1 Feladatok

E.1.feladat
Balázs és a kisöccse is pont annyi idős lesz 2025-ben, mint születési évében a számjegyek összege. Hány éves lesz Balázs 2025-ben?

E.2.feladat
Az ABC háromszög BC oldalának D olyan pontja, mely esetén a DAB szög a CAB szög harmada. Az ADC háromszög beírt körének középpontja egybeesik az ABC háromszög körülírt körének középpontjával. Hány fok az ABC háromszög legkisebb szöge?

E.3.feladat
Egy kocka minden csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott élen, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén? A válasz a tört legegyszerűbb alakjának számlálója!

E.4.feladat
Van két, nem feltétlenül azonos méretű játékkockánk, melyek éleinek hossza egész szám. Egymásra tesszük ezeket úgy, hogy a felül levő kocka teljes lapjával érintkezzék az alul levő kocka egyik lapjával. Az így kapott test térfogatának mérőszáma megegyezik a felszínének a mérőszámával. Mekkora az eredeti két kocka éleinek összhossza?

E.5.feladat
Legyen $a_1 = 1$ és a sorozat további elemeit a következő szabály szerint kapjuk: ha $a_n < 100$, akkor legyen $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 8$, míg $a_n \geq 100$ esetén legyen $a_{n+1} = a_n - 80$. Mi lesz a sorozatban szereplő legnagyobb szám?

E.6.feladat
Regő a retardált és Tomi a tehetséges sokszögeket illesztettek össze az oldalaik mentén úgy, hogy mindketten egy-egy nagyobb sokszöget kaptak. Hánnyal több oldala van Regő végső sokszögének, mint Tomi végső sokszögének, ha mindketten egy háromszöget, egy négyszöget, egy nyolcszöget, egy tizenhat szöget, egy harminckét szöget, egy hatvannégy szöget és egy százhuszonnyolc szöget illesztettek össze és Regő végső sokszögének a lehető legtöbb oldala van, míg Tomiénak a lehető legkevesebb? (Szabadon választhattak az építkezéshez tetszőleges adott oldalú sokszögeket.)

E.7.feladat
Marci gondolt 4 pozitív egész számra, a, b, c, d-re. Beni felírt a táblára 4-et az $[a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d]$ és $[c, d]$ értékek közül, ezek a következők: 84, 196, 588 és 1260. Mennyi $[a, b, c, d]$ értéke? (A $[a, b]$ jelölés az a és b számok legkisebb közös többszörösét jelöli.)

E.8.feladat
A Minótaurusz szeretne kicsit rendet rakni a labirintusában. A labirintus a négyzetrácson egy $a \times b$ rácsnégyzetből álló téglalap, melynek oldalsó falai a rácstéglalap kerületének összes rácsponttól rácspontig terjedő szakaszából áll. Ezen kívül a téglalapon belül szintén van néhány rácsponttól rácspontig terjedő szakasz méghozzá úgy, hogy a téglalap bármely egységnégyzetéből bármelyik másikba pontosan egyféleképpen lehet eljutni, leszámítva azokat az utakat, amelyek valamelyik egységnégyzeten többször is áthaladnak. A Minótaurusz először lefestette az összes belülről elérhető egységnyi falfelületet, ebből összesen 1006 darab volt. Most fel szeretné seperni a labirintus minden egységnégyzetét. Hány négyzetet kell felsepernie?

E.9.feladat
Egy 4×5-es táblázatot a $+1$ és -1 számokkal töltünk ki úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a beírt számok szorzata 1. Hányféle kitöltés lehetséges?

E.10.feladat
Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két különböző másodfokú polinom, amelyek főegyütthatója 1 és

$$f(0) + f(1) + \ldots f(2023) + f(2024) = g(0) + g(1) + \cdots + g(2023) + g(2024)$$

Mennyi x, ha $f(x) = g(x)$?

M.1.feladat
Dél-Geometriában Jancsi földet szeretne művelni. A kör alakú mező kerülete mentén véletlenszerűen kijelöl kilenc (különböző) pontot. Az első három pont által meghatározott háromszögbe ülteti majd a krumplit, a második három pont által meghatározott háromszögbe a hagymát és az utolsó három pont által meghatározott háromszögbe az ananászt. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a három háromszög nem metszi egymást? A válasz a tört legegyszerűbb alakjában a számláló és nevező összege.

M.2.feladat
A $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ polinom $a_n, ..., a_1, a_0$ együtthatói természetes számok, és $P(1) = 7$, míg $P(4) = 226$. Mennyi $P(7)$ értéke?

M.3.feladat
Egy háromszög egyik oldalának hossza megegyezik a köréírt körének sugarának kétszeresével, egy másik oldalának hossza megegyezik a beírt körének sugarának hatszorosával. Ha a beírt kör sugara 4 egység, akkor hány egység a háromszög területe?

M.4.feladat
Sziszüphosz már az idők kezdete óta a követetkező büntetésre ítéltetett: a világ n. percében ki kell számolnia, hogy mennyi $1! + 2! + \cdots + n!$ és az eredményt leírni a füzetébe. Tegnap János megleste, milyen számot írt éppen Sziszüphosz. Mi volt a szám utolsó négy számjegye, ha Sziszüphosz 4-es számrendszerben számol és jegyzetel?

M.5.feladat
Egy $n \times n$-es táblázat első oszlopába csupa 1-eseket, második oszlopába csupa 3-asokat, ..., utolsó oszlopába csupa $\binom{n+1}{2}$-eseket írtunk. Károly összeadta az utolsó sorban álló számokat, míg Lajos a főátló fölötti számokat adta össze. Mennyit kapott Lajos, ha Károly 816-ot kapott?

M.6.feladat
Egy húrnégyszög két szemközti oldalának hossza 18 és 24 egység és az átlói merőlegesek egymásra. Hány egység a húrnégyszög köré írt körének sugara?

M.7.feladat
Az alábbi $x^4 - 18x^3 + ax^2 + 200x - 1984$ polinom két gyökének szorzata -32. Mennyi a értéke?

M.8.feladat
Hány olyan $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq 13$ sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros egész számok?

M.9.feladat
Egy háromszög oldalainak hossza három egymást követő egész szám. A legnagyobb szöge a háromszögnek kétszerese a háromszög legkisebb szögének. Mekkora a háromszög harmadik szögének koszinuszának tízezerszerese?

M.10.feladat

Legyen $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_r = n$ az n szám összes pozitív osztója. Tudjuk, hogy $d_5^2 + d_8^2 = d_9^2$. Mennyi d_{10}?

H.1.feladat

Tekintsük kétjegyű számoknak egy olyan halmazát, melynek bármnely két eleme relatív prím, és teljesül az is, hogy ha egy szám eleme a halmaznak, akkor a számjegyek felcserélésével kapott szám szintén eleme a halmaznak. Mennyi az elemszáma a halmaznak, ha az a lehető legtöbb?

H.2.feladat

Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ tízszöget úgy kaptuk hogy, két egységoldalú szabályos hatszöget összeillesztettünk az egyik oldaluk mentén. A P pont a síknak olyan pontja, amire az

$$M = PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_4^2 + PA_5^2 + PA_6^2 + PA_7^2 + PA_8^2 + PA_9^2 + PA_{10}^2$$

összeg minimális. (AB^2 az AB szakasz hosszának négyzetét jelöli.) Mennyi $4M$ értéke?

H.3.feladat

Mennyi a $-72x^3 + 48x^2 - 12x + 1$ polinomban a valós gyökök összegének 72-szerese?

H.4.feladat

Petinek van néhány építőeleme, mindegyik elem néhány 1×1-es négyzetlapból áll, melyeket oldalaiknál összeragasztottak. Legyen $S \subseteq \{1, 2, 3, ..., 7\}$ az a halmaz, melyre $n \leq 7$ esetén Peti akkor és csak akkor tud letapétázni egy $4\times n$-es táblát néhány építőelemmel, ha $n \in S$. Hányféle lehet az S halmaz? (S lehet üres is.) (Egy tapétázás szabályos, ha minden négyzet pontosan egy építőelemmel van lefedve és az építőelemek nem lógnak le a tábláról.)

H.5.feladat

A Minótaurusz visszatér. A labirintus a négyzetrácson egy 23×23 rácsnégyzetből álló négyzet, melynek oldalsó falai a négyzet kerületének összes rácsponttól rácspontig terjedő szakaszából áll. Ezen kívül a téglalapon belül szintén van néhány rácsponttól rácspontig terjedő szakasz méghozzá úgy, hogy a téglalap bármely egységnégyzetéből bármelyik másikba pontosan egyféleképpen lehet eljutni, leszámítva azokat az utakat, amelyek valamelyik egységnégyzeten többször is áthaladnak. A Minótaurusz most valamelyik egységnégyzetbe áll. Egy lépésben átléphet egy szomszédos négyzetbe, ha a két négyzet között nincsen fal. (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk.) Legalább hány lépésre van szüksége, hogy minden egységnégyzetbe eljusson egyszer, függetlenül a labirintus alakjától és attól, hogy honnan indul? (A Minótaurusz minden esetben ismeri, hogy hogyan néz ki a labirintusa.)

H.6.feladat

Legyen $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ továbbá minden $n \geq 3$ esetén

$$a_n = \frac{\sqrt{8a_{n-1}^3 a_{n-2}}(n^2 - 3n + 2)}{2^{n-1} + 2na_{n-1} - a_{n-1}}.$$

A sorozat első 25 eleme közül mennyi az egészek összege?

H.7.feladat

Gergő születésnapjára kapott egy füzetet, melybe azóta minden vasárnap lejegyzi a következő oldalra az adott nap dátumában a hónap és a nap számának összegét. Egyik hétfőn húga, Hanna megnézte a füzetbe írt számokat és megállapította, hogy azok alapján nem tudja kitalálni az adott nap dátumát, de egy hét múlva már meg fogja tudni állapítani ezt. Hány vasárnap telt el Gergő születésnapja óta?

H.8.feladat
Az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényre minden $x, y > 0$ valósakra teljesül, hogy

$$(x-y)f(x+y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = (x^2+y^2)f(x(x+y)).$$

Mennyi

$$\frac{f(1)}{f(1)} + \frac{f(1)}{f(2)} + ... + \frac{f(1)}{f(10)}$$

értéke?

H.9.feladat
Melyik az a legkisebb pozitív egész $n > 1$, amire az első n (nem nulla) négyzetszám átlaga is négyzetszám?

H.10.feladat
Karácsonykor egy 64 fős évfolyam úgy ünnepelt, hogy egymásnak énekeltek. Minden dalt az évfolyam néhány tagja mutatta be, összesen k dalt adtak elő és minden diák minden másik évfolyamtársát hallgatta legalább egyszer nézőként. Legalább mennyi k?

2 Megoldások

Könnyű/Easy

Feladat		Megoldás
E.1.	Balázs és kisöccse	27
E.2.	ABC háromszög	45
E.3.	Hangyák	2179
E.4.	Játékkockák	120
E.5.	sorozat maximuma	184
E.6.	Regő és Tomi	252
E.7.	Marci gondolt	8820
E.8.	Minótaurusz	502
E.9.	4×5 tábla	4096
E.10.	f(x)=g(x)	1012

Közepes/Medium

Feladat		Megoldás
M.1.	Dél-Geometria	73
M.2.	P(x) polinom	1129
M.3.	Egy háromszög...	120
M.4.	Sziszüphosz	0121
M.5.	$n \times n$ tábla	9180
M.6.	Húrnégyszög	15
M.7.	Polinom két gyökének...	86
M.8.	Sorozatok	609
M.9.	Háromszög oldalai egészek	5625
M.10.	Szám osztói	15

Nehéz/Hard

Feladat		Megoldás
H.1.	Kétjegyű számok	13
H.2.	Tízszög	42
H.3.	Polinom valós gyök	12
H.4.	Peti építőelemei	27
H.5.	Minótaurusz	1034
H.6.	Sorozat	264
H.7.	Gergő születésnapja	17
H.8.	Függvényegyenlet	55
H.9.	Négyzetszámok átlaga	337
H.10.	Karácsonyi éneklés	8