Részletek a versenyszabályzatból

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét írjátok a válaszlapra!
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t írjatok!
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t írjatok válaszul!
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \quad \sqrt{3} \approx 1.7321 \quad \sqrt{5} \approx 2.2361 \quad \sqrt{7} \approx 2.6458 \quad \pi \approx 3.1416$$

Időhatárok

- A Jolly feladat kijelölésére az első 15 percben van lehetőség.
- Az első 30 perc leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. Kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetnek fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

1. feladat Peti délelőtt 9 és 10 óra között ránézett egy hagyományos (mutatós) órára, és érdekes dolgot vett észre: 5 perccel korábban éppen ott járt a nagymutató, ahol 5 perccel később a kismutató fog járni. Melyik időpontban nézett Peti az órára? A választ egész percre kerekítve, óópp alakban add meg. **(20 pont)**

2. feladat Margitka nagyon sokat telefonál a barátnőivel. Hogy ne legyen túl sok a telefonszámlája, ezért telefonálás közben gyakran ránéz a faliórára. Legutóbb, amikor Juliskát hívta, a következőre lett figyelmes: amikor Juliska felvette a telefont, pontosan 4 óra volt: a nagymutató és a kismutató éppen 120°-os szöget zárt be egymással. Amikor letette a telefont, érdekes módon szintén pontosan 120°-ot zárt be a két mutató. Legalább mennyibe került Margitkának ez a telefonhívás, ha 23 Ft a percdíja?
Szolgáltatója perc alapon számláz, azaz a beszélgetés minden megkezdett percét ki kell fizetnie. Feltehetejük továbbá, hogy Margitka falióráján a mutatók folyamatosan, egyenletes sebességgel mozognak.
(20 pont)

3. feladat Meghatározandó a

$$\sqrt{9 + x\sqrt{x^2 - 108}} = x - 3.$$

egyenlet legkisebb nemnegatív egész megoldása. **(20 pont)**

4. feladat Egy trapézt az átlói négy háromszögre osztanak fel. Tudjuk, hogy két szemközti háromszög területe 50, illetve 72 egység. Hány egység a trapéz területe? **(20 pont)**

5. feladat Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei kettővel nagyobbak, mint az $x^2 + cx + b = 0$ egyenlet gyökei. Mennyi $b^2 + c^2$ értéke? **(25 pont)**

6. feladat A legkisebb pozitív egész szám, amelynek a négyzete 2 darab négyes számjegyre végződik, a 12 (a négyzete 144). Melyik pozitív egész a második legkisebb olyan négyzetszám alapja, amely 3 darab négyes számjegyre végződik? **(25 pont)**

7. feladat Adott egy konvex 12-szög, oldalai különböző hosszúak. Hányféleképpen lehet a csúcsai közül ötöt kiválasztani úgy, hogy az ezek által meghatározott konvex ötszög mindegyik oldala a 12-szögnek átlója legyen? **(25 pont)**

8. feladat Egy n tagú választó testület három jelölt közül választ. Mindegyikük rangsorolja őket, az elsőnek 3, a másodiknak 2, a harmadiknak pedig 1 pontot ad. Összesítve a jelöltek pontszámát kiderült, hogy a sorrend egyértelmü, hármuk pontszáma különböző. A testület egyik tagja észrevette, hogy ha a választást úgy bonyolították volna le, hogy mindannyian csak az elsőként rangsorolt jelöltjüknek adtak volna 1 pontot, akkor a jelöltek sorrendje megfordulna. Mi az a legkisebb n érték, amelyre ez előfordulhat? **(30 pont)**

9. feladat Egy mértani sorozat első néhány tagjának összege 11, négyzetösszegük 341, köbösszegük 3641. Határozzuk meg a szorzatukat. **(30 pont)**

10. feladat Egy 100 km hosszú utat bejáró busz fedélzeti számítógéppel rendelkezik, amely kiszámolja, mennyi idő van még hátra a célbaérkezéshez. A számítás azon a feltevésen alapul, hogy a busz átlagsebessége a hátrelévő szakaszon megegyezik a már megtett szakaszon mért átlagsebességel. Negyven perccel az indulás után a számítógép 1 órának számolja a hátralévő időt. A kiszámolt idő a következő 5 órában nem változik. Hány kilométert tett meg a busz ebben az 5 óraban? **(30 pont)**

11. feladat p, q, r és s különböző pozitív prímek, melyekre teljesül, hogy

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}$$

Meghatározandó $pqrs$ legkisebb lehetséges értéke. **(30 pont)**

12. feladat Az ABC háromszög oldalainak hossza $BC = 5$, $CA = 6$ és $AB = 7$, megfelelő magasságainak hossza m_a, m_b, m_c, magasságpontja M. Meghatározandó az $MA \cdot m_a + MB \cdot m_b + MC \cdot m_c$ összeg értéke. **(30 pont)**

13. feladat Egy régi óra számlapjáról leestek a számok, csak a 11, a 12 és az 1 maradt a helyén. Visszaragasztottam a többi kilenc számot is, de összevissza sorrendben. Ezután minden szomszédpárra kiszámoltam a két szám különbségét, majd összeadtam ezt a 12 számot, így 62-t kaptam. Hányféleképpen ragaszthattam vissza a számokat? **(35 pont)**

14. feladat 12 hangya ül egy kocka 12 élének felezőpontjaiban. Egyszerre mindegyik hangya feldob egy-egy pénzt majd az eredménytől függően elindul az él valamelyik végpontja felé. Mekkora a valószínűsége, hogy lesz olyan csúcs, ahol három hangya találkozik?
A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(35 pont)**

15. feladat A BAC $75°$-os szögtartomány belsejében felveszünk egy P pontot úgy, hogy P pont távolsága az AB egyenestől $13 + 9\sqrt{3}$ míg az AC egyenestől $7\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$. P keresztül húzunk egy egyenest úgy, hogy a lehető legkisebb területű háromszöget vágjuk le a szögtartományból. Mekkora ez a terület? **(40 pont)**

16. feladat Mi a legnagyobb k egész szám, amire teljesül, hogy van olyan pillanat, amikor az óra három mutatója közül bármely kettő legalább k fokos szöget zár be egymással.
Tegyük fel, hogy a mutatók folytonosan, állandó sebességgel mozognak. **(40 pont)**

17. feladat Az ABC háromszög oldalainak hossza $BC = 2$, $AC = 5$, $AB = \sqrt{39}$. Megrazoljuk az A középpontú, AC sugarú kört és a B középpontú, BC sugarú kört, melyek C-től különböző metszéspontja legyen D. Egy D-n keresztül húzott egyenes az előbb tekintett két kört D-n kívül E-ben és F-ben metszi. Húzunk E-ben és F-ben érintőket a megfelelő körhöz: ezek az érintők G-ben metszik egymást. A CG egyenes második metszéspontja az ABC háromszög körülírt körével legyen H. Határozd meg GH^2 értékét. **(45 pont)**

18. feladat Melyik az a legnagyobb négyjegyű $\overline{abcd}$ szám, amely egyenlő az egész számok összegével $\overline{ab}$-től $\overline{cd}$-ig? (Az összegbe $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ is beletartozik, és az utóbbi szám a nagyobb.) **(45 pont)**

19. feladat Számítsd ki a pontos értékét!

$$(1+4\sin^2 10°)(1+4\sin^2 30°)(1+4\sin^2 50°)(1+4\sin^2 70°)$$

(50 pont)

20. feladat Hány olyan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pozitív egészekből álló végtelen sorozat van, amelyre $x_1 = 1$ és az $x_n \cdot x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 5$ egyenlet teljesül minden pozitív egész n esetén.
Két sorozatot különbözőnek tekintünk, ha van olyan n, amelyre az n. tagjuk különbözik. **(50 pont)**

21. feladat Adott a koordinátarendszerben az $ABCD$ négyzet, ahol a $A = (0,0)$, $B = (9,0)$, $C = (0,9)$, $D = (9,9)$. Három béka ül a $(0,0)$, az $(1,0)$ és a $(0,1)$ pontban. Egy megengedett lépés a következő: kiválasztunk két békát, és az elsőt középpontosan tükrözzük a másik békára. Békák egy elrendezése elérhető, ha el lehet jutni hozzá megengedett lépések egy sorozatával. Hány olyan elérhető elrendezése van a békáknak, ahol mindhárom béka az $ABCD$ négyzet belsejében vagy határán foglal helyet? *Egy megengedett lépés során a békák kiléphetnek az $ABCD$ négyzetből.* **(50 pont)**