=\frac{3}{2}x^2+x+2\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+c.$$

c) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre
$$\frac{x^3-x^2+9x+7}{(x^2+2x+2)(x^2-x+1)}=\frac{ax+b}{x^2+2x+2}+\frac{cx+d}{x^2-x+1},$$
azaz
$$x^3-x^2+9x+7=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+2x+2).$$

A két oldalon az azonos kitevőjű tagok együtthatóját egyenlővé tesszük:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ -a & +b & +2c & +d & = & -1 \\ a & -b & +2c & +2d & = & 9 \\ & b & & +2d & = & 7 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & +3c & +d & = & 0 \\ & -b & +c & +2d & = & 8 \\ & b & & +2d & = & 7 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & b & +3c & +d & = & 0 \\ & & +4c & +3d & = & 8 \\ & & -3c & +d & = & 7 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{cccccc} a & & +c & & = & 1 \\ & b & +3c & +d & = & 0 \\ & & +4c & +3d & = & 8 \\ & & & +3{,}25d & = & 13 \end{array}\right\},$$

azaz $d=4$, $c=-1$, $b=-1$ és $a=2$. A törtek számlálójából leválasztjuk a nevező deriváltjának konstansszorosát:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{3}{x^2+2x+2},\qquad \frac{-x+4}{x^2-x+1}=\frac{-x+0{,}5}{x^2-x+1}+\frac{3{,}5}{x^2-x+1}.$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$x^2-x+1=(x-0{,}5)^2+0{,}75=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1\right),$$

azaz

$$\frac{3{,}5}{x^2-x+1}=\frac{14}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1},$$

így az integrál:

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{3}{x^2+2x+2}+\frac{-x+0{,}5}{x^2-x+1}+\frac{3{,}5}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\ln(x^2+2x+2)-3arctg(x^2+2x+2)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{7\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+c.$$

d) Vegyük észre, hogy $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, tehát olyan a, b, c, d számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{cx+d}{x^2-2x+5},$$

tehát az

$$-x^3+7x^2-12x+18=a(x+2)(x^2-2x+5)+b(x-1)(x^2-2x+5)+(cx+d)(x-1)(x+2) \tag{6}$$

összefüggést kell azonossággá tennünk.

Az x-ben azonos kitevőjű tagokat egyenlővé téve négyváltozós lin. egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$. Megjegyezzük, hogy a (6) összefüggésbe $x=-2$-t, illetve $x=1$-et helyettesítve gyorsan megkaphatjuk b illetve a értékét.

Vegyük még észre, hogy

$$\frac{1}{x^2-2x+5}=\frac{1}{(x-1)^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2+1}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2+1},$$

így

$$\int\frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)}dx=\ln|x-1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}arctg(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+c.$$

6.9.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{arcsinx}{2}+c.$

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v=uv-\int uv'$ képletét az $u'=1$, $v==\sqrt{1-x^2}$, $u=x$, $v'=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ szereposztásban!

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int 1\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Mivel $x^2=(x^2-1)+1$, így

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+c_1$$

azaz

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}{2}+c_2=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}+\frac{arshx}{2}+c_2.$$

2. megoldás. *Helyettesítéses integrálás*

Az $\sqrt{1-x^2}$ kifejezés $x\in(-1;1)$ esetén értelmezett. Alkalmazhatjuk az $x=\sin t$ helyettesítést, ha $t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, akkor minden x értéket pontosan egyszer kapunk meg.

Mivel $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ és $t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ esetén $0<\cos t$, így $\sqrt{1-x^2}=\cos t$. A $\frac{dx}{dt}=\cos t$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos t\cos t dt=\int\cos^2 t dt.$$

Mivel $\cos 2t=2\cos^2 t-1$, így $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$, azaz

$$\int\cos^2 t dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $\sin 2t==2\sin t\cos t$ és $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{arcsinx}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+c.$$

6.10.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c$.

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v = uv - \int uv'$ képletét az $u' = 1$, $v = \sqrt{1+x^2}$, $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ szereposztásban!

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int 1\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Mivel $x^2 = (x^2+1) - 1$, így

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \sqrt{1+x^2}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + c_1$$

azaz

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx - c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}{2} + c_2 = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{arshx}{2} + c_2.$$

Ha még felhasználjuk a 6.6. feladat eredményét is, akkor kapjuk a megoldás elején található formulát.

2. megoldás. *Helyettesítéses integrálás*

Alkalmazzuk az $x = sht$ helyettesítést! Mivel $1 + sh^2 = ch^2t$ és $0 < cht$, így $\sqrt{1+x^2} = cht$. A $\frac{dx}{dt} = cht$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int chtchtdt = \int ch^2tdt.$$

Mivel $ch2t = 2ch^2t - 1$, így $ch^2t = \frac{1+ch2t}{2}$, azaz

$$\int ch^2tdt = \int \frac{1+ch2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{sh2t}{4} + c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $sh2t = 2shtcht$ és $cht = \sqrt{1+sh^2t}$ valamint alkalmazzuk a 6.6. feladat formuláját:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + c.$$

6.11. A $tg\frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ és $x = 2arctgt$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$. Az integrál:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + c = \ln\left(tg\frac{x}{2}\right) + c.$$

6.12. $\int \frac{1}{shx}dx = \ln\left(th\frac{x}{2}\right) + c$.

6.13. Ha $t = \sqrt{x+1}$, akkor $x = t^2 - 1$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$, tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+2})^3}dx = \int \frac{2t}{t+t^3}dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x+1}.$$

6.14.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x},$$

és itt a második tag f'/f alakú, azaz

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = e^x - \ln|1+e^x| + C.$$

2. megoldás. Az $e^x = t$ helyettesítés esetén $x = \ln t$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t}{1+t}dt = \int 1 - \frac{1}{1+t}dt = t - \ln|t+1| + C = e^x + \ln|1+e^x| + C.$$

6.15.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

így

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}dx = -tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C_1.$$

2. megoldás. Az $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítés esetén $x = 2arctgt$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, másrészt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, így

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}dt =$$
$$= \frac{-2}{1+t} + C_2 = \frac{-2}{1+tg\frac{x}{2}} + C_2.$$

6.16. Ha $t = 1+e^x$, akkor $x = \ln(t-1)$ és $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}$ és így

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2(t-1)} = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}dt =$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t} + C = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$$

6.17. Ha $t = tg\frac{x}{2}$, akkor $x = 2arctgt$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, így

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}dx = \int \frac{1+t^2}{4t-(1-t^2)+5(1+t^2)}\frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{1}{3t^2+2t+2}dt =$$
$$= \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}dt = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

6.18. Ha $t = \sqrt{x-1}$, akkor $x = t^2+1$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ és így

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t}2tdt = 2\int_1^2 t^2+1 = 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^2 = \frac{20}{3}.$$

7. Görbék

7.2. Jelölje O az origót, T_t az r sugarú mozgó kör és az egyenes érintési pontját ($OT_t = t$), O_t a mozgó kör középpontját, P_t a mozgó körön a vizsgált pont aktuális helyzetét (lásd az 1. ábrát). A kör az egyenesen csúszás nélkül gördül, azaz az érintkező felületek, az OT_t szakasz és az T_tP_t körív egyenlőek. Ezért $P_tO_tT_t\angle = t/r$. Ha S_t a P_t pont vetülete a T_tO_t egyenesen, akkor $O_tS_t = r\cos\frac{t}{r}$, $P_tS_t = r\sin\frac{t}{r}$, azaz P_t koordinátái:

$$x(t) = t - r\sin\frac{t}{r}, \qquad y(t) = r - r\cos\frac{t}{r}. \tag{1}$$

7.3.

1. megoldás. a) Lásd az 1. ábrát!

b) Jelölje a mozgó kör és a fix kör érintési pontját T_φ, a mozgó kör középpontját O_φ, a fix körét O, a két kör érintési pontját a kezdőpillanatban P_0, a vizsgált pontot P_φ, ahol $\varphi = P_0OT_\varphi$. A fix kör P_0T_φ íve és a mozgó kör $T_\varphi P_\varphi$ íve egyenlő nagyságú (csúszásmentes gördülés esetén a két alakzat azonos hosszúságú íve érintkeznek egymással). A sugarakat és a szögek irányítását is figyelembe véve kapjuk, hogy $T_\varphi O_\varphi P_\varphi\angle = -4\varphi$, tehát az $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$ vektor és $\overrightarrow{OP_0}$ szöge 3φ. Mivel $\overrightarrow{OP_\varphi} = \overrightarrow{OO_\varphi} + \overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$, és $\overrightarrow{OO_\varphi}(3r\cos\varphi, 3r\sin\varphi)$, $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}(r\cos(-3\varphi), r\sin(-3\varphi))$, így

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 3r\cos\varphi + r\cos(-3\varphi) = 3r\cos\varphi + r\cos(3\varphi) = R\cos^3\varphi;\\ y(\varphi) &= 3r\sin\varphi + r\sin(-3\varphi) = 3r\sin\varphi - r\sin(3\varphi) = R\sin^3\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

c)

A (1) paraméteres alak szerint $P(x;y)$ pontosan akkor van rajta az asztroison, ha

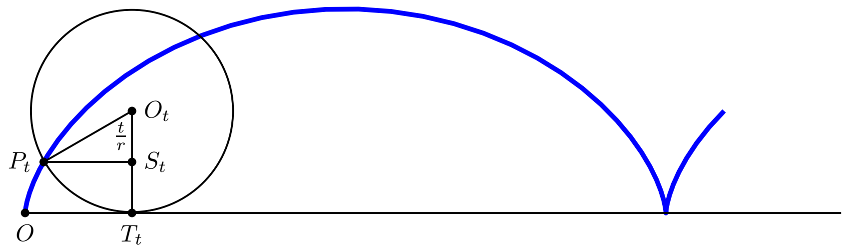
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{2}$$

Ez az összefüggés pontosan akkor áll fenn valós $(x;y)$ számpárokra, ha a köbe teljesül:

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 1. \tag{3}$$

ha felhasználjuk a (2) összefüggés, akkor kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{4}$$



7.2M.1. ábra.

amit rendezve, majd köbre emelve adódik az algebrai egyenlet:

$$27x^2y^2 = \left(1 - x^2 - y^2\right)^3. \tag{5}$$

Az átalakítások sorozatában egy helyen lehet probléma: a (3) egyenletről a (4) egyenletre való áttéréskor esetleg nyerhettünk gyököt. Ezt zárjuk ki a továbbiakban.

Tegyük fel , hogy az $(x; y)$ számpárra teljesül a (4) összefüggés, de (2) helyett a

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 + \Delta \tag{6}$$

összefüggés áll fenn valamely $\Delta \neq 0$ esetén. A (6) egyenlet köbreemelésével majd (6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(1 + \Delta) = (1 + \Delta)^3,$$

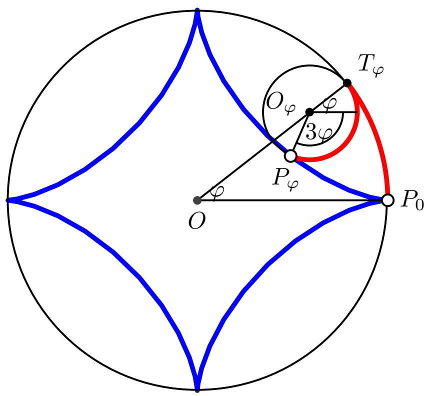
amiből (5)-gyel való összevetés és átalakítások után (közben Δ-val osztunk) kapjuk, hogy $\Delta \neq 0$ esetén

$$\frac{3 + 3\Delta + \Delta^2}{3} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

A nemnegatív $x^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \Delta}{2}\right)^2. \tag{8}$$

A (7) összefüggés bal oldalának és (8) jobb oldalának összevetéséből rendezés után a $(\Delta + 3)^2 \leq 0$ egyenlőtlenség adódik, amely csak $\Delta = -2$ esetén teljesül, de Δ értelmezése (lásd a (6) összefüggést) $\Delta \geq -1$.



7.3M1.1. ábra.

2. megoldás. [3]

c)

Alább megmutatjuk, hogy ha az a, b valós számokra

$$a^3 + b^3 + 3ab = 1, \tag{1}$$

akkor vagy

$$a + b = 1, \tag{2}$$

vagy $a = b = -1$. Ha ezt az állítást az $a = x^{\frac{2}{3}}$, $b = y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazzuk, akkor láthatjuk, hogy az I. megoldás elején kapott $x^2+y^2+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenletből következik az asztrois kiindulásul vett $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenlete, hiszen $0 \leq x^{\frac{2}{3}} \neq = -1$. Így rövid úton kapjuk, hogy az asztrois algebrai egyenlete az I. megoldás $27x^2y^2 = \left(1 - x^2 - y^2\right)^3$ egyenlete.

Jelöljön ω komplex primitív harmadik egységgyököt, tehát $\omega \neq 1$, de $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = -1$. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor fennáll a

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c) \tag{3}$$

azonosság. Tehát $c = -1$ esetén

$$a^3 + b^3 - 1 + 3ab = (a + b - 1)(a + \omega b - \omega^2)(a + \omega^2 b - \omega). \tag{4}$$

A (4) azonosság azt mutatja, hogy ha teljesül a (1) összefüggés, akkor vagy teljesül a (2) egyenlet is vagy (4) jobb oldala második vagy harmadik tényezője zérus. Mely valós a, b számokra lehet e két tényező egyike zérus? Mivel ω és ω^2 képzetes része nem nulla és egymás ellentettje, így e tényezők képzetes része csak $b = -1$ esetén lesz zérus, és ezek után $a = -1$ kell, hogy a tényező valós része is nulla legyen. Ezzel az állítást beláttuk és egyúttal igazoltuk, hogy a $27x^2y^2 = \left(1 - x^2 - y^2\right)^3$ egyenlet az asztrois egyenlete.

7.4. a) Lásd az 1. ábrát!

b) A görbe θ forgási szöghöz tartozó $(x(\theta); y(\theta))$ pontjának az origótól való távolsága $r(\theta) = a\theta$, így koordinátái:

$$x(\theta) = a\theta\cos\theta; \qquad y(\theta) = a\theta\sin\theta. \tag{1}$$

c) Nem algebrai görbe. Egy algebrai görbét bármely egyenes véges sok pontban metsz (egy polinom gyökeinek meghatározásához vezet a metszépontok meghatározása) vagy az egyenes teljes egészében a görbéhez tartozik. Az x tengely a spirálist végtelen sok pontban metszi, de nem tartozik hozzá.

7.5. a)
A $P(x,y)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a Def.1-ben meghatározott görbére (lásd az 1. ábrát), ha

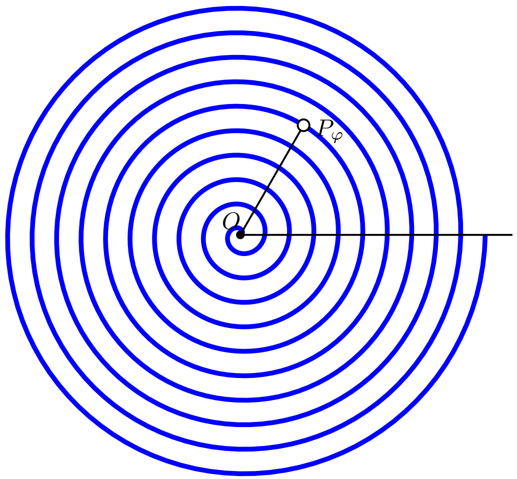
$$\left[(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2\right]\cdot\left[(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2\right]=\frac{1}{4}.$$

Ebből az egyenletből ekvivalens átalakítások után kapjuk a vizsgált lemniszkáta görbének a feladatban megadott egyenletét.

7.6. a) Az origó körüli β szögű forgatás és $e^{b\beta}$ arányú nagyítás kompozíciója az első ívet a másodikba képezi, hiszen ez a leképezés a görbe $(\phi, r=a\cdot e^{b\phi})$ pontját a $(\phi+\beta, r=a\cdot e^{b\phi}\cdot e^{b\beta})$ pontba képezi, amely szintén pontja a görbének, ugyanis $e^{b\phi}\cdot e^{b\beta}=e^{b\phi+b\beta}=e^{b(\phi+\beta)}$.

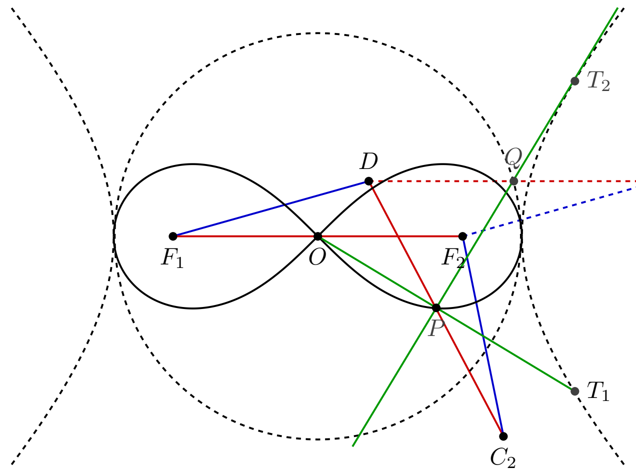
b) Lásd az 1. ábrát!

c) Egy ilyen téglalap érintési pontjai a ϕ, $\phi+\frac{pi}{2}$, $\phi+\frac{2pi}{2}$, $\phi+\frac{3pi}{2}$, egy másiké a ψ, $\psi+\frac{\pi}{2}$, $\psi+\frac{2\pi}{2}$, $\psi+\frac{3\pi}{2}$ paraméterértékekhez tartoznak, így az elsőt a másodikba egy origó körüli $(\psi-\phi)$ szögű forgatás és egy $e^{b(\psi-\phi)}$ arányú középpontos nagyítás kompozíciója viszi.

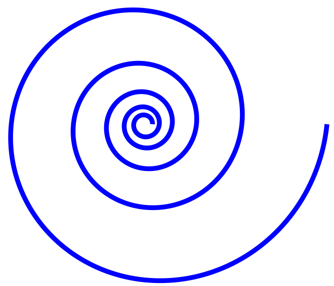


7.4M.1. ábra.

Megjegyezzük, hogy ha $\psi-\phi=\frac{\pi}{2}$, akkor az egyik téglalapból a másik egy egyenes mentén való levágással adódik és a két téglalap hasonló egymáshoz. Így egymáshoz hasonló, egymásba helyezett téglalapok végtelen sorát készíthetjük.



7.5M.1. ábra.



7.6M.1. ábra.

7.7. Az $f(x)$ függvény grafikonja $x \in [0;\xi]$ intervallum fölötti részének ívhossza $\int_0^\xi \sqrt{1+f'^2(x)}dx$. Most $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, amiből $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, tehát $1+f'^2(x)= = \frac{1}{1-x^2}$, így az ívhossz:

$$\int_0^\xi \frac{1}{1-x^2}dx = arcsin\xi.$$

7.9. A 7.3. feladatban láttuk, hogy az asztrois az $R=4r$ sugarú kör belsejében azon gördülő r sugarú kör egy pontjának pályája. Paraméteres alakja:

$$x(\varphi)=R\cos^3\varphi; \qquad y(\varphi)=R\sin^3\varphi. \tag{1}$$

a) A sebességvektor koordinátái:

$$x(\varphi)'=-3R\cos^2\varphi\sin\varphi; \qquad y(\varphi)'=3R\sin^2\varphi\cos\varphi, \tag{2}$$

tehát a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)} = 3R\sqrt{cos^4\varphi\sin^2\varphi+cos^2\varphi\sin^4\varphi} = 3R|cos\varphi\sin\varphi|\sqrt{cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{3}{2}R|\sin 2\varphi|.$$

A görbe egy negyedívének hossza:

$$\frac{3}{2}R\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{3}{4}R\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}R,$$

azaz a teljes ív hossza $6R$.

b)

A negyedív alatti terület:

$$\int_0^{\pi/2} x(\varphi)'y(\varphi)d\varphi = -3R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^4\varphi d\varphi = -3R^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi - \sin^6\varphi d\varphi. \tag{3}$$

A 6.7 feladatban láttuk, hogy $I_4 = \int_0^{\pi/2}\sin^4 x dx = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}$, $I_6 = \int_0^{\pi/2}\sin^6 x dx = = \frac{1\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}$, azaz a (3) integrál értéke $-\frac{3}{32}R^2\pi$. A negatív előjel azért van, mert a paraméterezés szerint az x-tengely felett jobbról balra halad a grafikon. A négy negyedív által határolt tartomány területe $\frac{3}{8}R^2\pi$.

c) A (1)-ben adott ponton átmenő (2)-ben adott irányvektorú egyenes egyenletét kell felírnunk. A (2) sebességvektorral arányos, de egyszerűbb alakú

$$(-\cos\varphi; \sin\varphi)$$

irányvektorral számolva az egyenes egyenlete:

$$\sin\varphi(x-R\cos^3\varphi)+\cos\varphi(y-R\sin^3\varphi)=0. \tag{4}$$

Ebből $x=0$ esetén

$$y=R(\cos^2\varphi\sin\varphi+\sin^3\varphi)=R\sin\varphi,$$

míg $y=0$ esetén

$$x=R(\cos\varphi\sin^2\varphi+\cos^3\varphi)=R\cos\varphi.$$

A két tengelypont távolsága: $R\cdot\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=R$, ami valóban állandó.

7.11. a) Az Arkhimédeszi spirális parametrikus előállítása (lásd a 7.4. feladatot):

$$x(\theta)=a\theta\cos\theta; \qquad y(\theta)=a\theta\sin\theta. \tag{1}$$

Mivel

$$x'(\theta)=a(\cos\theta-\theta\sin\theta); \qquad y'(\theta)=a(\sin\theta+\theta\cos\theta), \tag{2}$$

így

$$\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}=a\sqrt{1+\theta^2}, \tag{3}$$

azaz a görbe α és β paraméterű pontjai közti ívének hossza

$$a\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\theta^2}d\theta. \tag{4}$$

Használjuk a $\theta = sht$ helyettesítést és dolgozzunk a határozatlan integrállal! Mivel $\frac{d\theta}{dt}=cht$, így

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\theta^2}d\theta = & \int\sqrt{1+sh^2t}cht \quad dt = \int ch^2tdt = \int\frac{1+ch2t}{2}dt = \\ = & \frac{t}{2}+\frac{sh2t}{4}+c = \frac{arsh\theta}{2}+\frac{shtcht}{2} = \frac{\ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})}{2}+\frac{\theta\sqrt{\theta^2+1}}{2}+c.\end{aligned} \tag{5}$$

Ebből a kérdezett ívhossz $a\frac{\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})}{2}+\frac{2\pi\sqrt{4\pi^2+1}}{2}$.

b) Az $\underline{u}(u_1;u_2)$, $\underline{v}(v_1;v_2)$ vektorok skaláris szorzatának kétféle felírásából bezárt szögük koszinusza:

$$\cos\gamma=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}. \tag{6}$$

Ezt alkalmazhatjuk a (1), (2) vektorokra, melyek közül az első hossza $a\theta$, a másik hossza pedig (3)-ben adott így a kérdezett szög koszinusza

$$\cos\gamma=\frac{a\theta\cos\theta a(\cos\theta-\theta\sin\theta)+a\theta\sin\theta a(\sin\theta+\theta\cos\theta)}{a^2\theta\sqrt{1+\theta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

és ebből

$$tg\alpha=\theta. \tag{7}$$

c) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az origó (a spirál kezdőpontja) egyik befogója az x-tengely (a kezdőpontbeli érintő), átfogója a spirál $\varphi = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjához tartozó érintője. Ebben a derékszögű háromszögben a két befogó aránya $\frac{\pi}{2}$, így ha felnagyítjuk úgy, hogy rövidebb befogója a kör átmérőjével legyen egyenlő, akkor a kívánt területű háromszöget kapjuk, ami téglalappá darabolható.

d) Legyen a szög csúcsa a spirál O kezdőpontja, egyik szára a spirál kezdőpontjában húzott érintő, a másik szár messe először a spirált a P_φ pontban az OP_φ távolság harmadával, mint sugárral O körül rajzolt kör a spirált a $\frac{\varphi}{3}$ paraméterhez tartozó pontban metszi, hiszen a görbén az elfordulás és a kezdőponttól való távolság arányos egymással. A $\frac{\varphi}{3}$ paraméterű ponthoz húzott sugár harmadolja az adott φ szöget.

7.12. $\int_0^1 \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5}$.

7.14. $\frac{16}{3} r^3$.

7.16. $y' = 2x$, így a kérdezett ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y\prime)^2 + 1}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx. \tag{1}$$

A fenti integrált a $2x = sht$ helyettesítéssel határozhatjuk meg, de most gyorsítunk. A $2x = z$ helyettesítés esetén $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2}$, így

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2}dz \tag{2}$$

Ezt az integrált már láttuk a 6.10. feladatban. Az eredményt felhasználva

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{z\sqrt{1+z^2}}{4} + \frac{\ln(z + \sqrt{1+z^2})}{4} + c = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{4} + c. \tag{3}$$

Az ívhossz:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx = [\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{4}]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

7.17. $y' = e^x$, így a kérdezett ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y\prime)^2 + 1}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}dx. \tag{1}$$

Alkalmazzuk az $e^x = sht$ helyettesítést! Mivel $x = \ln sht$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{cht}{sht}$ és a keresett integrál határozatlan formában:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}dx = \int cht\frac{cht}{sht}dt = \int \frac{ch^2 t}{sht}dt = \int \frac{1 + sh^2 t}{sht}dt. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1+sh^2 t}{sht} = sht + \frac{1}{sht}$ és alkalmazzuk a 6.12. feladat eredményét!

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}dx = cht + \ln\left(th\frac{t}{2}\right). \tag{3}$$

Itt $cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{1 + e^{2x}}$. Másrészt $e^x = sht = \frac{2th\frac{t}{2}}{1 - th^2\frac{t}{2}}$, amiből $th\frac{t}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}$. Mivel $0 < e^x = sht$, így $0 < t$, amiből $0 < \frac{t}{2}$ és $0 < th\frac{t}{2}$, azaz $\pm$-ben a pozitív előjel kell:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}dx = \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln\left(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1\right) - x. \tag{4}$$

A kérdezett ív hossza:

$$\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(\sqrt{1 + e^2} - 1\right) - 1 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1). \tag{5}$$

7.18. A 7.2 feladatban már megkaptuk a ciklois paraméteres előállítását: $x(t) = t - r\sin\frac{t}{r}$, $y(t) = r - r\cos\frac{t}{r}$, amiből

$$x'(t) = 1 - \cos\frac{t}{r}, \qquad y'(t) = \sin\frac{t}{r}. \tag{1}$$

a) a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{t}{r}} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\frac{t}{r}} = \sqrt{2}\sqrt{1 - (1 - 2\sin^2\frac{t}{2r}} = 2|\sin\frac{t}{2r}|, \tag{2}$$

a teljes ív hossza

$$\int_0^{2r\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2\int_0^{2r\pi} |\sin\frac{t}{2r}|dt = 2\left[-2r\cos\frac{t}{2r}\right]_0^{2r\pi} = 8r. \tag{3}$$

b) A terület:

$$\int_0^{2r\pi} x'(t)y(t)dt = r\int_0^{2r\pi} (1 - \cos\frac{t}{r})^2 dt = r\int_0^{2r\pi} 1 - 2\cos\frac{t}{r} + \cos^2\frac{t}{r}dt =$$

$$= r\int_0^{2r\pi} 1 - 2\cos\frac{t}{r} + \frac{1 + \cos\frac{2t}{r}}{2}dt = r\left[\frac{3t}{2} - 2r\sin\frac{t}{r} + \frac{r}{4}\sin\frac{2t}{r}\right]_0^{2r\pi} = 3r^2\pi.$$

7.19. a) A görbe paraméterese egyenlete Descartes koordinátákban:

$$x(\phi) = a \cdot e^{b\phi} \cos\phi, \qquad y(\phi) = a \cdot e^{b\phi} \sin\phi, \tag{1}$$

tehát az érintővektor:

$$x'(\phi) = ab \cdot e^{b\phi} \cos\phi - a \cdot e^{b\phi} \sin\phi, \qquad y'(\phi) = ab \cdot e^{b\phi} \sin\phi + a \cdot e^{b\phi} \cos\phi,$$

azaz

$$(x'(\phi), y'(\phi)) = a \cdot e^{b\phi}(b\cos\phi - \sin\phi, b\sin\phi + \cos\phi). \tag{2}$$

A $\underline{v}(b\cos\phi - \sin\phi, b\sin\phi + \cos\phi)$ érintővektor hossza $\sqrt{b^2+1}$, így az érintő és a sugárirányú $(\cos\phi, \sin\phi)$ egységvektor θ szögére a vektorok skaláris szorzata alapján:

$$\cos\theta = \frac{(b\cos\phi - \sin\phi)\cos\phi + (b\sin\phi + \cos\phi)\sin\phi}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Az érintő és a sugárszöge állandó, ami nem is csoda, hiszen a görbe önhasonló. A b paraméter és a θ szög kapcsolata rövidebben: $\frac{1}{tg\theta} = b$.

b) Láttuk, hogy a sebességvektor hossza $a \cdot e^{b\phi}\sqrt{b^2+1}$, tehát a kérdezett ív hossza

$$a \cdot \sqrt{b^2+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{b\phi} d\phi = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2+1} \cdot \left[e^{b\phi}\right]_0^{2\pi} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2+1} \cdot (e^{2b\pi} - 1)$$

8. Furcsa függvények

8.1. a) Igen van, pl $f(x) = (\sqrt{2})^{[x]}$.

b) Nincs. Ha f folytonos, akkor a $g(x) = f(x+1) + f(x)$ és a $h(x) = f(x+1) - f(x)$ függvények is folytonosak. A feltétel mellett g és h mindenütt irracionális értéket vesz fel, így a folytonosság miatt mindkettő konstans. Mivel $f = \frac{g+h}{2}$, így f is konstans lenne, ami nyilván nem lehet.

8.2. a) Igen van, pl $f_1(x) = ||x| - 2|$ vagy $f_2(x) = (x^2 - 4)^2$.

b) Igen van, ha szélsőértéken csak a szigorú szélsőértéket értjük. Egy ilyen függvény grafikonja látható az 1. ábrán.

8.3. Az $f(x) = |x|$ függvényre az $x_0 = 0$ választással a második határérték létezik (a tört azonosan 0), az első azonban nem.

A második határérték így írható:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{2} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}}{2}$$

és itt a számláló mind a két tagja az első határértékkel egyenlő. Tehát, ha az első határérték létezik, akkor a második is és értékük egyenlő.

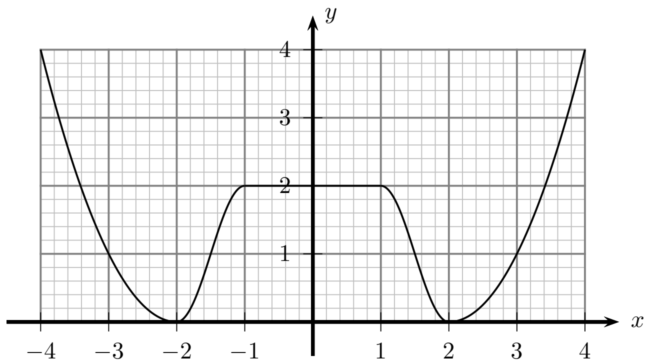
8.10. a)

b) φ_n grafikonja olyan egyenes darabokból áll, amelyek meredeksége ± 1, így Φ_n grafikonja olyan szakaszokból áll, amelyek meredeksége n db ± 1 összege.

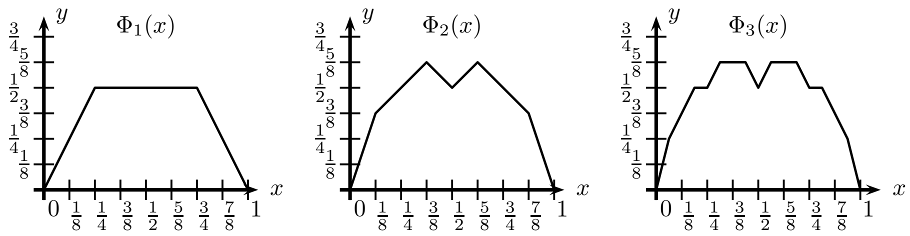
c) A φ_n függvény maximuma $\frac{1}{2^{n+1}}$. Bármely rögzített x-re a $\{\Phi_n(x)\}$ sorozat monoton növő és felső korlátja az $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$.

d) $\Phi(x_0+\Delta) - \Phi(x_0) = \Phi_n(x_0+\Delta) - \Phi_n(x_0) + (\phi_{n+1}(x_0+\Delta) + \phi_{n+2}(x_0+\Delta) + \ldots) - (\phi_{n+1}(x_0) + \phi_{n+2}(x_0) + \ldots)$, így $|\Phi(x_0+\Delta) - \Phi(x_0)| \le |\Phi_n(x_0+\Delta) - \Phi_n(x_0)| + \frac{1}{2^n}$. Ha azt szeretnénk, hogy teljesüljön a $|\Phi(x_0+\Delta) - \Phi(x_0)| < \epsilon$ egyenlőtlenség, akkor választunk egy olyan n-et, amelyre $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, majd a Φ_n folytonos függvényhez egy olyan $\delta > 0$-t, amelyre $\Delta < \delta$ esetén $|\Phi_n(x_0+\Delta) - \Phi_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

e) Vegyük észre, hogy $x = \frac{s}{2^n}$ ($s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) esetén $\Phi_{n-1}(x) = \Phi_n(x) = \Phi_{n+1}(x) = \ldots = \Phi(x)$, hiszen $\varphi_n\left(\frac{s}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\varphi_0(s) = 0$.



8.2M.1. ábra.



8.10M.2. ábra.

Legyen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén s_k az az egész szám, amelyre

$$\frac{s_k}{2^{k+1}} \le x_0 < \frac{s_k+1}{2^{k+1}}.$$

Az így definiált $\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}}$, $\beta_k = \frac{s_k+1}{2^{k+1}}$ sorozatokra $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = x_0$, így ha létezik $\Phi'(x_0)$, akkor (lásd a 3. feladatot):

$$\Phi'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(\alpha_k) - \Phi(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}.$$

De $\frac{\Phi(\alpha_k)-\Phi(\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k} = \frac{\Phi_k(\alpha_k)-\Phi_k(\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k}$. A legutóbb kapott kifejezés a Φ_k függvény egy egyenes szakaszának meredeksége, amely a $(k+1)$ paritásával megegyező paritású egész szám. Váltakozó paritású egész számok sorozatának nincs határértéke, ezért $\Phi'(x_0)$ nem létezik.

e)-f) Legyen $\varphi_{2n} + \varphi_{2n+1} = \psi_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Pl

$$\psi_0(x) = \Phi_2(x) \begin{cases} = \frac{1}{2} & \text{, ha } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ < \frac{1}{2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $\psi_n(x) = \frac{1}{4^n}\psi_0(4^n x)$, így

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}$$

és az egyenlőség mindazokra az x-ekre teljesül, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{4} \le [4^n x] \le \frac{3}{4}$, tehát azokra az x számokra, amelyek tört részének van olyan 4-es számrendszerbeli alakja, amely csak 1-es és 2-es számjegyeket tartalmaz.

9. Vegyes feladatok

9.2. a) $I_n = \int_1^n \ln x dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - (n-1)$.

b) $S_i = \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2}$

c) $I_n = \sum_{i=1}^{n-1}(S_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} S_i$, tehát $\sum_{i=1}^{n-1} S_i = I_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i = n\ln n - (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} t_i$. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n-1} S_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2} = \frac{\ln 1}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right) - \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln n}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2},$$

így $\ln(n!) = (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\right)$.

d) A $\{\tau_n\}$ sorozat szigorúan monoton nő, elég megmutatnunk, hogy korlátos, abból már következik, hogy konvergens. Rajzoljuk le ezeket a háromszögeket úgy,

hogy jobb oldali csúcsukat toljuk egybe, pl a B_2 pontba. Mivel az ln függvény grafikonja alulról nézve konkáv, így a B_iB_{i+1} húr a B_i-beli és B_{i+1}-beli érintők alatt lesz, azaz e három egyenes meredekség szerint így jön egymás után: B_{i+1}-beli érintő, B_iB_{i+1} húr, B_i-beli érintő. Ez pont azt jelenti, hogy az egybetolt háromszögek nem lógnak egymásba, az összes elfér egy olyan háromszögben, amelynek egyik oldala B_1B_2 (azaz A_1B_2) másik két oldala pedig párhuzamos a koordinátatengelyekkel.

e) Mivel $0 < \tau'_n < \tau_n$, így a $\{\tau'_n\}$ sorozat is korlátos, s mivel monoton nő, így konvergens is.

f) Ha $\lim_{n\to\infty} c_n = C$, $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{c_n}\cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}} = \frac{e^C e^C}{e^C} = e^C$, így vizsgáljuk az $c'_n = \frac{e^{c_n}\cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}}$ sorozatot! Mivel $e^{c_n} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ így

$$c'_n = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \Big/ \frac{(2n!)e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \sqrt{\frac{2^2}{1\cdot 3}\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n)}{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} = 2$ és a Wallis formula szerint $\lim_{n\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$, így $e^C = \sqrt{2\pi}$, azaz $C = \ln\sqrt{2\pi}$.

g) A bizonyítandó állítást kapjuk, ha a $\lim_{n\to\infty} c_n - \ln\sqrt{2\pi} = 0$ összefüggésre alkalmazzuk a folytonos exponenciális függvényt.

9.3.

1. megoldás. a) Jelölje az i-edik fűrészfog x tengelyre eső jobb oldali sarkát a_{i-1}, a bal oldalit a_i, a területét t_i, az első n fog területösszegét T_n, tehát pl $1 = a_0 > \frac{1}{2} = a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, $t_1 = T_1 = \frac{1}{4}$ stb. Az a_i-től $(i > 0)$ jobbra következő fog bal oldalának meredekségéből

$$\frac{1}{2i} = \frac{a_{i-1} - a_i}{a_{i-1}} = 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}}, \tag{1}$$

amiből egyrészt

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{2i-1}{2i}, \tag{2}$$

másrészt

$$t_i = \frac{(a_{i-1} - a_i)a_{i-1}}{2} = \frac{a_{i-1}^2}{4i}. \tag{3}$$

Az $a_0 = 1$ kezdeti érték és a (2) rekurziós formula alapján

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$$

és indukcióval igazolható, hogy

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}. \tag{4}$$

A bizonyítandó $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ összefüggés ekvivalens azzal, hogy a

$$b_n = \ln a_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{6}{5} + \ldots + \ln\frac{2n}{2n-1} \tag{5}$$

sorozat végtelenhez tart. Vegyük észre, hogy

$$\ln\frac{2i}{2i-1} = \ln\left(1+\frac{1}{2i-1}\right) = \frac{1}{2i}\ln\left(1+\frac{1}{2i-1}\right)^{2i} > \frac{1}{2i}\ln e = \frac{1}{2i},$$

azaz b_n végtelenhez tart, hiszen nagyobb, mint a harmonikus sor megfelelő részletösszegének fele.

2. megoldás. [3] **a)**
Az $\{a_n\}$ sorozat monoton fogyó és 0 egy alsó korlátja, így van egy x nemnegatív határértéke. Indirekten igazoljuk, hogy $x = 0$.

Tegyük fel, hogy x pozitív. Akkor az i-edik háromszög y-tengellyel párhuzamos oldala nem rövidebb x-nél, így az x-tengellyel párhuzamos oldala legalább $\frac{x}{2i}$ hosszúságú. Az alapok összege így

$$\frac{x}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right),$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, hiszen a zárójelben a végtelenhez tartó harmonikus sor áll.

3. megoldás. [1] **a)**
Igazoljuk teljes indukcióval, hogy $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, amiből következik a feladat állítása! $n = 1$-re $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ valóban fennáll. Másrészt $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+2}}$, így ha az állítás igaz $n = k$-ra, akkor $n = k+1$-re is fennáll.

4. megoldás. [8] **a)**
Tekintsük a_n mellett a

$$b_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}. \tag{1}$$

sorozatot is.

Egyrészt

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \qquad \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1},$$

így $a_n < b_n$, másrészt

$$a_n b_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Mivel $0 < a_n^2 < a_n b_n \to 0$, így $a_n \to 0$.

5. megoldás. [?],[2] **a)**
Ismeretes (Wallis formula, 6.7. feladat), hogy a

$$J_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

sorozat $\frac{\pi}{2}$-höz tart. Vegyük észre, hogy

$$a_n^2 = \frac{1}{(2n+1)\cdot J_n} \longrightarrow 0,$$

tehát az $\{a_n\}$ sorozat is 0-hoz tart.

6. megoldás. b) Az a) feladatrészre adott 9.3M1 megoldás első bekezdésének képletei segítségével kiszámolhatjuk az $\{a_i\}$, $\{t_i\}$, $\{T_i\}$ sorozatok elsőt követő néhány további elemét is:

i	1	2	3	4
a_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	
t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{256}$	$\frac{25}{4096}$
T_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{75}{256}$	$\frac{1225}{4096}$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{8}, \qquad \frac{T_3}{T_2} = \frac{25}{24}, \qquad \frac{T_4}{T_3} = \frac{49}{48},$$

amiből sejthető, hogy

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2-1} = \frac{(2n+1)^2}{2n\cdot(2n+2)}, \tag{1}$$

tehát $n > 1$ esetén

$$T_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\cdot 2n}. \tag{2}$$

A (2) összefüggést indukcióval igazoljuk. A feladat a) részére adott a 9.3M1 megoldás első bekezdése utolsó két képletének összevetéséből:

$$t_{i+1} = \frac{1}{4(i+1)}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2i-1}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2i-1)^2}{(2i-2)\cdot 2i}\cdot\frac{2}{2i\cdot(2i+2)},$$

így

$$T_{i+1} = T_i + t_{i+1} = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2i-1)^2}{(2i-2)\cdot 2i}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2i\cdot(2i+2)}\right) = T_i\cdot\frac{(2i+1)^2}{2i\cdot(2i+2)}.$$

A T_n sorozat (2) képletében felismerhetjük a Wallis formula (6.7. feladat) J_n sorozatát:

$$T_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{1}{J_n},$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

9.4. a) $\frac{dx}{du} = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$, $\quad u = \sqrt{1-x^2}$, így

$$I_0(\xi) = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} -\frac{du}{u}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\sqrt{1-\xi^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Tehát a körnek az a húrja, amely az abszcisszatengely $[0;\xi]$ intervalluma felett van, egyenlő hosszú az $[\sqrt{1-\xi^2};1]$ intervallum feletti ívvel. Ha „bevezetjük" a teljes integrálra vonatkozó $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ „jelölést", akkor eredményünk így is írható:

$$I_0(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{\pi}{2} - I_0(\xi).$$

A $G_0(\xi) = I_0(\sqrt{1-\xi^2})$ egyenlettel definiált függvényt már ismerjük: $G_0(\xi) = \arccos\xi$.

b)

$$z = 2x\sqrt{1-x^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}};$$

így

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}}\,\frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-z^2}}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

azaz

$$2\cdot I_0(\xi) = 2\cdot\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_0(2\xi\sqrt{1-\xi^2}).$$

Eredményünk egyfajta „duplikációs" formula: anélkül, hogy meghatároznánk az $I_0(\xi)$ integrálfüggvény explicit alakját, meg tudjuk mondani, hogy meddig kell integrálni ugyanazt az integrandust, hogy az integrál értéke kétszer akkora legyen.

Most a

$$2\arcsin\xi = \arcsin(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$$

azonosságra adtunk szokatlan bizonyítást. Ez az azonosság más alakban ismerősebb: a $\xi = sin\alpha$ helyettesítés után mindkét oldal szinuszát véve kapjuk a

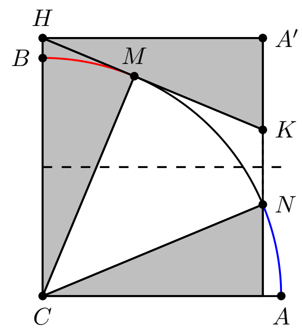
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

összefüggést, a szinusz függvény duplikációs formuláját.

9.6. a) Messe a H ponton át a CA sugárral párhuzamos egyenes a KN egyenest A'-ben. A CMH, $HA'K$ háromszögek hasonlóak ($HCM\angle$ és $A'HK\angle$ merőleges szárú szögek), míg a $HA'K$, CAN háromszögek egybevágók. A vizsgált ívek egyenlők, hiszen középponti szögeik egyenlők (lásd a 3. ábrát).

b) Legyen $CA = 1$ és $CB = c < 1$, tehát az ellipszis egyenlete

$$y = c\sqrt{1-x^2}. \tag{1}$$



9.6M.3. ábra.

Használni fogjuk az $n = 1 - c^2 > 0$ rövidítő jelölést. Az érintő meredeksége

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2}$$

tehát a

$$\underline{v}\left(1; -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

vektor érintő irányú és hossza

$$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + \frac{c^2x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}}, \tag{3}$$

így az érintő irányú egységvektor:

$$\underline{e}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}; -\frac{cx}{\sqrt{1-nx^2}}\right). \tag{4}$$

A vizsgált TM szakasz hossza az $\overrightarrow{CM}\left(x; c\sqrt{1-x^2}\right)$ vektor $\underline{u}$ vektorra eső merőleges vetülete:

$$MT = \underline{e} \cdot \overrightarrow{CM},$$

azaz x függvényeként:

$$MT(x) = nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{5}$$

Vizsgált függvényünk nemnegatív és folytonos, $x = 0$-ban és $x = 1$-ben zérus az értéke, így a $[0;1]$ intervallum belsejében lesz maximuma. A

$$MT'(x) = n\frac{nx^4 - 2x^2 + 1}{\sqrt{(1-nx^2)^3(1-x^2)}} \tag{6}$$

derivált a $[0;1]$ intervallumban csak $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$-ben zérus, ez a maximumhely. A maximum értéke $1 - c$, tehát a fél nagytengely és fél kistengely különbsége.

c) Felhasználjuk az a) rész számolási eredményeit. Mivel $\overrightarrow{HK} = \underline{e}$, így a K, N pontok abszcisszája (4)-ből

$$u = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{7}$$

Az ívhossz az érintő hosszának (lásd (3)) integrálja, tehát az alábbi összefüggést kell igazolnunk:

$$\int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt - nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{8}$$

A (8) bal oldalán található integrál kiszámításával kísérletezve a

$$s = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-nt^2}} \tag{9}$$

helyettesítést próbáljuk ki. A határok módosítása egyszerű: $t = 1$ az $s = 0$ értékhez, míg (7) alapján $t = u$ az $s = x$ értékhez tartozik. Másrészt (9)-ből

$$t = \sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}},$$

így

$$\frac{dt}{ds} = s\sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{n-1}{(1-ns^2)^2}.$$

Mindezekből

$$\int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt = \int_x^0 \frac{1}{s}s\sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{n-1}{(1-ns^2)^2}ds = \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{1-n}{(1-ns^2)^2}ds =$$

$$= \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}ds - n\int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{ns^4 - 2s^2 + 1}{(1-ns^2)^2}ds.$$

A legutolsó kifejezést is láttuk már (6)-ben, tehát

$$\widehat{NA} = \widehat{BM} - \left[ns\sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}}\right]_0^x.$$

Mivel $-\left[ns\sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}}\right]_0^x = -nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-xs^2}} = -MT$ (lásd (5)) így az állítást igazoltuk.

d) A keresett pont a b) feladat eredménye és a c) feladat állítása szerint az ellipszis $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ abszcisszájú $O\left(\frac{1}{\sqrt{1+c}}, c\sqrt{\frac{c}{1+c}}\right)$ pontja, melyre $CO = \sqrt{\frac{1+c^3}{1+c}} = \sqrt{1-c+c^2}$, így a CAF háromszög CF oldalára felírt koszinusz-tétel igazolja az állítást.

Segítő lökések

1. Harmadfokú függvények

1.1. úgy kell t-t választanunk, hogy a másodfokú tag kiessen: $t = \frac{-b}{3a}$.

1.3. Az 1.1 feladatban látott módon "eltüntethető" a négyzetes tag és a főegyüttható kiemelése után alkalmazható a **??** feladat. Azt kapjuk, hogy a függvény az $x = \frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontra középpontosan tükrös.

1.5. A feladat deriválással könnyen megoldható. De megoldható "elemien is": a **??** feladatban alkalmazott, $\frac{b}{3a}$-val való eltolás után látható, hogy ha a pozitív, akkor a szimmetria középpont előtt konkáv a függvény, utána konvex, ha a negatív, akkor pont fordítva.

1.7. Ismét az segít, ha a polinomot átrendezzük $x + \frac{b}{3a}$ hatványai szerint. A másodfokú tag eltűnik, az elsőfokú tag együtthatója $\frac{3ac-b^2}{a^2}$. Ha ez a szám pozitív, akkor a függvény szigorúan monotonan növekszik, tehát csak egy nullhelye van.

1.10. Az 1.9 mindkét megoldása célra vezet most is. Ráadásul mindkét esetben ugyanazzal az a paraméterrel.

1.12. Lényegében minden állítást beláttunk már korábban, x_0 és x_1 értékét úgy kapjuk, hogy alkalmazzuk az $x' = x + \frac{b}{3a}$ helyettesítést és az így kapott $f(x'$ függvényre alkalmazzuk az 1.11 feladatot.

1.13. Nyilvánvaló, hogy a szimmetria miatt elég az egyik állítást belátni. Az is könnyen meggondolható, hogy elég az $x^3 - px$ alakú függvényekre ($p > 0$) belátni az állítást. Ez kétféleképp is történhet. Az egyik: kiszámoljuk a függvény értékét $\frac{\sqrt{p}}{3}$ és $-2\frac{\sqrt{p}}{3}$ pontban: mindkettőre $\frac{-2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$-at kapunk.

A másik lehetőség: legyen az x_0 abszcisszájú ponton átmenő vízszintes egyenes az x-tengely. (Ehhez csak q-t kell jól választani az $x^3 - px + q$ függvényben.) Ekkor x_0-ban a függvénynek kétszeres nullhelye van (mert nem előtte nő, utána csökken), a gyökök összege pedig nulla, tehát a harmadik gyök $-2x_0$.

1.14. Alkalmazzuk az 1.13 feladatban kapott eredményt. Pontosan akkor van három valós gyök, ha a függvény értéke x_0-ban nem negatív, x_1-ben nem pozitív. Kiszámolható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $(\frac{q}{2})^2 \leq (\frac{p}{3})^3$.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

3. Függvényvizsgálat

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

4. Szélsőérték

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

5. Egyenlőtlenségek

5.3. Legyen $t = \frac{x}{y}$. Az egyenlőtlenség az $f(t) = at - t^a + 1 - a$ függvény vizsgálatára vezet. Mutassuk meg, hogy $0 < t$ esetén ez $t = 1$-ben minimális.

6. Alapvető integrálok

6.6. Ha $t = arshx$, akkor $sht = x$, azaz $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$. Oldjuk meg ezt az egyenletet a t ismeretlenre!

6.11. Alkalmazzuk a $tg\frac{x}{2} = t$ helyettesítést!

6.12. Alkalmazzuk a $th\frac{x}{2} = t$ helyettesítést vagy a 6.12. feladat eredménye alapján sejtsük meg az eredményt!

6.13. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x+1}$ helyettesítést!

6.14.

1. segítő kökés. Próbálkozzunk egyfajta „maradékosan osztással”!

2. segítő kökés. Alkalmazzuk az $e^x = t$ helyettesítést!

6.15.

1. segítő kökés. Alakítsuk a sin függvényt cos fügvénnyé, majd a cos 2α-ra vonatkozó megfelelő összefüggés alkalmazásával alakítsuk át a nevezőt!

2. segítő kökés. Alkalmazzuk a $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.16. Alkalmazzuk a $t = 1 + e^x$ helyettesítést!

6.17. Alkalmazzuk a $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.18. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x-1}$ helyettesítést!

7. Görbék

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

8. Furcsa függvények

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

9. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítő lökést.

Irodalomjegyzék

[1] Balogh Máté diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[2] Farkas Márton diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[3] Kornis Kristóf diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[4] Beke Manó: *Bevezetés a differenciál- és integrál-számításba.* 4. kiad. Budapest, 1967, Gondolat Kiadó.

[5] B. Martinov: A Van-der-Waerden függvény maximumáról. 1982. 6. sz., *Kvant.* Olvasható a http://kvant.mirror1.mccme.ru/1982/06/o_maksimumah_funkcii_van–der-.htm weboldalon.

[6] Pataki János.

[7] Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei I.* Budapest, 2000, Typotex Kiadó. ISBN 963 9132 748.

[8] Tomon István diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[9] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény.* I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.

[10] A. Zvonkin: *Az analízis segít az algebrának.* Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 64–70. p.

[11] Császár Ákos: *Valós analízis.* ?. kiad. Budapest, ?, Tankönyvkiadó. ISBN ?

[12] Denkinger Géza és Gyurkó Lajos: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* Budapest, 1978, Tankönyvkiadó.

[13] M. Balk és Ju. Lomakin: *Egyenlőtlenségek bizonyatása deriválással.* Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 71–75. p.