Pálmay Lóránt Matematikai Tehetségkutató Verseny
2022. január 14.

A feladatok megoldása

1. feladat. Egy dobozban 30 egyforma nagyságú golyó van: pirosak, kékek és zöldek, mindegyikből különböző mennyiségű, zöldből van a legtöbb. Becsukott szemmel legalább 23 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen mindhárom színű golyó a kihúzottak között; illetve legalább 21 golyót, hogy biztosan legyen piros golyónk. Hány golyó van az egyes színekből? **(8 pont)**

Megoldás:
Legalább 21 golyót kell kihúzni, hogy legyen piros golyó a kihúzottak között, ezért 20 kék és zöld golyónk van.

2 pont

Tehát 30-20=10 a pirosak száma.

2 pont

23 golyó között már biztosan van mind a három színből, 30-23=7 a legkevesebb színből maradhatott. Így a kék golyók száma 8 volt eredetileg.

2 pont

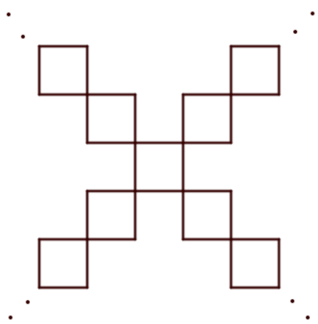
Ezért 30-10-8=12 a zöldek száma.

2 pont

Összesen: 8 pont

2. feladat. 1 *cm* oldalú kis négyzetekből összeraktunk egy nagyobbat. A nagy négyzet átlóiban álló kis négyzetek területének összege 85 cm^2. Mekkora a nagy négyzet területe? **(8 pont)**

Megoldás:



Rajz : 1 pont

A nagy négyzet $n \cdot n$ db kis négyzetből áll. A középső sor kivételével minden sorban 2 kis négyzet van. Ezt a középsőt kivesszük, akkor 4 egyforma ágra bomlik szét az ábra.

2 pont

$85 - 1 = 84,\quad 84:4 = 21,$ egy ágban 21, az átlóban $2 \cdot 21 + 1 = 43$ kis négyzet van.

3 pont

Az átló annyi kis négyzetből áll, mint a nagy négyzet egy oldala, területe:

$43cm \cdot 43cm = 1849\ cm^2$ (a mértékegység hiánya esetén legfeljebb 1 pont)

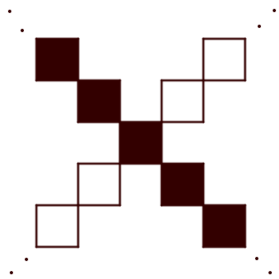
2 pont

Összesen: 8 pont

II. Megoldás:

Rajz: (mint az előbbi) 1 pont

Ha az egyik átlót kiszínezzük pl. feketére, akkor az ábrán eggyel több fekete négyzet van, mint fehér, mert a két átló közös része is fekete.



2 pont

A 85-öt két olyan szám összegére bontjuk, amelyek különbsége 1, ezek a 42 és a 43.
$42 + 43 = 85$, tehát az átlóban 43 kis fekete négyzet van.

3 pont

Az átló annyi kis négyzetből áll, mint a nagy négyzet egy oldala, területe:
$43cm \cdot 43cm = 1849\ cm^2$

(1+1) pont

Összesen: 8 pont

3. feladat. Piri 3 pár zoknit kapott karácsonyra. Egy hópelyheset, egy fenyőfásat, és egy mikulásosat. A szünet utáni első három tanítási napon szeretné őket úgy felvenni, hogy a két lábán mindig különböző zokni legyen. Ami egyszer már rajta volt, azt nem veszi fel még egyszer. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha arra is figyel, hogy melyik zokni van a jobb, és melyik a bal lábán? **(8 pont)**

Megoldás:

Jelöljük: H-hópelyhes, F-fenyőfás, M-mikulásos.
A három pár, ahogy felveheti a zoknikat: HF, HM és FM (nem számít a sorrend).

2 pont

Ezeket a párokat 3·2·1=6-féleképpen veheti fel a különböző napokon.
(Vagy felsorolva a lehetőségeket:

HF, HM, FM	HM, HF, FM	FM, HF, HM
HF, FM, HM	HM, FM, HF	FM, HM,FM

2 pont

Piri még azt is megteheti, hogy felcseréli a két lábán lévő zoknikat. Így a HF, HM és MF párokat is mind-mind kétféle módon veheti fel. A hat eset mindegyikében 2·2·2=8 módon veheti fel a zoknikat a két lábára.

3 pont

Tehát összesen 6·8=48-féleképpen tudja felvenni a zoknijait.

1 pont

Összesen: 8 pont

II. megoldás (a lehetőségek felsorolásával):
Az összes eset felsorolásakor az első jó sorrend.

2 pont

Van összesen 6 helyes sorrend.

1 pont

Van összesen 12 helyes sorrend.

1 pont

Van összesen 24 helyes sorrend.

1 pont

Van összesen 36 helyes sorrend.

1 pont

Van összesen 48 helyes sorrend.

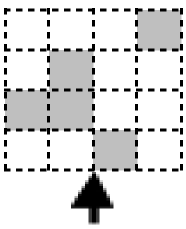
1 pont

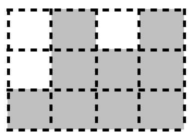
Tehát összesen 48-féleképpen tudja felvenni a zoknijait.

1 pont

4. feladat. Fakockákból összeraktunk egy építményt.

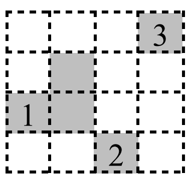
Ezt látjuk felülről: Ezt pedig az egyik oldalról, a nyíl irányából:





Hány fakockából állhat az építmény? **(10 pont)**

Megoldás:
A jelölt irányból nézve a jelölt helyeken egyértelmű, hogy hány kocka van egymás tetején.



3 pont

A második oszlopban a kettő közül az egyik helyen biztosan 3 kocka van egymás tetején.

2 pont

Ez eddig 1+2+3+3=9 kocka

1 pont

A második oszlopban a másik helyen lehet 1, 2 vagy 3 kocka egymás tetején.

2 pont

Így összesen 10, 11 vagy 12 kockából állhat az építmény.

2 pont

Összesen: 10 pont

5. feladat. Réka gondolt egy törtre, amelyiknek a számlálója 3, a nevezője pedig egy egész szám. A tört értéke $\frac{2}{7}$ és $\frac{4}{9}$ közé esik. Mely törtekre gondolhatott Réka? *(Például a $\frac{2}{7}$ számlálója 2, nevezője 7.)* **(12 pont)**

I. Megoldás

Ha a gondolt tört $\left(\frac{3}{a}\right)$ nagyobb, mint $\frac{2}{7}$, akkor a $3 \cdot 7 = 21$-nél kisebb a gondolt tört nevezőjének kétszerese $(2 \cdot a)$.

2 pont

Vagyis a gondolt tört nevezője legfeljebb 10 (és legalább 1).

2 pont

Ha a gondolt tört $\left(\frac{3}{a}\right)$ kisebb, mint $\frac{4}{9}$, akkor a gondolt tört nevezőjének négyzerese nagyobb, mint $3 \cdot 9 = 27$.

2 pont

Tehát a gondolt tört nevezője legalább 7.

2 pont

A gondolt tört nevezője tehát lehet 7, 8, 9 vagy 10.

4 pont

II. Megoldás:

Írjuk fel a Réka által gondolt számot $\frac{3}{a}$ alakban.

1 pont

Alakítsuk úgy a törteket, hogy a számlálójuk ugyanannyi legyen!

2 pont

$$\frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \frac{3}{a} = \frac{12}{4a}, \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

3 pont

Mindegyik tört számlálója és nevezője is pozitív, számlálójuk egyenlő, ezért az a tört nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb:

$$27 < 4a < 42$$

2 pont

Tehát az a szám értéke lehet 7, 8, 9 vagy 10.

4 pont

Összesen: 12 pont

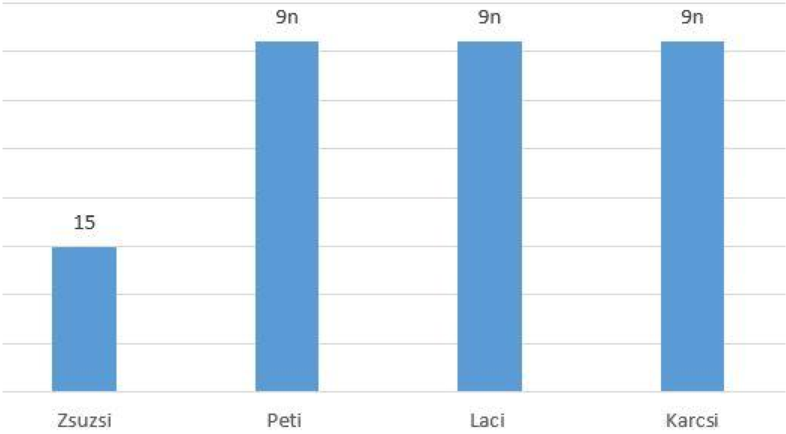
6. feladat. Peti, Laci és Karcsi kapott egy zacskó üveggolyót. 15 darabot a legkisebb testvérüknek, Zsuzsinak adtak, és a maradék üveggolyókon a fiúk igazságosan elosztoztak. Ha mindhárman még az üveggolyóik kilencedét is Zsuzsinak adnák, akkor mindannyiuknak ugyanannyi üveggolyója lenne.

Hány üveggolyó volt a zacskóban? **(14 pont)**

Megoldás:

Készítsünk ábrát! Kezdetben Zsuzsinak 15, a többieknek azonos számú golyóik voltak.

3 pont



Minden fiú átad Zsuzsinak n db golyót.

1 pont

Így Zsuzsinak $15+3\cdot n$ db golyója lesz.

1 pont

A fiúknak pedig $8\cdot n$ db.

1 pont

$15+3\cdot n$ golyó csak úgy lehet egyenlő a $8\cdot n$ db golyóval, ha $n=3$.

2 pont

Minden fiú három golyót adott Zsuzsinak, vagyis neki és a fiúknak is $15+3\cdot 3=24$ db golyója van, vagyis összesen $4\cdot 24=96$ db golyójuk volt.

3 pont

Ellenőrizzük le! Kezdetben Zsuzsinak 15, a fiúknak 27-27 üveggolyója volt.

1 pont

27 kilencede 3, ha ennyit adnak fejenként Zsuzsinak, mindenkinek 24 db golyója lesz.

1 pont

Tehát a 96 üveggolyója volt a gyerekeknek.

1 pont

Összesen: 14 pont

Maximális pontszám: 60 pont