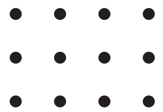
F 2000/2001. Iskolai (első) forduló
2000. november

7. osztály

1. Legkevesebb hány gyermeke van a Kovács családnak, ha mindegyik gyereknek van legalább egy fiú és egy leány testvére?

2. Hány olyan téglalap van, amelynek csúcsai az alábbi négyzetrács rácspontjaira esnek?



3. Egy üdülőhelyen 8-an béreltek egy 12 személyes motorcsónakot, így fejenként 399 Ft-tal többet kellett fizetniük, mint amennyit akkor kellett volna, ha 12-en veszik bérbe a csónakot?

Hány Ft-ot fizettek fejenként?

4. A 2001 olyan szám, amelynek tízesekre, százasokra és ezresekre kerekített értéke megegyezik.

Hány ilyen négyjegyű pozitív egész szám van?

5. Egy dobozban tíz számkártya volt, az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ számokkal. Ági, Béla, Cili, Dani és Elek egymás után 2-2 kártyát húzott. Danit kivéve a többiek elárulták az általuk húzott számok összegét: Ági 5-öt, Béla 12-t, Cili 10-et, Elek 12-t mondott.

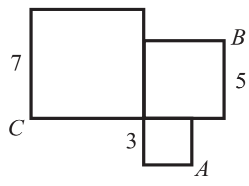
Mely számokat húzta Dani?

8. osztály

1. Egy üzemet átszerveztek. Két műhelyben új gépeket állítottak fel, és emiatt az itt dolgozókat átcsoportosították.

Hányan dolgoztak az átszervezést megelőzően a két műhelyben külön-külön, ha az átszervezés előtt az egyik műhelyben másfélszer annyian voltak, mint a másikban. Miután 18 dolgozót áthelyeztek az egyik műhelyből a másikba, az egyikben $\frac{5}{4}$-szer annyian lettek, mint a másikban.

2. Az ábrának megfelelően elhelyezkedő 3 négyzet oldalai rendre 3, 5 és 7 egység hosszúak. Mekkora az ABC háromszög területe?



3. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható, pozitív egész szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik, és számjegyeinek az összege 28?

4. Egy nyolcjegyű számban 2 db egyes, 2 db kettes, 2 db hármas, és 2 db négyes számjegy van. A két egyest egy számjegy, a két kettest két számjegy, a két hármast három számjegy, míg a két négyest négy számjegy választja el.

Melyik a legnagyobb ilyen tulajdonságú 8-jegyű szám?

5. Mekkora a 3cm, 4cm, 5cm oldalú derékszögű háromszögbe beírható kör sugara?

F 2000/2001. Megyei (második) forduló

2001.január

7. osztály I. kategória

1. Kovács úr 55 km/óra állandó sebességgel vezeti az autóját. Fél kilométerrel mögötte feltűnik egy ugyancsak állandó sebességgel haladó másik autó, amelyik egy perc alatt éri utol.

Hány km/óra a gyorsabbik autó sebessége?

2. Egy háromszög egyik szöge fele a másik kettő összegének, továbbá van a háromszögnek egy olyan szöge is, amelyik fele egy másiknak.

Mekkorák a háromszög szögei?

3. A, B és C különböző számjegyek.

Lehet -e, hogy az $\overline{ABC}$ és a $\overline{CBA}$ különböző háromjegyű számok mindketten oszthatók 7-tel?

4. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra, alapjai hosszának összege pedig 16 cm.

Számítsd ki a trapéz területét!

5. Három, síkbeli egyenessel feldaraboltuk a síkot.

Bizonyítsd be, hogy ha nyolc adott pont egyike sincs a három egyenes valamelyikén, akkor a keletkezett síkrészek között van olyan, amelyben legalább 2 pont van az adottak közül!

7. osztály II. kategória

1. Tizenkét, különböző, pozitív egész szám átlaga 12. Állítsuk a számokat növekvő sorrendbe!

Mekkora lehet az utolsó szám legnagyobb értéke?

2. Egy egységoldalú négyzet belső pontja a P. Jelölje P_1, P_2, P_3 és P_4 a P pontnak a négyzet oldalaira vonatkozó tükörképeit.

Mely P pont esetén lesz a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög területe a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb?

3. Egy ökölvívó mérkőzés több menetből állt. Az első menet után a nézők 20%-a ment el, és így tovább, hasonlóan távozott el a többi menet után az ottmaradt nézők 20%-a, míg a végén 4096 néző maradt.

a) Hány menetből állt a mérkőzés, ha a kezdéskor ottlévő nézők száma nem osztható 4-gyel?

b) Hány néző volt a lelátón a mérkőzés elején?

4. Lehet -e a következő négy darab négyjegyű szám összege

$$\overline{xypq} + \overline{ypqx} + \overline{pqxy} + \overline{qxyp}$$

négyzetszám?

5. A síkot négy egyenessel feldaraboltuk. Bizonyítsd be, hogy ha 25 adott pont egyike sincs ezen egyenesek valamelyikén, akkor a keletkezett síkrészek között van olyan, amelyben legalább 3 pont van!

8. osztály I. kategória

1. Két egyforma hosszú gyertyát este 10 órakor gyújtottak meg. Az egyik gyertya 6 óra alatt égett le teljesen, a másik 3 óra alatt.

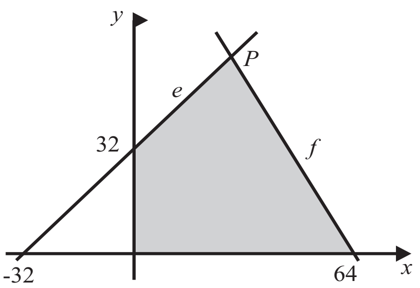
Mikor volt az egyik gyertya éppen kétszer olyan hosszú, mint a másik?

2. Ha egy szám reciprokát, ellentettjét és abszolút értékét összeadjuk, akkor ugyanazt a számot kapjuk, mintha ezt a három számot összeszoroztuk volna.

Mennyi volt az eredeti számnak a négyzete?

3. A derékszögű koordináta-rendszerben az ábrán látható e és f egyenes 2560 területegységnyi négyszöget vág le az első síknegyedből.

Határozd meg a P pont koordinátáit!



4. Egy tizenkét tagú társaságban van férfi is, nő is, gyerek is. 12 veknit visznek: minden férfi két veknit, minden nő egy fél veknit, a gyerekek mind egy-egy negyed veknit.

Hány férfi, nő és gyerek volt a társaságban?

5. Hány magasság lehet egy háromszögben nagyobb a rá merőleges oldalnál?

8. osztály II. kategória

1. Egy 80 km/óra állandó sebességgel haladó személyautó 11 óra 55 perckor ért céljához. Az ugyanezen az úton 70 km/óra sebességgel haladó teherautó 12 óra 7 perckor ért ugyanoda.

Hány kilométerrel a cél előtt előzte meg a személyautó a teherautót?

2. Az O középpontú kör három átmérője: AA', BB', CC'. Az AC', és a BC egyenesek metszéspontja a P, az $A'C$ és a $B'C'$ egyenesek metszéspontja az R pont.

Bizonyítsd be, hogy az O, P és R pontok egy egyenesen vannak!

3. Egy négyzet oldalának hossza centiméterekben mérve olyan egész szám, amely 2001 darab csupa kilences számjegyből áll.

Mennyi a négyzet területének a mérőszámában a számjegyek össszege?

4. Fel lehet -e darabolni egy szabályos háromszöget 2001 darab (nem feltétlenül egybevágó) szabályos háromszögre?

5. Egy háromszög alapú gúla (tetraéder) csúcsait rendre piros, fehér, zöld és kék színűre festettük. Ezután a tetraéder (háromszög alapú gúla) éleit is úgy festettük, hogy azok színe megegyezzen valamelyik végpontjuk színével, és eközben mind a négy színt felhasználtuk.

Bizonyítsd be, hogy van olyan csúcs, amelyből kiinduló élek egyike piros, másika fehér, és a harmadik zöld!

F 2000/2001. Országos (harmadik) forduló
2001. április 17.

7. osztály I. kategória

1. Egy kofa kétféle almát árul. Az egyik fajtát kilogrammonként 150 Ft-ért, a másik fajtát 200 Ft-ért adja. Egy napon a két fajtát összekeveri, és 180 Ft-ért árulja az így kapott 50 kilogramm alma minden kilóját.

Az egyes fajtákból hány kg-ot kellett összekevernie, ha így a nyeresége 500 Ft-tal nőtt?

2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy belső P pontjára

$$CAP_{\sphericalangle} = PBC_{\sphericalangle}, \qquad ABP_{\sphericalangle} = PCA_{\sphericalangle}, \qquad BCP_{\sphericalangle} = PAB_{\sphericalangle}$$

teljesül.

Igazold, hogy a PA merőleges a BC-re!

3. Egy 8×8-as sakktábla mezői közül húszat feketére festettek, a többit fehérre. Ha a sakktáblát középen (az egyik oldalfelező merőleges mentén) kettéhajtjuk, azt tapasztaljuk, hogy pontosan $7-7$ fekete mező kerül egymással fedésbe.

Hány pár fehér mező fedi egymást?

4. Melyik pozitív egész n számra igaz, hogy a

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

összeg olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek egyenlők?

5. Hány olyan 2001-nél nem nagyobb k pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy mind a k, mind a $k+1$ számjegyeinek az összege páratlan?

7. osztály II. kategória

1. Melyik az a legkisebb pozitív n egész, amelyre a

$$13 \cdot 17 \cdot n$$

három szomszédos egész szorzata?

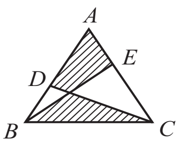
2. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja az AB szakasz. Jelölje P a B-ből, illetve a C-ből induló belső szögfelezők metszéspontját, R pedig a BC szárra C-ben állított merőleges és a B-ből induló belső szögfelező metszéspontját.

Igazold, hogy ha F a PR szakasz felezőpontja, akkor FC merőleges PB-re!

3. Géza magassága Ödön és Vili magasságátlagának $\frac{4}{5}$-e, Ödön magassága Vili és Géza magasságátlagának $\frac{6}{7}$-e.

Hányad része Vili magassága Géza és Ödön magasságátlagának?

4. A BE és a CD szakaszok úgy darabolják fel a szabályos $ABC_{\triangle}$-et, hogy a vonalkázott részek egyenlő területűek. Mekkora szöget zár be a CD és a BE szakasz egymással?



5. Egy gulyában két falu 65 tehene legel: vörösek, fehérek, feketék és tarkák.

Igazold, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból!

8. osztály I. kategória

1. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számok közül helyezzünk el hat darabot egy tetraéder (háromszög alapú gúla) élein úgy, hogy minden csúcsban az oda befutó éleken levő számok összege ugyanaz legyen.

Mely számokat hagyhattuk el?

2. Az ABC derékszögű háromszögbe olyan r sugarú félkört szerkesztünk, amely érinti az a és a b hosszú befogókat, és amelynek a középpontja az AB átfogón van.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

3. Képezzünk egy számsorozatot a következőképpen: az első tag legyen az 1; a második tagtól kezdve pedig a sorozat minden egyes tagja legyen a sorozatban az őt megelőző tagnak és ez utóbbi szám jegyei összegének az összege.

Tagja -e ennek a sorozatnak a 2001?

4. Az M és N pontok az $ABCD$ paralelogramma BC, illetve AD oldalán vannak, mégpedig úgy, hogy $BM = DN$. Legyen P a DC oldal tetszőleges pontja, K és L pedig azMN és a PA, illetve az MN és a PB metszéspontja.

Igazoljuk, hogy a PKL háromszög területe megegyezik az ANK és a BML háromszögek területének összegével!

5. Egy focicsapat pályán lévő 11 játékosának életkora 11 szomszédos egész szám. Miután egy játékost kiállítottak, a pályán maradt 10 csapattag átlagéletkora pontosan 28,7 év lett.

Hány éves a kiállított játékos?

8. osztály II. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy egy körvonal pontjait kiszínezhetjük két színnel úgy, hogy bármely derékszögű háromszögnek, amelynek csúcsai a körön vannak, legyen két különböző színű csúcsa!

2. Legyen $a = 5 \cdot 2^{2002}$ és $b = 3 \cdot 2^{2000}$.

Mennyi lesz a maradék, ha az a számot elosztjuk a b-vel?

3. Egy háromjegyű prímszámot a kétszerese után írtuk.

Hány osztója van az így nyert hat- vagy hétjegyű számnak?

4. Egy szabályos sokszög köré írható kör középpontját tükrözzük a sokszög oldalegyeneseire. A kapott képpontok egy olyan sokszög csúcsai, amelynek területe az eredeti sokszög területének a háromszorosa.

Hány oldalú az eredeti sokszög?

5. A sakktábla minden egyes mezőjére egy-egy páros természetes számot írtunk úgy, hogy bármely két, élben szomszédos mezőre írt szám különbsége legfeljebb 4 legyen.

Bizonyítsuk be, hogy lesz a sakktáblán öt egyforma szám!