Előszó

Az 1997. évben éppen tízedszer írta ki az Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda (OKSZI) a Művelődési és Közoktatási minisztérium által meghirdetett és az OKSZI által szervezett, a megyei (fővárosi) oktatási központok közreműködésével lebonyolított Varga Tamás matematikai versenyt.

A minden tanév októberében, januárjában és áprilisában – az első vagy iskolai, a második vagy megyei / fővárosi , és a harmadik vagy országos fordulóban – asztalhoz szólított, 7. és 8. tanévüket nyűvő, a matematikát kedvelő és megmérettetésre vágyó versenyzők két kategóriában (a matematikát heti 4 óránál több órában tanulók a II. kategóriában versenyeznek) adhatnak számot felkészültségükről, tehetségükről.

A versenybizottság törekszik – ha nem is mindig sikerrel – az iskolai tananyagra támaszkodó, azt minél szélesebben felölelő olyan feladatok kiválasztására is, amelyek túlmutatnak a kötelező iskolai gyakorló feladatokon. E válogatási elv főszerepet kap a harmadik fordulóra kitűzött feladatokban.

Könyvünk az azonos című, a Typotex Kft. által 1995-ben kiadott könyv folytatása. E kontinuitást könyvünk formájában, kivitelében is hangsúlyozza, elsősorban persze azok számára, akik az említett előző könyvet is birtokolják. Az 1994/1995. tanévtől az 1996/97. tanévig terjedő három év feladatait tanévenkénti, ezen belül fordulónkénti bontásban adjuk, mégpedig olyképpen, hogy a két osztály számára kitűzött feladatok szövegét ugyanilyen sorrendben követik ezek megoldásai.

A könyv lapjainak felső szegélyén látható **F** a feladatok szövegét, az **M** a megoldásokat tartalmazó oldalakat jelöli, míg az oldalak alján látható számok egy tanév kezdő évszámából az utolsó két jegyet, és ebben a tanévben kitűzött feladatok és ezek megoldásait tartalmazó oldalszámot jelölik. Pl.: A **96.3.** az 1996/97. tanév feladatait taglaló oldalak közül a harmadik.

A szerző azzal, hogy egy-egy feladathoz fűzött megjegyzéssel a feladat hátterére, a feladatban rejlő általánosítás lehetőségére is felhívja a figyelmet, arra igyekszik rávenni minden Olvasóját, hogy egy-egy feladat megoldása során ismételten gondolja végig mind a feladat feltételeit, mind ezek szerepét a megoldásban.

Budapest, 1997. szeptember — Pogáts Ferenc
a versenybizottság elnöke

F 1996/97. Iskolai (első) forduló
1996. november 11.

7. osztály

1. Az apa, az anya és három lányuk életkorának összege 88 év. A három lány életkorának összege 10 évvel kevesebb az anya életkoránál. Az apa annyi évvel idősebb az anyánál, mint ahány éves a legfiatalabb lány. Az egyik lány két évvel fiatalabb, mint a másik, és ugyanennyivel idősebb a harmadiknál.

Hány évesek a családtagok?

2. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Az A pont BC oldaltól való távolsága éppen fele a BC szakasz hosszának.

Mekkorák a háromszög szögei?

3. Melyik szám a nagyobb: 1996^{10} vagy $1995^{10} + 1995^{9}$?

(A feladat megoldásához nem használhatsz zsebszámológépet!)

4. Egy urnában fehér és piros golyók vannak, összesen 67 darab. Vannak köztük kicsik és nagyok.

Tudjuk, hogy

- a piros golyók száma osztható 5-tel;

- a nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyókéval;

- a legkevesebb a kis fehér golyóból van;

- a kis fehér, a nagy fehér, a kis piros és a nagy piros golyók száma külön-külön egy-egy prímszám.

Hány golyó van az egyes fajtákból?

5. Egybevágó fehér kockákból egy nagyobb kockát készítettünk. A nagy kocka lapjait pirosra festettük. Ha a kockát szétszedjük, akkor 90 kiskockának lesz 1 vagy 2 lapja piros.

Hány fehér kiskockából készíthettük a nagy kockát? Hány kiskockának maradt minden lapja fehér?

8. osztály

1. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge 72°, továbbá

$$BC = CD = AD,$$

ahol D az AB oldal egy pontja. Igazold, hogy az ABC háromszög szimmetrikus!

2. Két testvér ugyanabba az iskolába jár (és egy házban lakik). A kisebbik a ház és az iskola közti utat 30 perc alatt, a nagyobbik pedig 20 perc alatt teszi meg. Egy reggel a kisebbik 5 perccel korábban indult el az iskolába, mint a nagyobbik. Hány perc múlva érte utól őt a testvére?

3. Az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 219,$$

$$a + b + c + d = 25.$$

Melyik ez a négyjegyű szám?

4. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 25-tel több átlója van, mint ahány oldala?

5. Mikroland szigetének 100 lakosa van. A szigetlakók egy része hazudós, a többi igazmondó. (A hazudósak mindig hazudnak, az igazmondók mindig igazat mondanak.) A szigeten három felekezet van: a Napimádók, a Holdimádók és a Földimádók. Minden lakos pontosan egy felekezethez tartozik.

Egy felmérés alkalmával minden lakosnak meg kellett válaszolnia a következő három kérdés mindegyikét:

Te Napimádó vagy? Te Holdimádó vagy? Te Földimádó vagy?

Az első kérdésre 60, a másodikra 40, a harmadikra 30 ,,igen" válasz érkezett.

Hány hazudós él a szigeten?

F 1996/97. Megyei / fővárosi forduló
1997. január 16.

7. osztály

I. kategória

1. Egy gyalogos és egy kerékpáros azonos helyről és azonos útvonalon 8 órakor indult el a 12 km-re fekvő városba. A gyalogos 6 km/óra, a kerékpáros 12 km/óra egyenletes sebességgel halad. A kerékpáros 20 percet időzik a városban, azután visszaindul az előző útvonalon, mialatt a gyalogos megállás nélkül halad a város felé. A várostól milyen távol és mikor találkozik a kerékpáros a gyalogossal?

2. Az x és y egészekről szóló alábbi hét állítás közül három igaz, a többi hamis.

$$x < y + 3; \quad x < y + 2; \quad x < y + 1; \quad x - 3 < y;$$

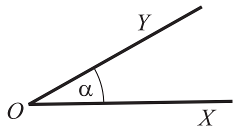
$$x - 2 < y; \quad x - 1 < y; \quad x + y = 100.$$

Határozd meg x és y értékét!

3. Pali azt találta, hogy az $\alpha = XOY$ hegyes szög felét mindig meg tudja szerkeszteni.

Az OX száron kijelöl egy (O tól különböző) A pontot, az OY száron (O-tól távolodva) egy B és egy C pontot úgy, hogy $OA = AB = BC$ legyen. Pali szerint $OCA_{\sphericalangle} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Bizonyítsd vagy cáfold Pali állítását!



4. Milyen jegyre végződik az alábbi 1000 tagú összeg?

$$(1^2 + 9^4 + 9^6 + 7^8) + (1^{10} + 9^{12} + 9^{14} + 7^{16}) + \cdots + (1^{1994} + 9^{1996} + 9^{1998} + 7^{2000})$$

5. Négy fiú gombfoci bajnokságot játszott. Mindenki egyszer játszott mindenkivel. A győzelem két pontot, a döntetlen egy pontot, a vereség 0 pontot ér. András úgy lett győztes, hogy sohasem kapott ki. Béla második lett, és nem játszott döntetlent. Csaba harmadik lett, és egyszer sem nyert. Dénes utolsó lett. A végső sorrendet eldöntő pontszámok különbözők. Add meg az egyes játszmák eredményét, és a végső pontszámokat!

7. osztály

II. kategória

1. Amikor az 5000 méteres futóverseny győztese áthalad a célon, Béla 500 méterrel, Csaba 725 méterrel van a győztes mögött. Ha mindketten az eddigi átlagsebességgel haladnak a cél felé, akkor Csaba hány méterrel lesz az éppen célbaérő Béla mögött?

2. Egy 29 fős osztálynak 3 kérdést tettek fel. Mindenki igennel vagy nemmel válaszolt.

1. Szereted-e a matematikát?
2. Szereted-e a fagylaltot?
3. Szereted-e a palacsintát?

Az első kérdésre 22-en, a másodikra 18-an és a harmadikra is 18-an feleltek igennel. A matematikát szeretők közül 7-en a fagylaltot, 8-an a palacsintát nem szeretik. 12-en szeretik a fagylaltot és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a matematikát. Hányan válaszoltak nemmel mindhárom kérdésre?

3. Mely háromjegyű tízes számrendszerbeli $\overline{abc}$ számokra igaz, hogy

$$\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}=\overline{abc}?$$

4. Mennyi az x, ha

$$\Big|\big|\big||x|-1\big|-1\big|-1\Big|-1\Big|=0,$$

ahol $|x|$ az x abszolútértékét jelöli.

5. Egy konvex hatszög szögei egyenlőek. Igazold, hogy a szemközti oldalak különbsége egyenlő!

8. osztály

I. kategória

1. András vásárolt két könyvet, majd később eladta azokat, mindkettőt ugyanannyiért. Az egyiken 20%-ot vesztett, a másikon 20%-ot nyert, és így összesen 50 ft-ot vesztett. Mennyiért vette és adta el a könyveket András?

2. Az ABC egyenlőszárú háromszög BC oldalán levő belső D pontra $AD=AB$, és D mind az AB, mind az AC oldaltól egyenlő távol van. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

3. Egy matematika tanár a következőképpen adta meg korát: ,,Életkorom kétjegyű egész szám, amelyet számjegyeinek szorzatával megszorozva csupa azonos jegyből álló háromjegyű számot kapunk." Hány éves a matematika tanár?

4. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalára kifelé vegyük fel az ABE szabályos háromszöget! Mekkora az E, C és D pontokon átmenő kör sugara?

5. Egy pályázat díjazására 42000 Ft áll rendelkezésre. A bíráló bizottság hét díj kiadását javasolta úgy, hogy az I., II., III. díj rendre 8000 Ft, 7000 Ft illetve 3000 Ft legyen. Hányan nyertek I. díjat, II. díjat és III. díjat, ha a teljes összeget kiosztották?

8. osztály

II. kategória

1. Egy kerékpáros kiszámította, hogy ha 20 km-t tesz meg óránként, akkor délután 13 órára ér célba, míg ha 30 km-es óránkénti sebességgel kerekezik, akkor délelőtt 11 órakor halad át a célvonalon.

Mekkora sebességgel haladjon, ha pontosan délben 12 órakor akar célba érni?

2. Négy lány, Andrea, Bea, Csilla és Dóra a zeneiskola vizsgáján dalokat énekelt. Minden dalt hárman adtak elő, a negyedik zongorán kísérte őket. Legtöbbször Andrea énekelt, összesen nyolcszor, a legkevesebb alkalommal pedig Dóra, ő csak ötször.

Hány dal hangzott el összesen?

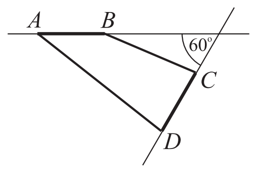
3. Az $ABCD$ trapéz AB alapjára a C illetve a D csúcsból húzott magasság felezi az AC illetve a BD átlókat.

a. Bizonyítsd be, hogy a trapéz húrtrapéz!

b. Mekkora az AB alap hossza, ha a $CD = 1$ cm?

4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy számjegyeinek összege osztható 5-tel, és a nála eggyel nagyobb szám jegyeinek összege is osztható 5-tel? **5.** Az $ABCD$ konvex négyszögben $BC = AD$, továbbá BC és az AD egyenesek (az ábra szerint) 60°-os szöget zárnak be.

A CD oldalra kifelé vegyük fel a CPD szabályos háromszöget. Igazold, hogy az APB háromszög szabályos!



F 1996/97. Országos (harmadik) forduló
1997. április 17.

7. osztály

I. kategória

1. Két autó egy helyről, egy időben indul. Az **A** autó 100 km/óra sebességgel rohan, és minden 100 km megtétele után 10 percet pihen. A **B** autó csak 50 km/óra sebességgel halad, de megállás nélkül.

Az **A** autó vezetője hányszor pihent, míg a távolság a két autó között 500 km lett?

2. Hány olyan háromjegyű (tízes számrendszerbeli) pozitív egész szám van, amelynek jegyei különböző páros számok?

3. Mekkora az $A(1699; 1418)$, $B(1697; 1408)$, $C(1709; 1409)$ pontok által meghatározott háromszög területe, ha a hosszúságegység az origó és a $(1; 0)$ pont távolsága?

4. Melyek azok a p, q pozitív prímek, amelyekre a $p \cdot q - 1$ és a $p \cdot q + 1$ is prím?

5. Egy (100×100)-as táblázat minden mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét, és kiszámítjuk soronként is, oszloponként is, és a két átlóban is az ott lévő 100–100 szám összegét.

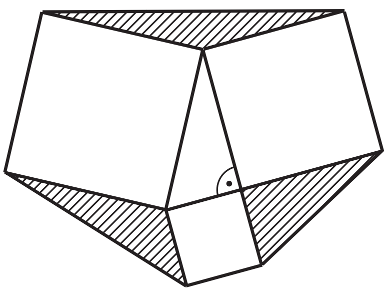
Bizonyítsd be, hogy a kapott összegek között lesz két azonos!

7. osztály

II. kategória

1. Egy szolga évi bére 100 tallér és egy öltözet ruha volt. Hét hónap elteltével azonban otthagyta a helyét, s távozáskor megkapta a ruhát és 20 tallért. Hány tallért ér a ruha?

2. Egy derékszögű háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk. Csúcsaikat az ábrán látható módon összekötöttük. Bizonyítsd be, hogy az így keletkezett ,,vonalkázott'' háromszögek területe egyenlő!



3. Van-e olyan természetes egész szám, amelynek négyzete az

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 13 \cdot 14 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 14 \cdot 15$$

15 tagú összeg?

4. Mely x egész szám(ok)ra lesz az $|x+8|+|x+3|+|x-2|+|x-6|$ összeg a legkisebb? Mekkora ez a legkisebb érték?

5. Felírtunk a táblára egy számot. Két játékos felváltva a táblán lévő szám valamelyik 0-tól különböző számjegyét kiválasztja, s ezt levonja a számból. A régi számot letörli, és a különbséget írja a régi szám helyébe.

Melyik játékosnak van nyerő stratégiája és miben áll ez, ha kezdetben 1997 volt a táblán és az a játékos nyer, aki különbségként 0-t kap?

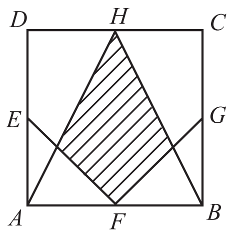
8. osztály

I. kategória

1. Két borkereskedő érkezett az országhatárra. Az egyiknél 64 akó, a másiknál 20 akó ugyanolyan bor volt. Pénzük azonban kevés volt a vám megfizetésére, így a hiányzó pénzt borral pótolták. Az első kereskedő 40 peták mellett még 5 akó borral fizetett, a másik két akó borral fizetett, de visszakapott 40 petákot.

Mennyibe számították a bor akóját és mennyi volt egy akó bor vámja?

2. Az $ABCD$ négyzet területének hányad része a vonalkázott síkidom területe, ha E, F, G és H egy–egy oldal felezőpontja?



3. A négyjegyű tízes számrendszerbeli $\overline{abab}$ alakú számok között

a.) Melyik az a legnagyobb, amelyiknek a legkevesebb osztója van?

b.) Melyik az a legkisebb, amelyiknek a legkevesebb osztója van?

4. Az 1997 prímszám. Melyek azok az x, y egész számok, amelyek kielégítik az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1997}$$

egyenletet?

5. Egy kocka egyik lapja az $ABCD$ négyzet. Az ezzel szomszédos lapok középpontja rendre E, F, G és H.

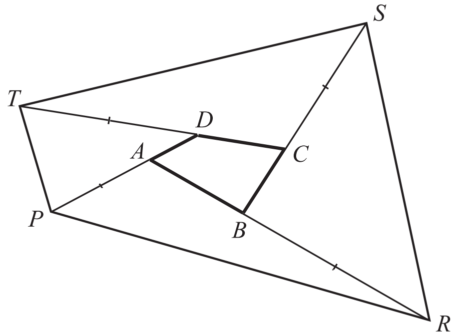
Bizonyítsd be, az A, B, C, D, E, F, G és H egy gömbfelületen vannak.

8. osztály

II. kategória

1. Hét különböző természetes szám összege 100. Bizonyítsd be, hogy van közöttük három olyan, amelyek összege 50-nél nem kevesebb!

2. Az $ABCD$ konvex négyszög oldalait az ábrán látható módon a háromszorosára növeltük. Az így keletkezett $PRST$ négyszög területe hányszorosa az eredeti $ABCD$ négyszög területének?



3. Igaz -e az alábbi állítás, vagy annak megfordítása?

Ha két pozitív egész összegéhez hozzáadva a legnagyobb közös osztójukat a legkisebb közös többszörösüket kapjuk, akkor a két (eredeti) szám aránya 2:3.

4. Egy számolás során, amikor egy egész számot 1997-tel osztottam, a tizedesvessző után valahol 4 darab 9-es számjegyet kaptam egymás után.

Bizonyítsd be, hogy hibásan számoltam!

5. Adott egy kocka hét csúcspontja. A pontok számát szaporíthatod úgy, hogy egy már meglévő pontot egy másik meglévő pontra tükrözöl. A tükrözés után nyert pont meglévőnek számít.

Meglévő lesz-e a kocka hiányzó csúcsa?