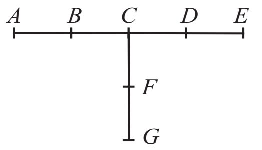
F 1999/2000. Iskolai (első) forduló
1999. november

7. osztály

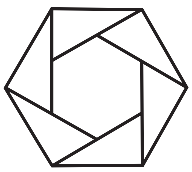
1. Adott a síkban az A, B, C,D, E, F és G pont, az ábrán látható elrendezésben.



Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók?

2. Egy dobozban 31 szem cukor volt. Ezekből Gabi hétfőn $\frac{3}{4}$ annyit evett, mint amennyit Peti evett hétfőn, kedden pedig $\frac{2}{3}$ annyit, mint amennyit Peti evett kedden. Más nem evett a cukorból, és kedd estére az összes cukor elfogyott. Hány szem cukrot evett Gabi?

3. Egy szabályos hatszög minden oldalát meghosszabbítjuk a kétszeresére az ábra szerint. Így egy újabb szabályos hatszöget kapunk. Hányszorosa a nagyobb hatszög területe a kisebb hatszög területének?



4. Két szám tükrös, ha egyikük jegyei fordított sorrendben a másik számot adják. Például: 1234 és 4321 ilyenek. Melyik az a két tükrös szám, amelyek szorzata 92565 ?

5. Egy szigeten kétféle ember él: igazmondó és hazug. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok mindig hazudnak. Egy alkalommal megkérdeztünk öt embert közülük, olyanokat, akik ismerték egymást. ,,Hány igazmondó van köztetek?". A következő válaszokat kaptuk: $0; 1; 2; 3; 4$.

Hány igazmondó volt az öt ember között?

8. osztály

1. Hány darab, legalább két egyforma számjegyet tartalmazó négyjegyű szám van?

2. Egy szabályos háromszögnek és egy szabályos hatszögnek ugyanakkora a kerülete.

Határozzuk meg a két síkidom területének az arányát!

3. Határozzuk meg az a, b, c, d számjegyeket úgy, hogy $\overline{ab} + \overline{abcd} + \overline{cd} = 1999$ legyen, ahol $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ kétjegyű, $\overline{abcd}$ pedig négyjegyű szám!

4. Az ABC derékszögű háromszög átfogóján vegyünk fel egy P pontot, és onnan bocsássunk merőlegest a háromszög befogóira. A merőlegesek talppontja Q és R.

Hol van az átfogón az a P pont, amelyre a QR szakasz a legrövidebb?

5. Tíz, nem feltétlenül különböző egész közül 9-et összeadunk, és így rendre a következő összegeket kapjuk: 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92.

Melyik ez a tíz egész?

F 1999/2000. Megyei / fővárosi forduló
2000. január

7. osztály I. kategória

1. Egy vonat 36 km/óra állandó sebességgel haladt. Ez a vonat egy egyenes pályán A városból B városba érve 9 percet késett. Ha ez a vonat 27 km/óra sebességgel haladt volna ugyanezen az úton, akkor 39 percet késett volna.

Milyen távol van egymástól a két város?

2. Az ABC és az ABD háromszögekben az $AB = AC = BD$. Az AC szakasz a BD szakaszt merőlegesen metszi.

Mekkora az $ACB_\sphericalangle$ és az $ABD_\sphericalangle$ összege?

3. Hány olyan legfeljebb háromjegyű, pozitív többszöröse van a 4-nek, amely nem tartalmazza a $0, 6, 7, 8$ és 9 számjegyeket?

4. Egy $60°$-os középponti szögű körcikk területe 100 cm^2. Mekora annak a körcikkbe írható körnek a területe, amely érinti a körcikk két határoló sugarát és körívét?

5. Add meg az

$$x^2y + x^2 = 180$$

egyenlet pozitív egész megoldásait!

7. osztály II. kategória

1. Egy 52 lapos francia kártyát összekevertünk, és 30 lapot egy oszlopban kiraktunk az asztalra. Mennyi a különbség a 30 lap között található fekete kártyák , és a maradék 22-ben lévő piros kártyák száma között? (A francia kártya 52 lapja közül 26 piros, 26 fekete.)

2. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög derékszögű csúcsához tartozó szögfelező felezi az e csúcshoz tartozó súlyvonal és magasság szögét is!

3. Az első n pozitív egész szám összege olyan háromjegyű szám, amelynek jegyei azonosak. Melyik ez az n?

4. Melyik négyjegyű $\overline{abcd}$ számokra teljesül, hogy

$$\overline{ab} = x^y \qquad \text{és} \qquad \overline{cd} = y^x,$$

ahol $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ kétjegyűek, x és y pozitív egészek?

5. Legfeljebb hány eleme lehet egy olyan halmaznak, amelynek elemei prímszámok, és bármely háromelemű részhalmazában a három szám összege is prímszám?

8. osztály I. kategória

1. Andrea és Bea egyenletes sebességgel fut egy egyenes út két végétől a másik végéig, majd vissza. Kétszer találkoznak: először 800 méterre az út egyik végétől, majd miután mindketten visszafordultak, másodjára 400 méterre az út másik végétől.

Milyen hosszú az út?

2. Négy csapat, A, B, C és D egyfordulós, körmérkőzéses bajnokságáról az alábbi táblázatba foglalt eredményeket ismerjük:

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>$Nyert$</td><td>$Vesztett$</td><td>$Gólarány$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>||||||||</td><td>3 : 0</td><td></td><td></td><td>3</td><td>0</td><td>7 : 1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0 : 3</td><td>||||||||</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>2 : 3</td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td>||||</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>3 : 3</td></tr>
<tr><td>D</td><td></td><td></td><td></td><td>||||</td><td>0</td><td>3</td><td>1 : 6</td></tr>
</table>

Mi volt a B és C egymás elleni eredménye?

Határozd meg a többi mérkőzés eredményét is!

3. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 30°. A derékszögű csúcs körül a rövidebb befogóval, mint sugárral kört rajzolunk. A háromszög területének hány százaléka esik kívül a körön?

4. Egy konvex nyolcszög öt belső szögének az összege 845°. A kimaradt három szög között van kettő, amelyek egymás pótszögei, és van kettő, amelyek egymás kiegészítő szögei.

Egyenként mekkora ez a három szög?

5. Legyenek az a, b, c és d tetszőleges egészek. Bizonyítsd be, hogy az

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

szorzat osztható 12-vel!

8. osztály II. kategória

1. Legyen

$$A=\frac{2+2^2+2^3+\cdots+2^{3n-1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}}$$

és

$$B=\frac{3+3^2+3^3+\cdots+3^{2n-1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-1}}}$$

ahol n pozitív egész.

Az A és B közül melyik a nagyobb?

2. Melyek azok a p és q prímek, amelyekre a $pq-1$ és a $pq+1$ is prím lesz?

3. Van -e a 2-nek olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, amely

a. két egyforma,

b.négy egyforma,

c.hat egyforma,

számjegyre végződik?

4. Az ABC háromszögben a $CBA_{\sphericalangle} = 45°$. Adott a BC oldalon egy P pont úgy, hogy

$$BP : PC = 1 : 2, \text{ és } CPA_{\sphericalangle} = 60°.$$

Mekkora az $ACB_{\sphericalangle}$?

5. Az ABC szabályos háromszögön kívül lévő P pontnak az oldalegyenesektől való távolsága rendre:x, y és z.

Bizonyítsd be, hogy ezek közül kettő összegének és a harmadik különbségének az abszolut értéke állandó!

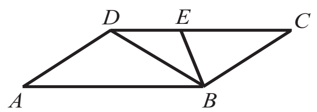
F 1999/2000. Országos (harmadik) forduló
2000. április 13.

7. osztály I. kategória

1. Sári néni 5 kg diót vásárolt 4500 Ft-ért. Otthon megtisztította a diót a héjától, és azt tapasztalta, hogy a dióhéj tömege a dióbél tömegének a 45 %-a.

Hány forintba kerül 1 kg dióbél?

2. Az $ABCD$ paralelogrammát az ábrán látható módon háromszögekre daraboltuk úgy, hogy $AD = DB$, $BE = ED$ és $BC = CE$.



Mekkorák a paralelogramma szögei?

3. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív egész, amelynek utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám a 28, és a szám számjegyeinek az összege is 28?

(A számot a tízes számrendszerben írtuk fel.)

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat.

A következő négy állításból pontosan három igaz:

(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van közöttük fehér;

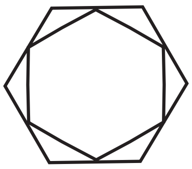
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük zöld;

(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs közöttük sem piros, sem kék;

(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen közöttük piros.

Hány zöld sapka van a dobozban?

5. Egy szabályos hatszög oldalfelező pontjai egy újabb hatszög csúcsai. Hányad része ez utóbbi hatszög területe az eredeti hatszög területének?



7. osztály II. kategória

1. A Bergengóc konzervgyár savanyító üzeme üveges savanyú uborkát exportál. Egy üveg uborkát a gyár 326 Ft-ért állít elő. Az üzem üzletkötője 6000 üveg uborkára kötött szerződést. Ezek egy részét üvegenként 4,4 dollárért, a többit 3,7 márkáért vették meg.

Az üzem üvegenként 387 Ft átlagos nyereségre tett szert.

Az értékesítés idején 1 dollár 220 Ft-ot, 1 márka 140 Ft-ot ért.

A 6000 üveg közül hányat adtak el márkáért?

2. Az AX és BY félegyenesek az ABC háromszög $CAB_\sphericalangle$, illetve $ABC_\sphericalangle$ szögeit harmadolják, és az ABC háromszög körülírt körének középpontjában metszik egymást.

Mekorák a háromszög szögei?

3. Egy számsorozat első eleme a 4, a második eleme pedig a 6. A sorozat következő elemét a továbbiakban mindíg úgy kell kiszámolni, hogy az utoljára kiszámolt elemet elosztjuk a közvetlen előtte kiszámolttal.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Mennyi a sorozat első 2000 elemének az összege?

4. 49, nem feltétlenül különböző pozitív egész szám összege 999. Mekkora lehet ezen számok legnagyobb közös osztójának legnagyobb értéke?

5. Egy 36 fős osztályban a fiúk átlagosan 20 órát hiányoztak fejenként. A lányok között vannak akik egyáltalán nem hiányoztak, a többi lány azonban átlagosan 26 órát hiányzott. Ha tudjuk, hogy több lány jár az osztályba mint fiú, és az osztály összes mulasztott óraszáma nem függ a lányok számától, akkor a fiúk összesen hány órát hiányoztak?

8. osztály I. kategória

1. Erdeiék 1,8 millió Ft-ért árulják a telküket. Négy családtól kaptak komoly ajánlatot.

1. család: 900 ezer Ft-ot készpénzben azonnal, 1 év múlva 600 ezer Ft-ot, újabb 1 év elteltével 300 ezer Ft-ot fizetne;

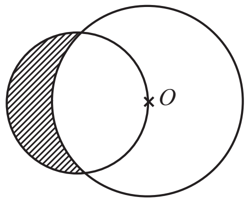
2. család: Készpénzben 1,2 millió Ft-ot adna, majd két év múlva fizetné a fennmaradó összeget;

3. család: 600 ezer Ft-ot készpénzben, majd 1 év múlva 1,1 millió Ft-ot, és újabb 1 év elteltével 100 ezer Ft-ot adna;

4. család: Készpénzben 800 ezer Ft-ot adna, majd egy év múlva kifizetné a fennmaradó összeget.

Melyik a legjobb ajánlat, ha az eladóknak az eladástól számított 2 év múlva van szükségük a pénzre, és addig a megkapott összegeket évi 10,8%-os kamatos kamatra egy bankban kívánják elhelyezni?

2. A $\sqrt{2}$ sugarú kör O középpontja az egységsugarú körvonalon van (lásd az ábrát!). Mekkora a vonalkázott "holdacska,, területe?



3. Határozzuk meg azokat az ötjegyű négyzetszámokat, amelyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy ha az első számjegyüket 3-mal csökkentjük, és az utolsó számjegyüket 3-mal növeljük, szintén négyzetszámot kapunk!

4. Egy körvonalat a $P_1, P_2, \ldots P_{13}$ pontok 13 darab egyenlő ívre bontanak. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai ezen pontok közül valók, és a kör középpontját a háromszög a belsejében tartalmazza?

(Két háromszög különböző, ha legalább egy csúcsuk nem azonos.)

5. Az $ABCD$ négyszögben $AD = BC$, valamint az AD és a BC egyenesek az M pontban metszik egymást úgy, hogy $AMB_{\sphericalangle} = 60°$. Az AC átló, a BD átló és a CD oldal felezöpontja rendre P, Q és R.

Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög szabályos!

8. osztály II. kategória

1. Az $ABCD$ négyzet AD oldalegyenesén úgy vettük fel a P pontot, hogy a D pont az AP szakaszt felezze. Egy, a P pontra illeszkedő egyenes két olyan trapézra darabolja a négyzetet, amelyek területének az aránya 5 : 3.

A négyzet oldalaiból mekkora szakaszokat metsz ki ez az egyenes, ha a négyzet oldala 12 egység hosszú?

2. Egy futóversenyen 12 versenyző indul. Mi volt a beérkezés sorrendje, ha a rajtszám és a helyezési szám szorzata minden esetben eggyel nagyobb volt, mint egy 13-mal osztható szám? (a rajtszám az első 12 pozitív egész volt.)

3. Egy téglalap területe egyenlő a szögfelezői által határolt négyszög területével.

Mekkora a téglalap oldalainak az aránya?

4. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

egyenletet, ha x és y pozitív egészek!

5. Máté a heverőn hagyta azt a 30x40 cm^2-nyi, téglalap alakú kartont, amiből 2 db 5 cm átmérőjű korongot (körlapot) akart kivágni. Mire észbekapott, Kata húga már 22 helyen összefirkálta a kartont. Mindegyik firkát külön-külön lefedhetjük egy-egy 2 cm átmérőjű koronggal. (Ezek a korongok egymásba is nyúlhatnak.)

Mutasd meg a bosszankodó Máténak, hogy bárhová került a 22 firka a kartonra, kivágható belőle két, kívánt méretű, firkamentes korong!